Modelagem para Avaliação de Desempenho e Confiabilidade

Paulo Maciel

Centro de Informática

- Interpretações do Tempo -

A noção de tempo pode ser representada de diversas maneiras nos sistemas computacionais.

- **Tempo Lógico** **é definido a partir de relações de precedência entre eventos permitindo estabelecer ordens causais entre conjunto de eventos.**
- **Tempo Físico** **é um tempo métrico que permite representar quantitativamente a distância entre eventos e estabelecer ordens totais entre eventos.**
- **Tempo Contínuo** **segue a natureza uniforme e contínua do tempo físico e é isomorfo ao conjunto dos reais.**
- **Tempo Discreto** **é uma simplificação do tempo contínuo onde a relação de isomorfismo é com o conjunto dos naturais.**
- **Tempo Global** **fornece uma única referência temporal para todos os componentes do sistema.**
- **Tempo Local** **é a noção em que cada componente do sistema tem sua própria referência temporal.**

Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

Avaliação de Desempenho

Measurements Modelagem

Análise Probabilística Análise Determinística

Simulação Análise Operacional

Análise de Desempenho

- Modelagem
  - Determinística
    - Melhor e pior casos
  - Probabilistica
    - Valores prováveis
  - Operacional
    - Informações observáveis
- Simulação
    - Análise exaustiva
- Medição
  - Medidas obtidas do sistema real
  - Protótipos

Processo de Avaliação de Desempenho

Macro-Atividades de um Processo de Avaliação de Desemenpeho
(com modelagem)

1. **Compreensão geral do problema/sistema a ser avaliado.**
2. **Definição inicial dos critérios de desempenho a serem avaliados.**
3. **Identificação dos componentes.**
4. **Refinamento dos critérios de avaliação**
5. **Geração do modelo abstrato.**
6. **Planejamento da medição.**
7. **Coleta dos dados.**
8. **Análise dos dados coletados associados aos componentes (influentes) do sistema/problema.**
9. **Geração do modelo refinado.**
10. **Definição e mapeamento das métricas no modelo refinado.**
11. **Escolha dos métodos de avaliação dos modelos.**
12. **Desagregação do modelo refinado.**
13. **Avaliação.**
14. **Agregação.**
15. **Análise dos resultados e recomendações.**

Informações do Documento do Processo

- Para cada Atividade constam:
  - Objetivo
  - Responsável
  - Pré-condições
  - Entradas
  - Ações
  - Saídas

Modelos Temporizados

- Modelagem para Análise de Desempenho
  - Análise Operacional
  - Modelos para Simulação
  - Modelos Analíticos
    - Cadeias de Markov
    - Teoria das Filas
    - Redes de Petri Estocásticas
    - Álgebras de Processo Estocásticas

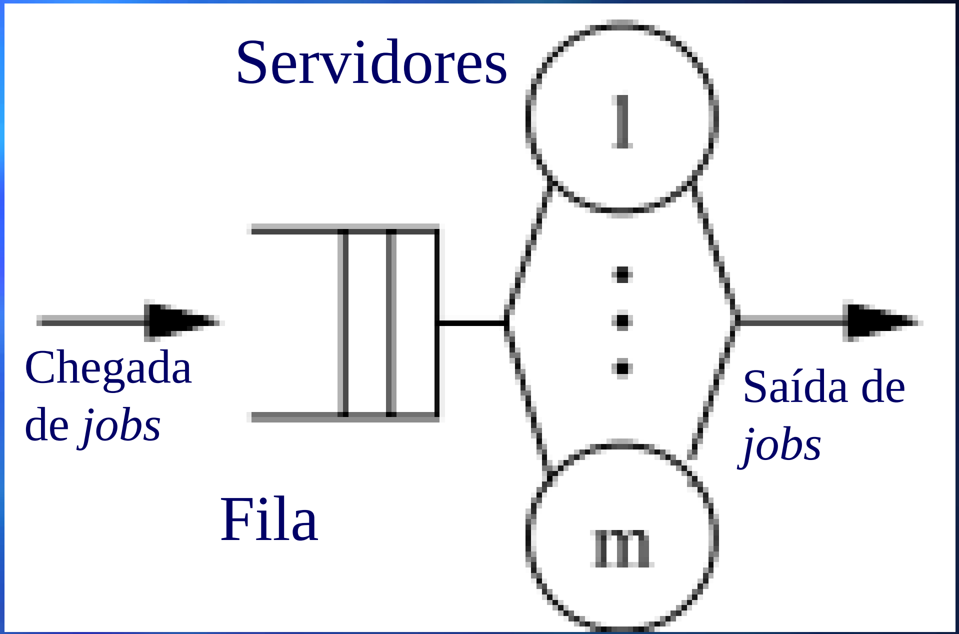
Análise Operacional

Informações observáveis

Concebida por Jeff Buzzen e Peter Denning

Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.



A,B = {M,D,G,E}

- •M - *Markovian*,
- •D - Determinística,
- •G – *General*
- •E - *Erlangian*

Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.
    - Muitas vezes quando K e m são ∞, estes termos são omitidos ou usa-se / /

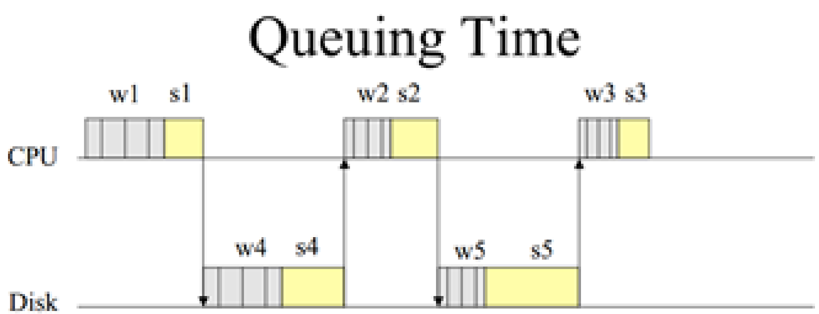
- Exemplos:
  - M/M/1
  - M/M/1/K
  - M/G/2

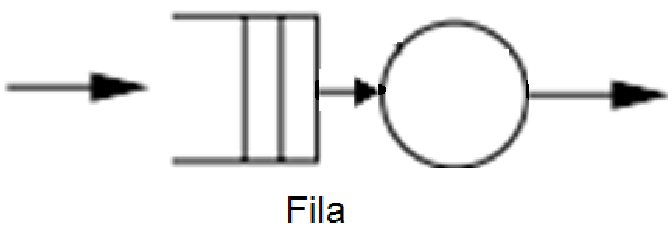
Análise Operacional

Considere um transação *j* executada em um recurso *i*.

S_i^j é período de tempo (*service time*) que uma transação *j* recebe do recurso *i*.

W_i^j é período de tempo (*waiting time*) que uma transação *j* passa esperando recurso *i*.



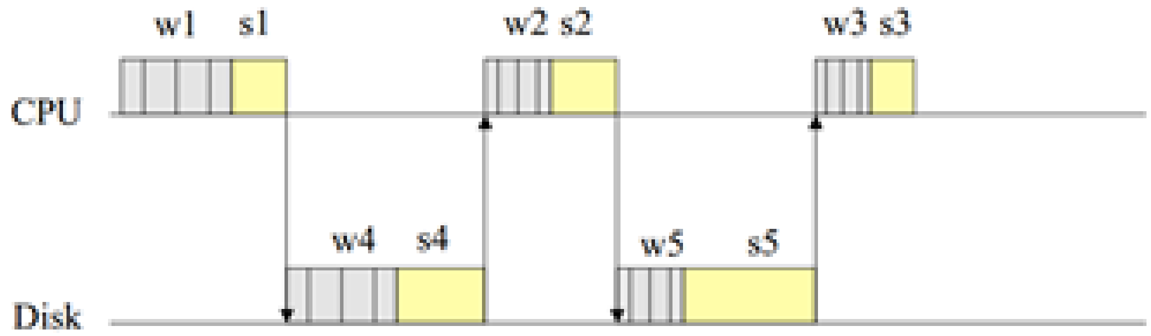


Queueing time na CPU = $w_1 + w_2 + w_3$ (somatório dos *waiting times* na CPU).

Queueing time no disco = $w_4 + w_5$ (somatório dos *waiting times* no disco).

Análise Operacional

Service Demand

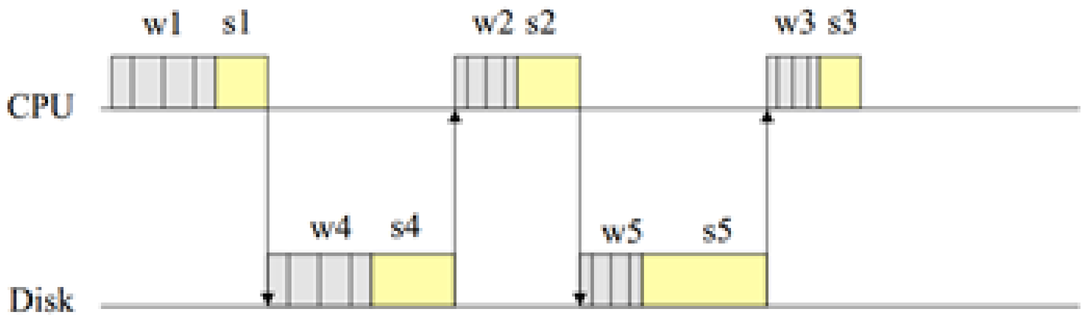


Service demand na CPU = $s_1 + s_2 + s_3$ (somatório dos *service times* na CPU).

Service demand no disco = $s_4 + s_5$ (somatório dos *service times* no disco).

Análise Operacional

Residence Time

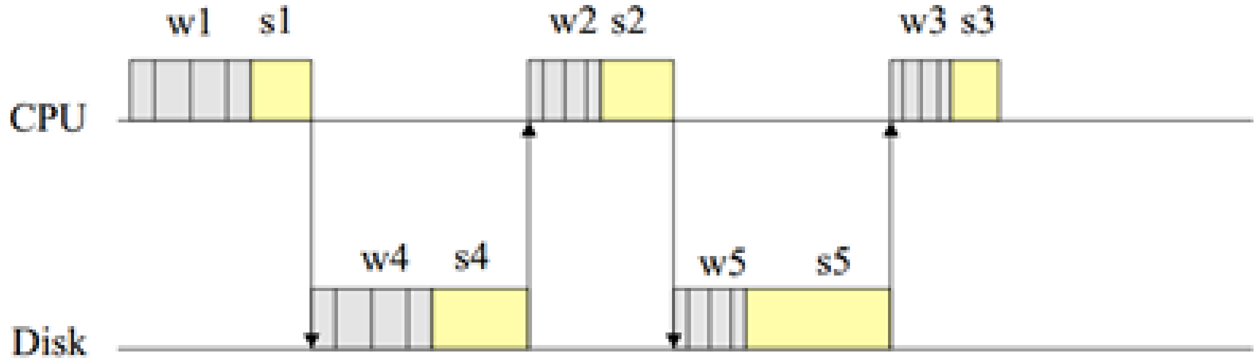


Residence time na CPU = $w_1 + s_1 + w_2 + s_2 + w_3 + s_3$ (somatório do *queueing time* e do *service demand* na CPU).

Residence time no disco = $w_4 + s_4 + w_5 + s_5$ (somatório do *queueing time* e do *service demand* no disco).

Análise Operacional

Response Time



Response time de uma transação *j* no sistema é o somatório do *residence time* da transação na CPU e do *residence time* da transação no disco.

$$Response\ time\ =\ Residence\ time\ \text{na CPU}\ +\ Residence\ time\ \text{no disco}$$

Análise Operacional

- Variáveis operacionais
  - T: Período de observação
  - K: Número de recursos do sistema
  - A_i: Número total de solicitações (ex:.chegadas) do recurso i no período T.
  - A_0: Número total de solicitações (ex:.chegadas) ao sistema no período T.
  - C_i: Número total de serviços finalizados pelo recurso i no período T.
  - C_0: Número total de serviços finalizados pelo sistema no período T.
  - B_i: Tempo de ocupação do recurso i no período T.

Análise Operacional

- Métricas derivadas (*derived measures*)
  - S_i: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; $S_i = B_i/C_i$
  - U_i: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; $U_i = B_i/T$
  - X_i: *throughput* (ex.: finalizações por unidade de tempo) do recurso i; $X_i = C_i/T$
  - λ_i: taxa de chegada (ex.:, chegadas por unidade de tempo) ao recurso i; $\lambda_i = A_i/T$
  - X_0: *throughput* do sistema; $X_0 = C_0/T$
  - V_i: Número médio de visitas ao recurso i por solicitação; $V_i = C_i/C_0$

Análise Operacional

- Exemplo1

Suponha que ao se monitorar uma processador por um período de 1 min, verificou-se que o recurso esteve ocupado por 36s. O número total de transações que chegaram ao sistema é 1800. O sistema também finalizou a execução de 1800 transações no mesmo período.

1. Qual a taxa de chegada ao sistema (λ_0)?
2. Qual é o throughput do sistema (X_0)?
3. Qual é a utilização da CPU(U_{CPU})?
4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas pelo sistema (S_0)?

Análise Operacional

- Exemplo1

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

CPU $\quad T = 1\,min \quad B_{CPU} = 36\,s$

$A_0 = 1800$ transactions

$C_0 = 1800$ transactions

$K = 1$

$A_0 = A_1$

$C_0 = C_1$

$S_0 = S_1 = S_{CPU}$

$U_0 = U_1 = U_{CPU}$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_{CPU}$

$X_0 = X_1 = X_{CPU}$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1800}{60} = 30\,tps$

$X_0 = X_1 = \frac{1800}{60} = 30\,tps$

Análise Operacional

- Exemplo1

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

$$U_0 = U_{CPU} = \frac{B_{CPU}}{T} = \frac{36\,s}{60\,s} = 0,6$$

$$S_0 = S_1 = \frac{B_{CPU}}{C_{CPU}} = \frac{36}{1800} = 0,02\,s = S_{CPU}$$

Análise Operacional

- *Utilization Law*

$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{B_i}{T} \times \frac{C_i}{C_i} = \frac{B_i}{C_i} \times \frac{C_i}{T} = S_i \times X_i$$

Relacionamento da utilização de um dispositivo com o seu throughput.

Análise Operacional

- *Utilization Law*

$$U_i = S_i \times X_i$$

Exemplo: Considere que 125 pacotes por segundo chegam a um roteador e que o roteador leva em média 2 milisegundos para tratar o pacote. Portanto:

$$U_i = 0{,}002 \times 125 = 25\%$$

Análise Operacional

- Exemplo2

A banda passante de um *link* de comunicação é 56000 bps. Pacotes de 1500 bytes são transmitidos ao *link* a uma taxa de 3 pacotes por segundo

  - Qual é a utilização do link?

Análise Operacional

- Exemplo2

bandwidth 56000 bps

Time to send 1 bit (TSb)

TSb = 1/bandwidth = 1,78571E-05

(TSB) Time to send 1 byte = 8 x TSb = 0,000143

Packet size = 15000 bytes

Time to send 1 packet (TSP) =

1500 x TSB = 0,214286

Arrival rate (λ) = 3 packets/s

U = TSP x λ = 0,214286 x 3 = 0,642857

Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$$X_i = \frac{C_i}{T} = \frac{C_i}{T} \times \frac{C_0}{C_0} = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{C_0}{T} = V_i \times X_0$$

Uma maneira interessante de relacionar o trhoughput do sistema ao throughput dos recursos.

Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$$X_i = V_i \times X_0$$

Exemplo: suponha que toda vez que executa uma transação faz-se 2 acessos a uma unidade de disco. Se 5,6 transações são finaziladas por segundo, portanto:

$$X_i = 2 \times 5{,}6 = 11{,}2\ tps$$

Análise Operacional

- *Service Demand Law*
  - *Service demand de um recursos* é o tempo médio total que uma transação passa em no recurso.

Da *Utilization Law, tem-se:*

$$U_i = X_i \times S_i$$

Da *Forced Flow Law,* tem-se:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Portanto:

$$U_i = V_i \times X_0 \times S_i = D_i \times X_0$$

Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$$U_i = V_i \times X_0 \times S_i = D_i \times X_0$$

Portanto: $$D_i = \frac{U_i}{X_0}$$

Observe que a utilização U_i do dispositivo i é diretamente proporcional à demanda D_i (*service demand*), portanto o dispositivo com mais alta demanda $\max_i\{D_i\}$ tem a mais alta utilização e é o “gargalo” do sistema.

Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$$\boxed{X_i = \frac{C_i}{T} \Rightarrow \frac{C_i}{X_i} = T}$$

$$\boxed{B_i = U_i \times T}$$

$$\boxed{U_i = X_i \times S_i}$$

$$D_i = V_i \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{U_i}{X_i} = \frac{C_i}{X_i} \times \frac{U_i}{C_0} = T \times \frac{U_i}{C_0} = \frac{B_i}{C_0}$$

And, since $C_0/T = X_0$, then $D_i = U_i/X_0$

Therefore:

$$\boxed{D_i = V_i \times S_i = \frac{B_i}{C_0} = \frac{U_i}{X_0}}$$

Análise Operacional

- Exemplo3

  Considere que um *Web Server* foi monitorado por 10 min e que a CPU esteve ocupada por 90%. O *log* do *Web Server* registrou 30.000 solicitações processadas. Qual é a CPU *Service Demand* (D_{CPU}) relativa as solicitações ao *Web Server*?

$T = 10 \times 60s = 600s$

$X_0 = 30.000/600 = 50$ solicitações por segundo.

$D_{CPU} = U_{CPU}/X_0 = 0,9/50 = 0,018$ s/solicitação

Análise Operacional

OL

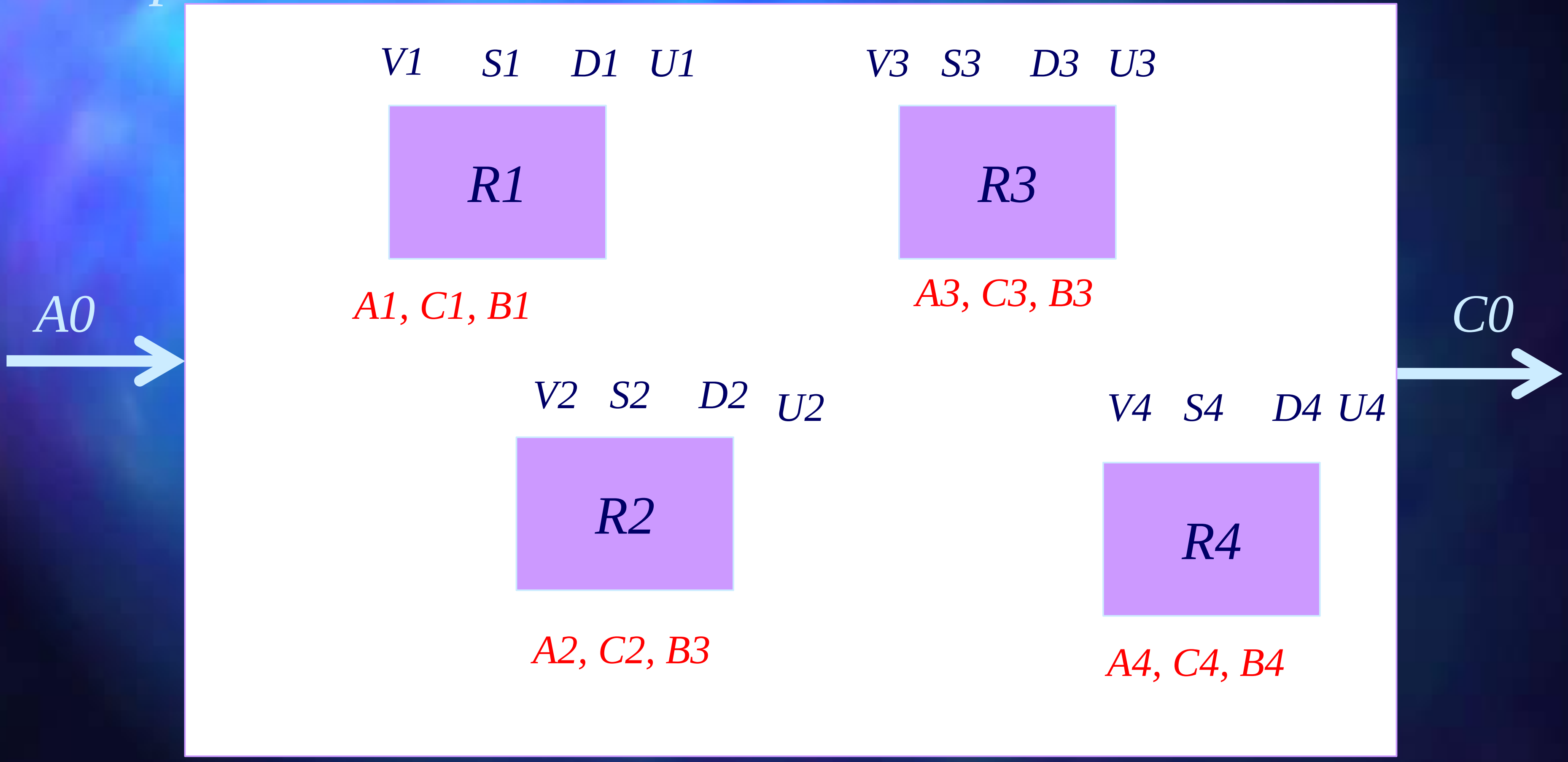
- Exemplo4 Suponha um departamento composto por quatro recursos (pessoas: R1, R2, R3 e R4). Esse departamento foi monitorado por um período de 6 horas. Verificou-se que R1 esteve ocupado por 4h25min, R2 por 4h5min, R3 por 5h15min e R4 por 3h56min. O número total de transações que chegaram ao departamento foi 96. O sistema também finalizou a execução de 96 transações no mesmo período. O número total de chegadas a cada recurso e as respecitiva finalizações são $A_1 = C_1 = 60$, $A_2 = C_2 = 110$, $A_3 = C_3 = 100$ e $A_4 = C_4 = 55$.
  1. Qual a taxa de chegada ao sistema (λ_0)?
  2. Qual é o *throughput* do sistema (X_0)?
  3. Qual é a utilização de cada recurso (U_i)?
  4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas por cada recurso do sistema (S_i)?
  5. Qual é o número médio de visitas por recurso (V_i)?
  6. Qual é tempo médio de uma transação qualquer (não necessariamente a que visitou o recurso i) no recurso i (D_i)?

Análise Operacional

OL

V1

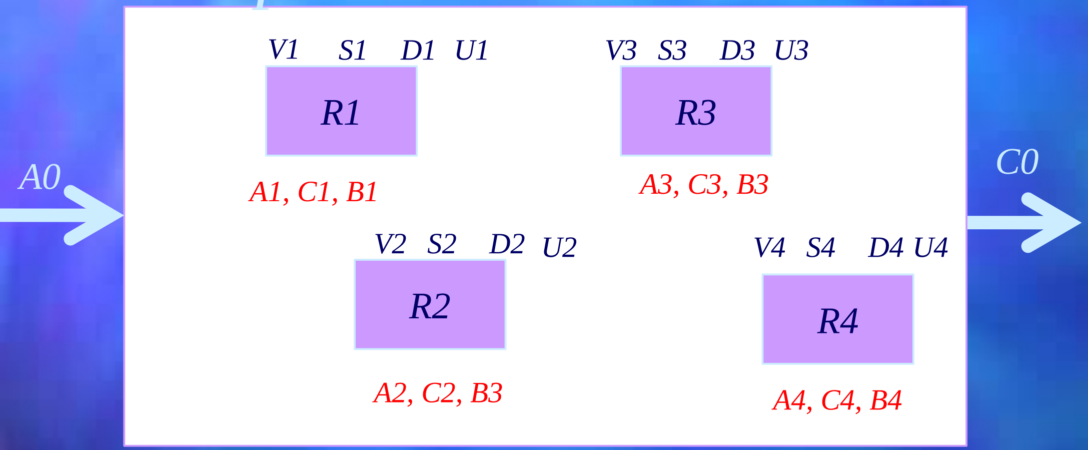
- Exemplo 4



Análise Operacional

OL

- Exemplo 4



$A_0 = 96$ $A_3 = 100$

$A_1 = 60$ $A_4 = 55$

$A_2 = 110$

$T_h = 6$

$C_0 = 96$ $C_4 = 55$

$C_1 = 60$

$C_2 = 110$

$C_3 = 100$

$T = 6 \times 60 = 360 \; minutos$

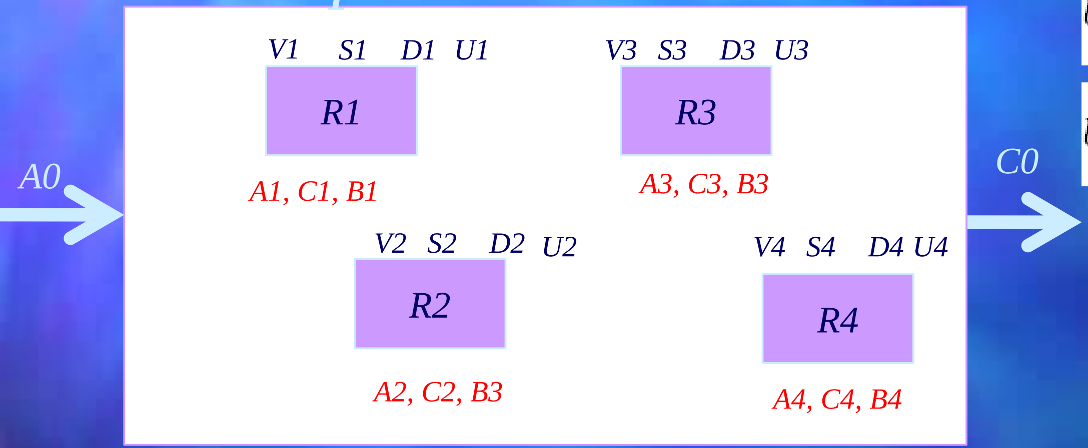
$B_1 = 4 \times 60 + 25$ $B_2 = 4 \times 60 + 5$

$B_3 = 5 \times 60 + 15$ $B_4 = 3 \times 60 + 56$

Análise Operacional

OL

- Exemplo 4



$$U_1 = \frac{B_1}{T} = 0.736111 \qquad S_1 = \frac{B_1}{C_1} = 4.41667$$

$$U_2 = \frac{B_2}{T} = 0.680556 \qquad S_2 = \frac{B_2}{C_2} = 2.22727$$

$$U_3 = \frac{B_3}{T} = 0.875 \qquad S_3 = \frac{B_3}{C_3} = 3.15$$

$$U_4 = \frac{B_4}{T} = 0.655556 \qquad S_4 = \frac{B_4}{C_4} = 4.29091$$

$$V_1 = \frac{C_1}{C_0} = 0.625 \qquad V_2 = \frac{C_2}{C_0} = 1.14583$$

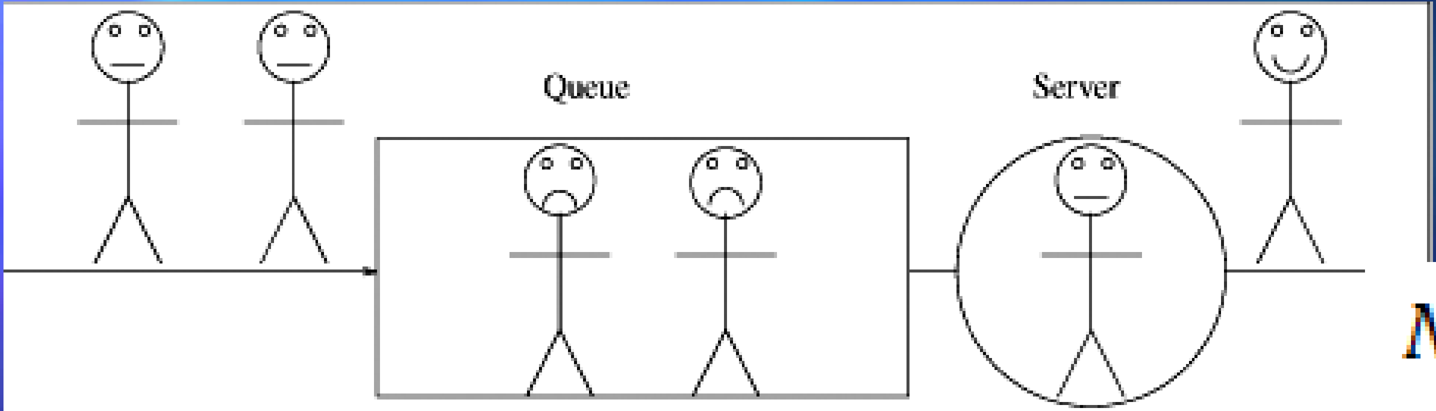
$$V_3 = \frac{C_3}{C_0} = 1.04167 \qquad V_4 = \frac{C_4}{C_0} = 0.572917$$

$$\lambda_0 = \frac{A_0}{T} = 0.266667 \qquad X_0 = \frac{C_0}{T} = 0.266667$$

$$D_1 = \frac{U_1}{X_0} = 2.7604 \qquad D_2 = \frac{U_2}{X_0} = 2.55208 \qquad D_3 = \frac{U_3}{X_0} = 3.28125 \qquad D_4 = \frac{U_4}{X_0} = 2.45833$$

Análise Operacional

- *Little's Law*



$$N_i = \lambda_i \times R_i$$

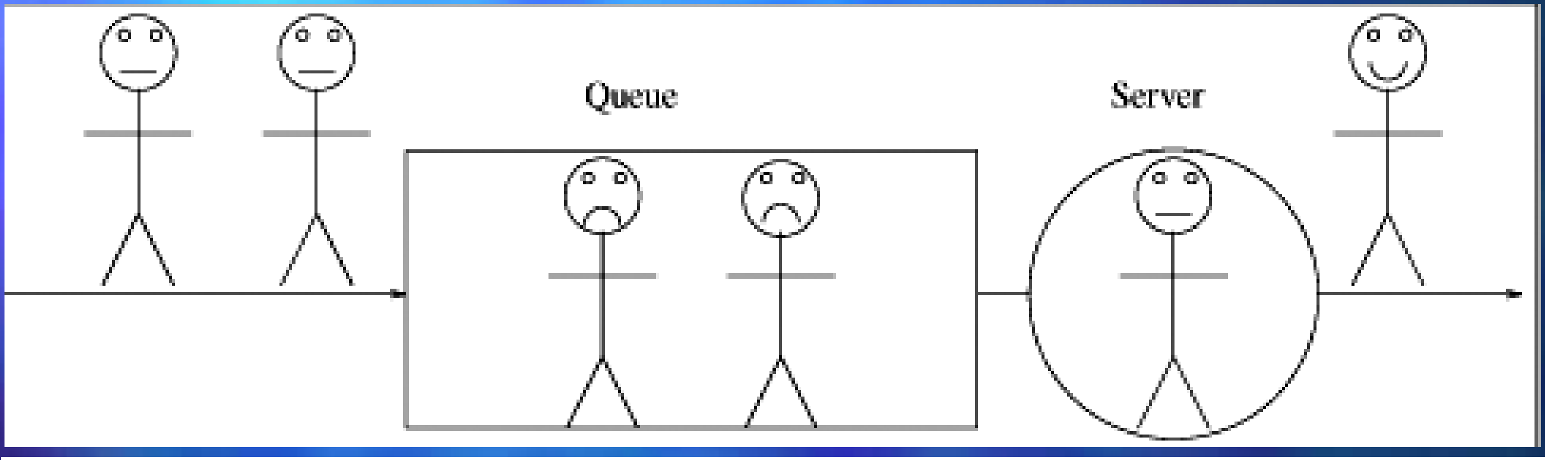
A lei de Little também é uma lei operacional, pois utiliza apenas informações mensuráveis. Adotamos essa lei para relacionar o tamanho da fila N_i de um dispositivo i ao tempo de resposta deste dispositivo R_i em função do número de chegadas (A_i) observadas no período (T). $\lambda_i = \frac{A_i}{T}$

R_i – Response time
W_i – Waiting time
S_i – Service time

N_i – Número de clientes no sistema
X_i – Throughput (vazão)
λ_i - taxa de chegada

Análise Operacional

- *Little's Law*



Se o sistema é balanceado, a taxa de chegada é igual ao *throughput*, portanto: $N_i = \lambda_i \times R_i = X_i \times R_i$

Quando não há fila e se considera apenas um servidor, a Little's law corresponde a Utilization law:
e $R_i = S_i$

Análise Operacional

- Exemplo 5

Um call center precisa redimencionar o número de atendentes em função de uma previsão de crescimento de demanda. Espera-se que o número de chamadas diárias em 6 meses chegue a 30000.

Considere que 75% dessas chamadas diárias ocorrerão no período de 3horas e que a duração média de cada chamada é de 5 minutos.

A empresa adota como meta um nível de utilização dos atendentes de 70%.

Quantos atendentes a empresa deve ter em 6 meses?

Análise Operacional

- Exemplo 5

$$U_i = \lambda_i \times S_i$$

$$\lambda_i = \frac{U_i}{S_i} = \frac{0{,}7}{5\ min} = 0{,}14\ {}^{ch.}/_{min}$$

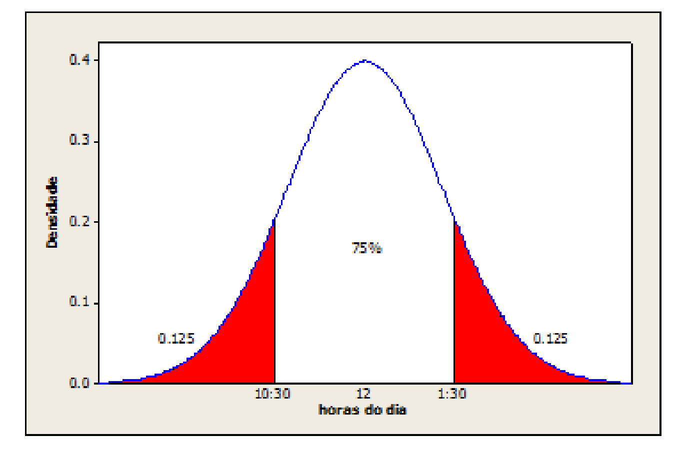
Duração de uma chamada (R_i):

$$R_i = \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{0{,}14} = 7{,}142857\ min$$

$$N = X_0 \times R_i$$

$$N = 125\ \times 7{,}142857$$

$$= 892{,}8571\ atendentes$$



$$A_0 = C_0 = 30000 \text{ chamadas por dia}$$

$$X_0 = \frac{30000 \times 0{,}75}{3 \times 60\ min} = 125\ ch./min$$

Análise Operacional

- *General Response Time Law*

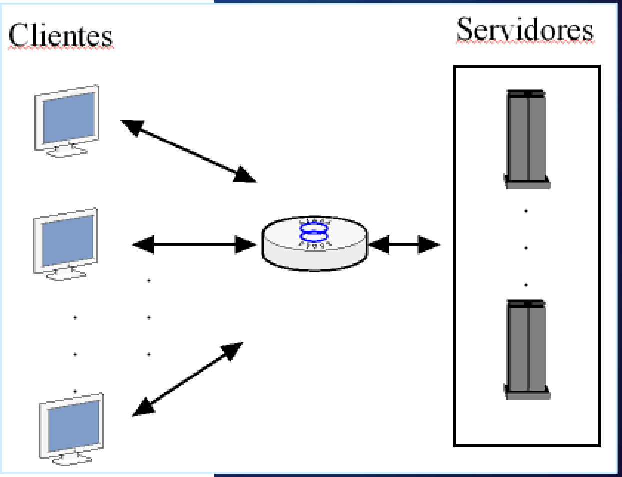
A Little's law pode ser aplicada a qualquer parte do sistema, basta apenas que o fluxo esteja "balanceado". Portanto, pode-se aplicá-la a parte central do sistema'(servidores) e ao sistema periférico (clientes).

N é o número total de transacões no sistema, R é o *response time*, e X é o *throughput* do sistema.

$$N = X \times R$$

Dado que N_i é o número de transações em cada dispositivo, N pode ser calculdado:

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_M$$



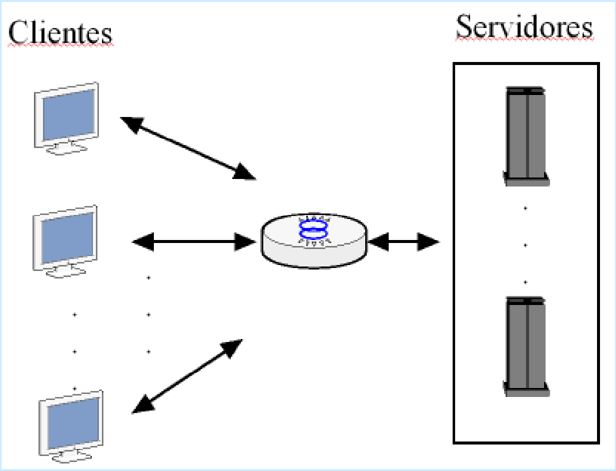
Análise Operacional

- *General Response Time Law*

Dividindo-se ambos os lados por X, tem-se:

$$R = V_1 \times R_1 + V_2 \times R_2 + \cdots V_M \times R_M$$

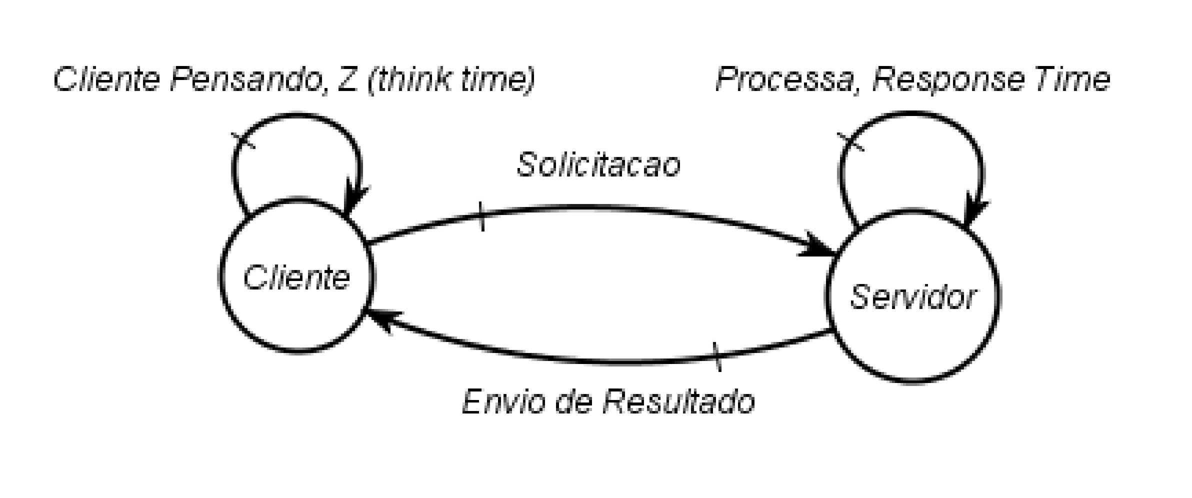
$$R = \sum_{i}^{M} V_i \times R_i$$



Análise Operacional

- *Interactive Response Time Law*

Em um sistema interativo, os clientes fazem uma solicitação a um sistema servidor, o sistema servidor processa essa solicitação e devolve um resultado ao cliente. Após um período de espera (*think time*) Z, o cliente faz uma nova solicitação. Se o *system response time* é R, o tempo total desse ciclo é $R + Z$.



Análise Operacional

- *Interactive Response Time Law*

Se considerarmos um período T, cada cliente gerará:

$$\frac{T}{R+Z} \; \textit{solicitações no período } T.$$

Se considerarmos N clientes, teremos:

$$\frac{N \times T}{R+Z} \; \textit{solicitações no período } T.$$

Portanto, o *throughput* do sistema é:

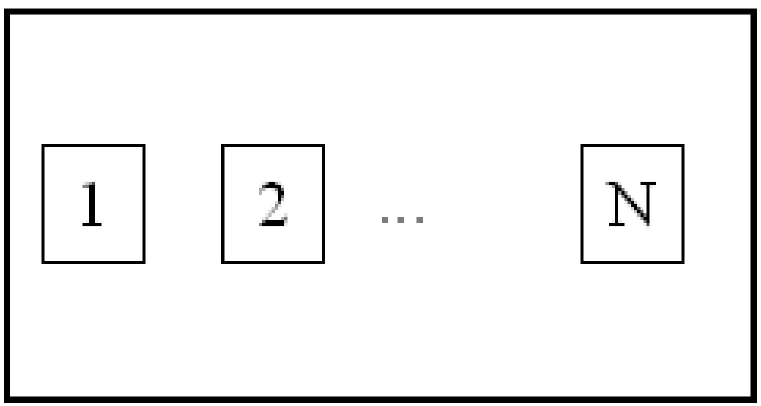
$$X = \frac{\frac{N \times T}{R+Z}}{T}$$

$$X = \frac{N}{R+Z} \quad \text{and} \quad R = \frac{N}{X} - Z$$

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Observe que a utilização U_i do dispositivo i é diretamente proporcional à demanda D_i (*service demand*), portanto o dispositivo com mais alta demanda $\max_i\{D_i\}$ tem a mais alta utilização e é o "gargalo" do sistema.



Sistema com N componentes em paralelo

$$U_i = D_i \times X_0$$

$$X_0 = \frac{U_i}{D_i}$$

Como $Max(U_i) = 1$, então:

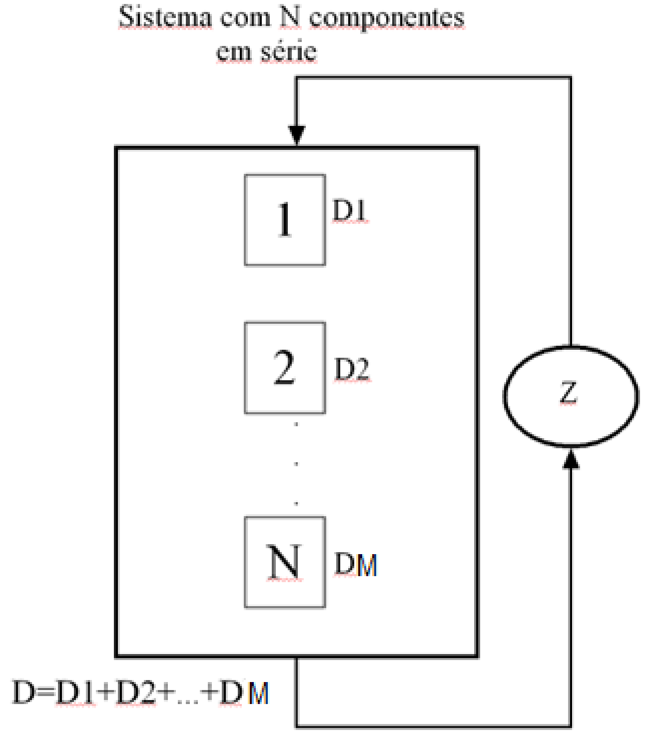
$$X_0 \leq \frac{1}{D_{max}}$$

Todas atividades começam no mesmo momento, mas a tarefa "maior" só finaliza quando todas as atividades finalizarem.

Análise Operacional

Bottleneck Analysis

Considere agora outra situação limite: um sistema composto por N componentes em série e que o clientes tenham um *think time* Z.



Portanto, $R = D$

E como sabemos que

$$X = \frac{N}{R + Z}$$

Temos:

$$X = \frac{N}{D + Z}$$

Portanto:

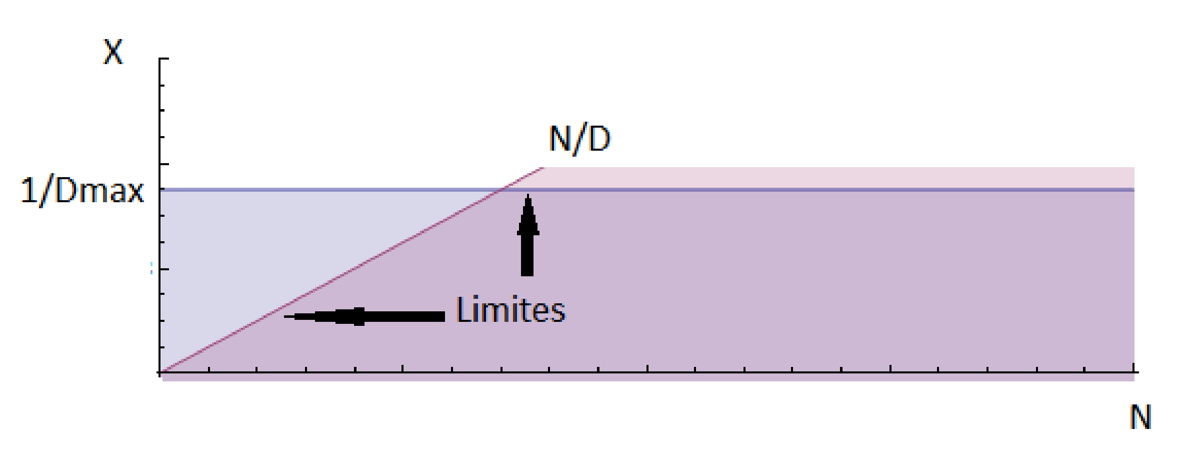
$$X \leq \frac{N}{D}$$

Consequentemente:

$$X = \min_i \left\{ \frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D} \right\}$$

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*



Portanto, $R = D$

E como sabemos que

$$X = \frac{N}{R + Z}$$

Temos:

$$X = \frac{N}{D + Z}$$

Portanto:

$$X \leq \frac{N}{D}$$

Consequentemente:

$$X = \min_i \left\{ \frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D} \right\}$$

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Problema:

Considere um sistema composto por um servidor de aplicação (SA), um servidor de banco de dados (SBD), uma unidade de disco (D) e um servidor de autenticação (SAut).

Clientes se "logam" no sistema, procuram documentos (textos) e fazem dowloads dos documentos de seu interesse. Considere siturações em que se tem até 5 clientes.

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Problema:

Esse sistema e seus componentes foram monitorados por 4h. Observaram-se, nesse período, a conclusão de 400.000 transações. A utilização média medida de cada recurso foi:

U_{SA} =0.555556, U_{SBD} =0.833333, U_{D} = 0.416667, e U_{SAut} =0.277778.

Qual é a vazão máxima do sistema?

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Problema:

Sabemos que:

$$D_{max} = \max\{D_{SA}, D_{SBD}, D_D, D_{SAut}\}$$

E que

$$X = \min_{N \in \{1,2,3,4,5\}} \{\frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D}\}$$

e $N = \{1,2,3,4,5\}$,

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Problema:

Sabemos que:

$$X_0 = \frac{400.000}{4 \times 60min \times 60s \times 1000ms}$$
$$= 0.027778 \text{ ms}$$

Dado que $D_i = \frac{U_i}{X_0}$, temos:

$$D_{SA} = \frac{U_{SA}}{X_0} = \frac{0.555556}{0.027778 \text{ ms}} = 20\ ms$$

$$D_{SBD} = \frac{U_{SA}}{X_0} = \frac{0.833333}{0.027778 \text{ ms}} = 30\ ms$$

$$D_D = \frac{U_D}{X_0} = \frac{0.416667}{0.027778 \text{ ms}} = 15\ ms$$

$$D_{DSAut} = \frac{U_{SAut}}{X_0} = \frac{0.277778}{0.027778 \text{ ms}} = 10\ ms$$

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Problema:

Sabemos, portanto, que:

$$D_{max} = \max\{D_{SA}, D_{SBD}, D_D, D_{SAut}\} = 30ms$$

E que

$$D = \sum_{i \in \{D_{SA}, D_{SBD}, D_D, D_{SAut}\}} D_i = 75\ ms$$

Como

$$X = \min_{N \in \{1,2,3,4,5\}} \{\frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D}\}$$

e $N = \{1,2,3,4,5\}$,

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis* Problema:

temos:

$N = 1$

$$X = \min_{N=1}\{\frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D}\} = \min\left\{\frac{1}{30ms}, \frac{1}{75ms}\right\} = 0.013333$$

$N = 2$

$$X = \min_{N=2}\{\frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D}\} = \min\left\{\frac{1}{30ms}, \frac{2}{75ms}\right\} = 0.026667$$

$N = 3$

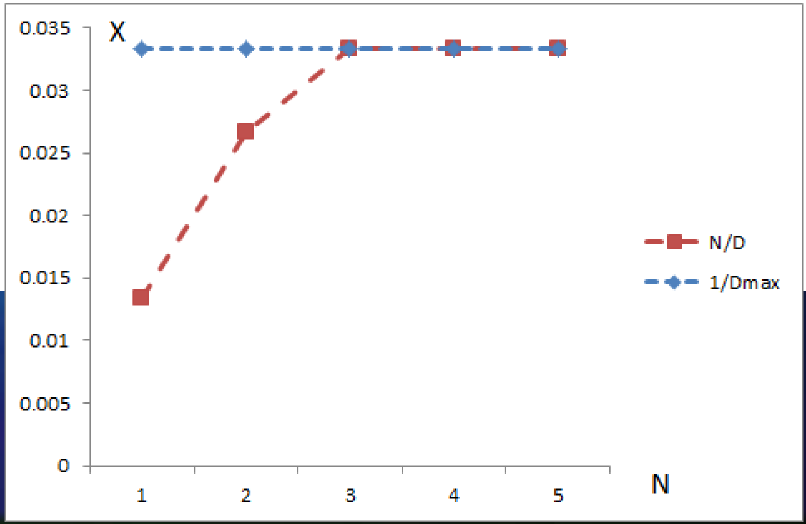
$$X = \min_{N=3}\{\frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D}\} = \min\left\{\frac{1}{30ms}, \frac{3}{75ms}\right\} = 0.033333$$

$N = 4$

$$X = \min_{N=4}\{\frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D}\} = \min\left\{\frac{1}{30ms}, \frac{4}{75ms}\right\} = 0.033333$$

$N = 5$

$$X = \min_{N=5}\{\frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D}\} = \min\left\{\frac{1}{30ms}, \frac{5}{75ms}\right\} = 0.033333$$



Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Problema:

Considere um servidor de email que é composto de um processador e duas unidades de disco (**disco 1** e **disco 2**). Cada transação a esse sistema, faz sete acessos ao **disco 1** e oito acessos **disco 2**, assim como dezesseis acessos ao processador. O *service time* do **disco 1 e disco 2** é 20 e 30 ms, respectivamente. O *service time* do processador é 10 ms.

a. Qual é o dispositivo "gargalo" do sistema?
b. Qual é o tempo de *response time* do sistema?
c. Qual é a utilização máxima da configuração atual desse sistema?
d. Qual é o *throughput* máximo desse sistema?

Análise Operacional

- Leis Operacionais (*derived measures*)

Utilization Law:

$$U_i = X_i \times S_i = \lambda_i \times S_i$$

Forced Flow Law:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Service Demand Law:

$$D_i = V_i \times S_i = U_i / X_0$$

Little's Law:

$$N = X \times R$$

Interactive Response Time Law

$$R = \frac{N}{X} - Z$$

Modelagem de Fenômenos Aleatórios

Modelo de Probabilidade

1. Experimento é um conjunto de condições sob as quais uma variável é observada.

2. *Outcome* (resultado) de um experimento é o resultado de uma observação (ponto amostral)

3. Espaço Amostral (Ω) é a coleção de todos os possíveis resultados do experimento (pontos amostrais)

4. Evento (E) é um conjunto de pontos amostrais.

Eventos

- Um evento *E* é uma coleção de zero ou mais pontos amostrais (evento elementar) de Ω. Um evento *E* é um sub-conjunto de Ω.

$$E \subseteq \Omega$$

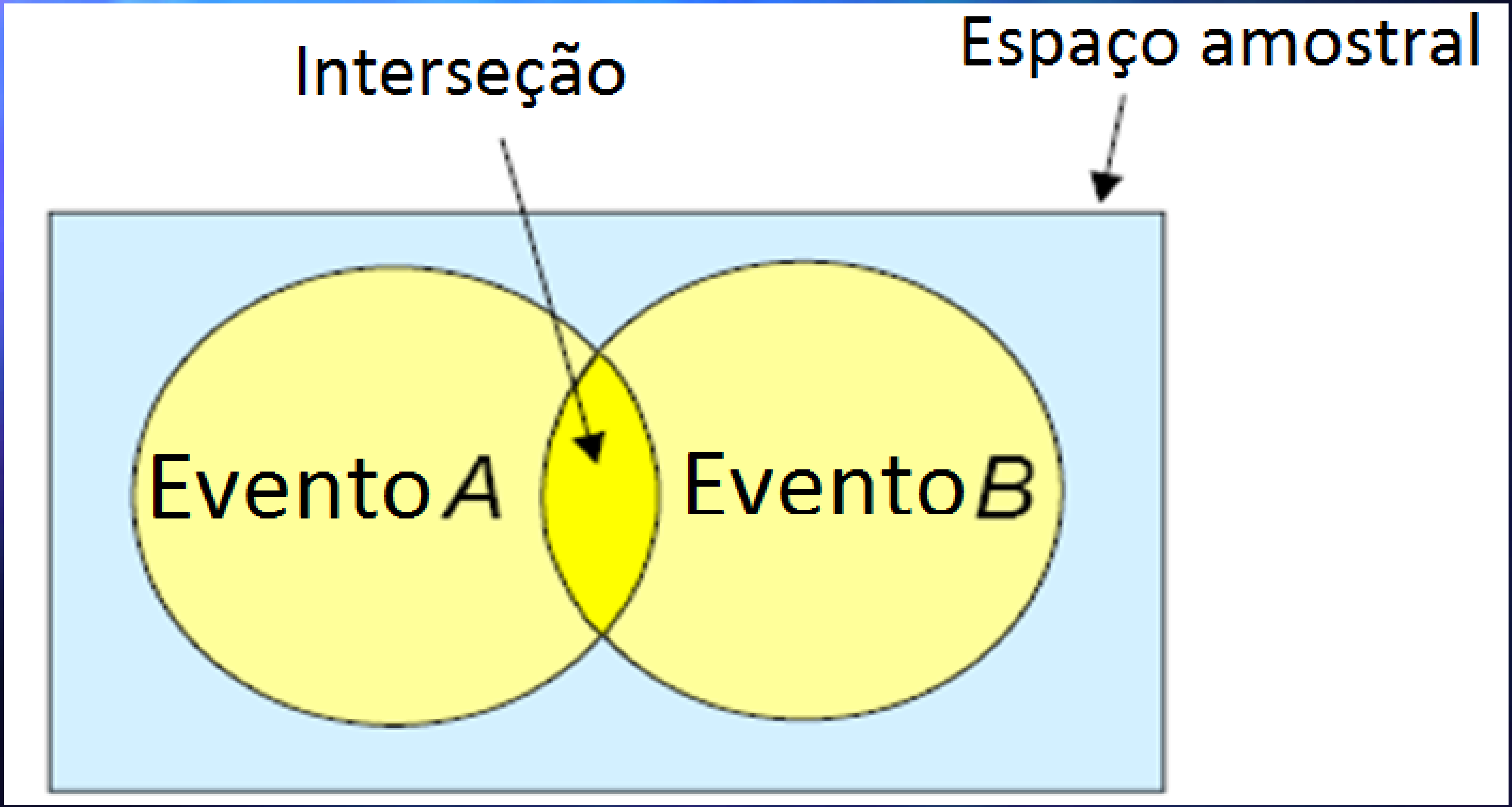
- Ω é o evento universal e o conjunto vazio é presentado por $\emptyset$

$$\Omega \in S$$

$$A \in S \Rightarrow \overline{A} \in S$$

$$A, B \in S \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in S$$

Diagrama de Venn
União e Inteseção de Eventos



Terminologia e Definições

- Ω e E

  - $\overline{E_1} = \Omega - E_1$ - *Complemento*
  - $E_3 = E_1 \cap E_2$, *interseção*
  - $E_4 = E_1 \cup E_5$, *União*

Para n eventos

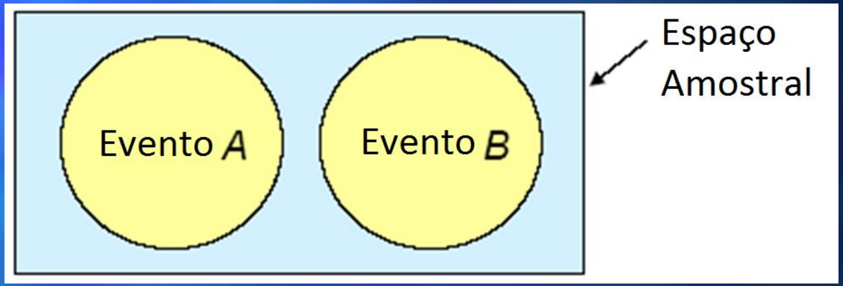
$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_n$$

Álgebra

- Eventos mutuamente exclusivos (disjuntos)
  - Dois eventos são mutuamente exclusivos sse

$$A \cap B = \emptyset$$



  - Um conjunto de *n* eventos (*n>2*) é mutuamente exclusivo sse

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

Probabilidade

- *Probabilidade* é um valor numérico que representa a chance de que um evento ocorra.
- Os valores de uma Probabilidade estão entre 0 e 1.
- A probabilidade próxima de 0 representa grande improbabilidade de ocorrência do evento.
- A probabilidade próxima de 1 denota que a ocorrência do evento é quase certa.

Eventos e suas Probabilidades

- Um evento é uma coleção de pontos amostrais. A probailidade de um evento é a soma das probabilidades do pontos amostrais.
- Se pudermos identificar todos os pontos amostrais (eventos elementares) de um experimento e associar probabilidades a eles, podemos calcular a probabilidade de qualquer evento.

Modelo de Probabilidade

1. Espaço amostral (Ω): um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementar) de um fenômeno aleatório.
2. Conjuto de eventos (S): um conjunto de todos sub-conjuntos de Ω.
3. Probabilidade dos eventos (P): a probabilidade de ocorrência de um evento observável.

PM é a tupla: PM = (Ω, S, P).

Modelo de Probabilidade

Considere um experimento que consiste no acionamento do condicionador de ar, com dois possíveis resultados mutuamente exclusivos: $S - Sucesso \quad F - Defeito\ (Failure)$

Portanto:

$$\Omega = \{S, F\}$$

$$S = \{\{S\}, \{F\}, \{S, F\}, \phi\}$$

$$P(\{S\}) = p$$

$$P(\{F\}) = 1 - p$$

$$P(\{S, F\}) = 1$$

$$P(\phi) = 0$$

Espaço Amostral

- A probabilidade de um evento representa a chance de que o resultado de um experimento resulte na ocorrência do evento.

- Assume-se que os experimentos são aleatório.

- Um experimento aleatório pode ter muito resultados. Cada resultado é um ponto amostral (evento elementar) e tem uma probailidade.

- Um espaço amostral Ω : um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementares) de um fenômeno aleatório.
  - Finito (ex.: execução das ações associadas a opções de um **if**; dois resultados)
  - Countável (ex.: número de vezes que "corpo" de um laço **while** é executado; O espaço amostral por ser finito ou contável infinito.)
  - Contínuo (ex.: tempo de falha de componente)

Axiomas

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω, S, P)
  - Para qualquer evento A, a proabilidade de A é:

1. $1 \geq P(A) \geq 0, \ \forall A \in S$
2. $P(\Omega)=1$
3. Se A e B São disjuntos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Consequências

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω, S, P)

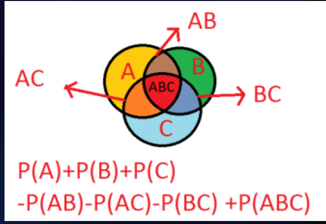
Sejam A e $\overline{A}$ (seu complemento) eventos

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

4. Se A e B são dois eventos que não são mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



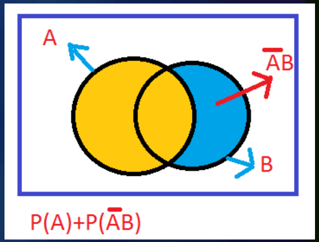
Consequências:

Eventos não mutuamente exclusivos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i>j} P(A_i A_j) + \sum_{i>j>k} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^n P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Princípio da inclusão e exclusão (acima)

Um método muito melhor é:



5. Soma dos Produtos Disjuntos (SDP):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \cdots + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n).$$

Exemplo

Fenômeno aleatório:

Dois resultados de um teste de condição em um **if** *statement*:

if B **then** T;

else E;

$\Omega = \{T, E\}$; Conjunto de resultados

$S = \{\Phi, \{E\}, \{T\}, \{T, E\}\}$; Conjunto de todos os eventos

$P = \{0, ½, ½, 1\}$; probabilidade atribuídas

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Variáveis Aleatórias é uma função que confere um número real a cada resultado (do espaço amostral) de um experimento aleatório.

- Variável Aleatória é uma função que reflete o resultado de um experimento aleatório. $X: \omega \rightarrow \Re$.
$\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ $x \in \Re$.

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Variáveis aleatórias contínuas assumem quaisquer valores no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$
- Variáveis aleatórias discretas assumem apenas valores discretos.

Variáveis Aleátórias
Resumo

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Variáveis Aleatórias
Resumo

- *Probability mass function (pmf)* – Seja Ω um espaço amostral discreto. $p(x)$, que denota uma pmf de uma variável aleatória X, é definida por $p(x) = P[X=x]$, onde x assume valores de Ω.

Variáveis Aleatórias
Resumo

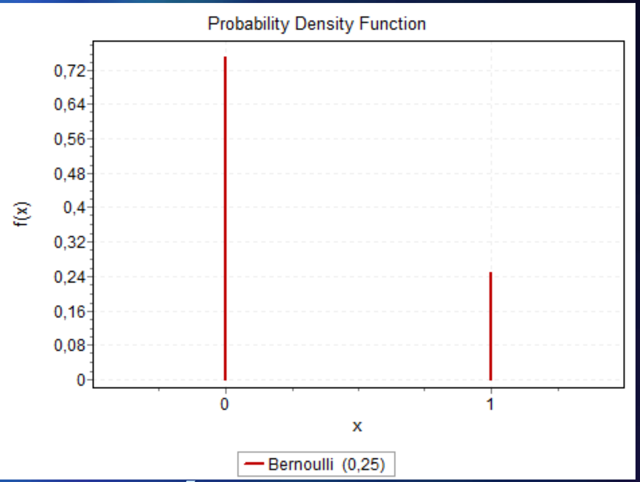
- Função de Distribuição de Probabilidade Acumulativa (CDF) de uma variável aleatória X, denotada por F(X), é definida por $F(X) = P[X \leq x]\ \forall\ x \in \Re$

- F(X) é uma função monotônica não-decrescente tal que $0 \leq F(X) \leq 1$, onde $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$
- $F(X) = \sum_{y \leq x} p(y) \Rightarrow F(\infty) = \sum_{\forall y} p(y) = 1$

Variáveis Aleatórias
Resumo

Mathematica

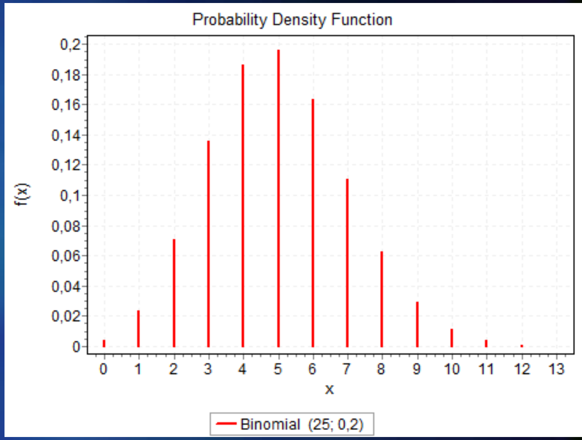
- Discreta
  - Bernoulli



    - Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis ($X=0, X=1$).
    - pmf(*probability mass function*) de X é dada por: $P(X=0) = 1\text{-}p$ e $P(X=1) = p$, $0 \leq p \leq 1$

Variáveis Aleatórias Resumo

Mathematica



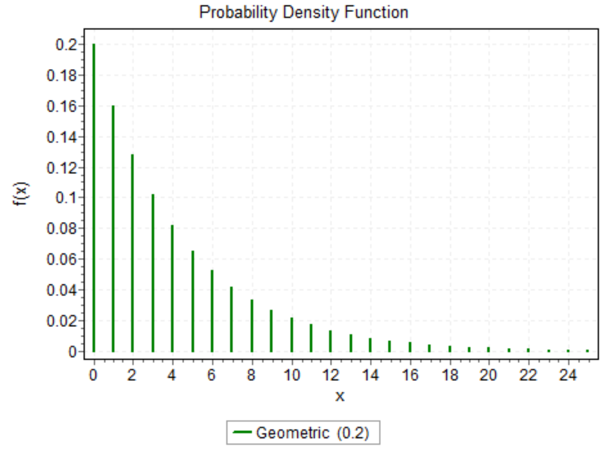
Discreta

- Binomial
  - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se tem resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$.

Ver slides de medição

Variáveis Aleatórias Resumo

Mathematica



- Discreta
  - Geométrica
    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se realiza o experimento para se ter o primeiro resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = p\,(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Discreta
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\overline{X} = E[X] = \sum_{\forall k} k \,.\, P(X=k)$
  - Uma função de uma variável aleatória (Y=f(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[f(X)] = \sum_{\forall k} f(k) \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Discreta
  - n-ésimo momento (em torno da origem) de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência de X
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \Sigma_{\forall k}\, k^n \,.\, P(X=k)$
  - n-ésimo momento central de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência da diferença entre X e o valor esperado de X ($E(X) = \overline{X}$)
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \Sigma_{\forall k}\, (k-\overline{X})^n \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Discreta
  - O primeiro momento é o valor esperado.
  - O primeiro momento central é 0
  - O segundo momento central (variância)
    - $var(X)=\sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \sum_{\forall k} (k-\overline{X})^2 \,.\, P(X=k)$
  - O coeficiente de variação é a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - Dada uma variável aleatória X, a função geratriz de momento $M_X(t)$ de sua distribuição de probabilidade é o valor esperado de e^{tX}.
  - $M_X(t)=E[e^{tX}]$
  - $=\sum_i e^{tx_i} p_X(x_i)$ X discreta.
  - $=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$ X contínua.

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - $e^{tX} = 1 + tX + t^2X^2/2! + \ldots + t^rX^r/r! + \ldots$

f(t) = $e^{(-a\,t)}$

$$= 1 - a\cdot t + \frac{a^2\cdot t^2}{2} - \frac{a^3\cdot t^3}{6} + \frac{a^4\cdot t^4}{24} - \frac{a^5\cdot t^5}{120} + \frac{a^6\cdot t^6}{720} - \frac{a^7\cdot t^7}{5040} + \frac{a^8\cdot t^8}{40320} - \frac{a^9\cdot t^9}{362880} + \ldots$$

Para a=2, tem-se:

$$= 1 - 2\cdot t + 2\cdot t^2 - \frac{4\cdot t^3}{3} + \frac{2\cdot t^4}{3} - \frac{4\cdot t^5}{15} + \frac{4\cdot t^6}{45} - \frac{8\cdot t^7}{315} + \frac{2\cdot t^8}{315} - \frac{4\cdot t^9}{2835} + \ldots$$

  - Tomando a esperança:
  - $E[e^{tX}] = 1 + E[X]\,t + E[X^2]\ \ t^2/2! + E[X^r]\,t^r/r! + \ldots$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Procedimento para obtenção dos momentos
  - *Determine* $M_X(t)$ *analiticamente para uma uma distribuição particular*
  - *Ache* $E[X^r] = d^r/dt^r \, M_X(t)|_{t=0}$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado = p,
    - Variância= p(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/p
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = q + pe^t$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Binomial
    - Parâmetros: n,p;
    - Valor Esperado= np,
    - Variância= np(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/np
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = (q + pe^{t})^{n}$$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado= 1/p,
    - Variância= $(1-p)/p^2$,
    - Coeficiente de variação= (1-p)
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = pe^t/(1-qe^t)$$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Contínua
  - Uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a,b \leq +\infty$, é denominada Variável Aleatória Contínua.
  - *Cumulative Distribution Function* (CDF)

$F_X(x) = P(X \leq x)$

  - Se $x < y$ então: $F_X(x) < F_X(y)$
  - $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Contínua
  - *Cumulative Distribution Function* (CDF)

  $F_X(x) = P(X \leq x)$

    - Se x < y então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Contínua
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) \,/\, dx$
    - Como $F_X(x)$ não é decrescente, então $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$
    - $P(x1 \leq X \leq x2) = \int_{x1}^{x2} f_X(x)\, dx$
    - $P(X=x) = \int_{x}^{x} f_X(x)\, dx = 0$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Contínua
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, f_X(x)\, dx$
  - Uma função de uma variável aleatória (g(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \,.\, f_X(x)\, dx$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Contínua
  - n-ésimo momento
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx$
  - n-ésimo momento central
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^n \cdot f_X(x)\, dx$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - O segundo momento central (variância)
    - $\sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^2 \cdot f_X(x)\, dx$
  - O coeficiente de variação e a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

Variáveis Aleátórias
Resumo

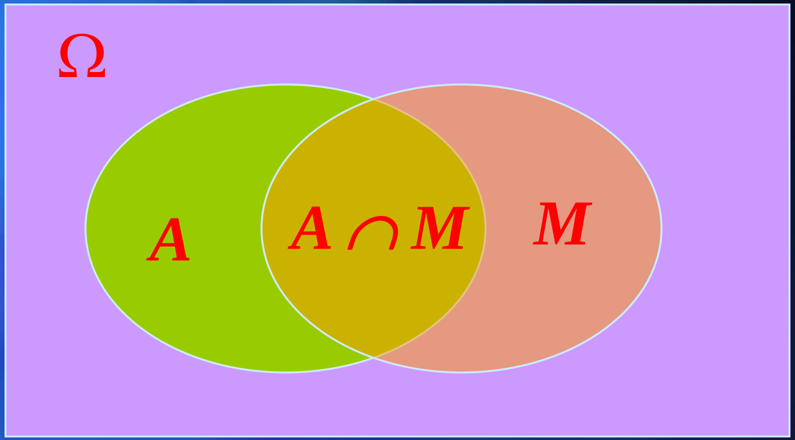
- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória

- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana

  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Probabilidade Condicional

- Seja A um evento arbitrário em um espaço amostral Ω. A probabilidade de que ocorra um evento A uma vez que M tenha ocorrido é denotado por $P(A/M)$ que é definido por:
- $P(A/M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)}$



- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$
- Caso $A \subset M$ então

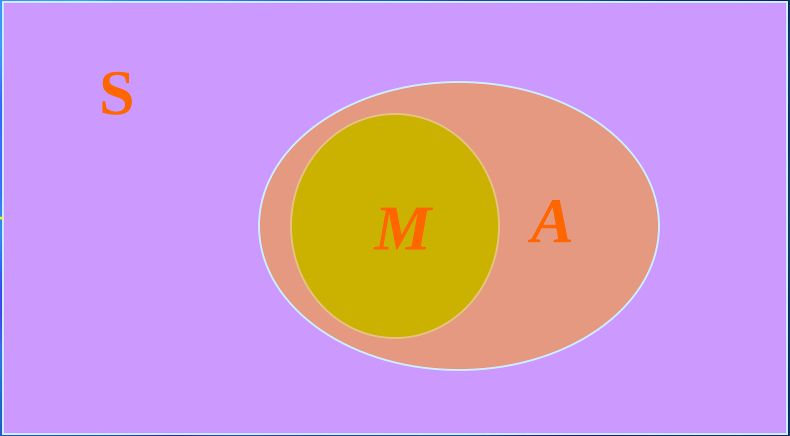
$$P(A/M) = \frac{P(A)}{P(M)}$$

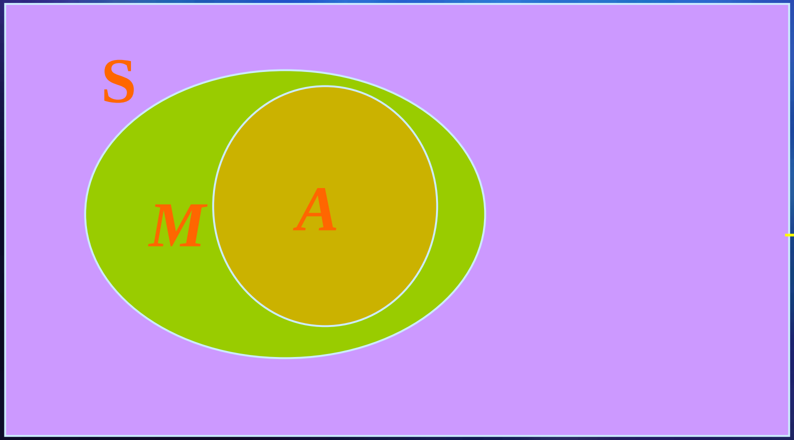
$P(A/M)$ é indefinida se $P(M)=0$

Probabilidade Condicional

- Caso $M \subset A$ então

  $P(A/M) = 1$





- Caso $A \subset M$ então

  $$P(A/M) = \frac{P(A)}{P(M)}$$

Distribuição Exponencial

- Arises commonly in reliability & queuing theory.
- A non-negative continuous random variable.
- It exhibits memoryless property (continuous counterpart of geometric distribution).
- Related to (discrete) Poisson distribution

Distribuição Exponencial

- Esse modelo é comumente usado:
  - Tempo de chegada entre pacotes IP (ou entre chamadas de voz)
  - Tempo de serviço de um servidor de arquivo, web, db
  - Tempo de falhas, tempo de reparo, de reboot etc.
- Se a distribuição exponencial não é apropriada, uma outra deve ser adequadamente escolhida.

Distribuição Exponencial

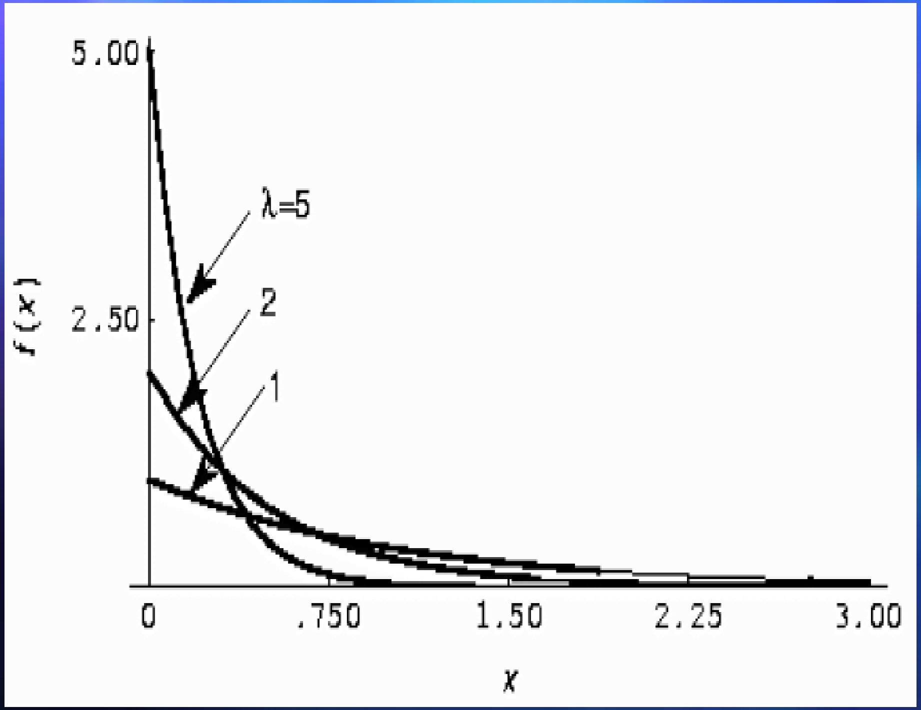
- Por exemplo, distribuiçãoWeibull é comumente usada para representar tempos de falha.
- A distribuição Lognormal é muito usada para representar tempos de reparo.
- *Markov modulated Poisson processes* são muito usados para representar chegada de pacotes IP que não obdece tempo entre chegada exponencialmente distribuído.

Mathematica

Distribuição Exponencial

Variável Aleatória Exponencial

- fdp exponencial



- $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \; 0 \leq t < \infty$
- $CDF(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \leq t < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- Valor Esperado

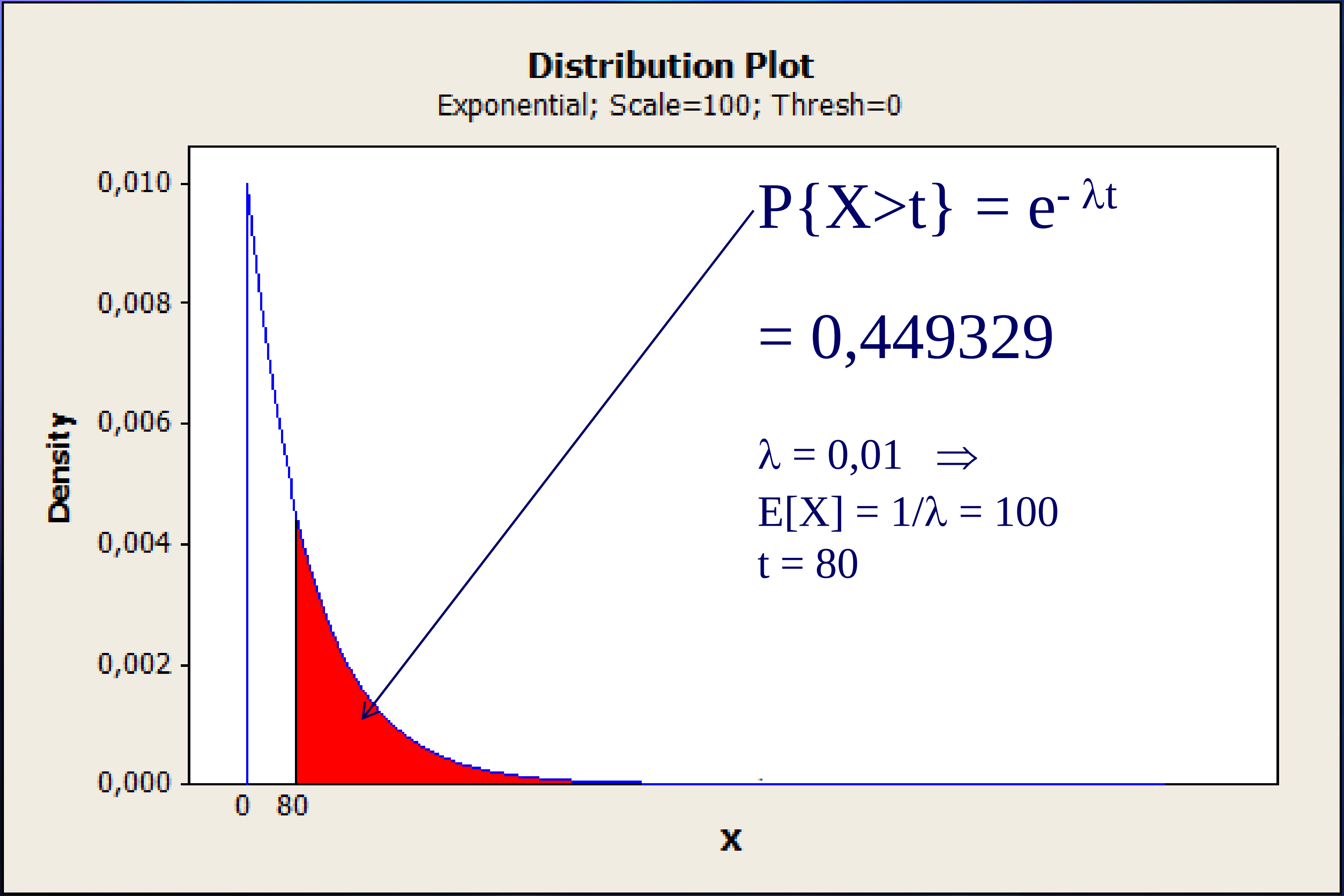
  $E(X) = 1/\lambda$
- Variância: $var(X) = 1/\lambda^2$
- Propriedade:

  Não possui memória

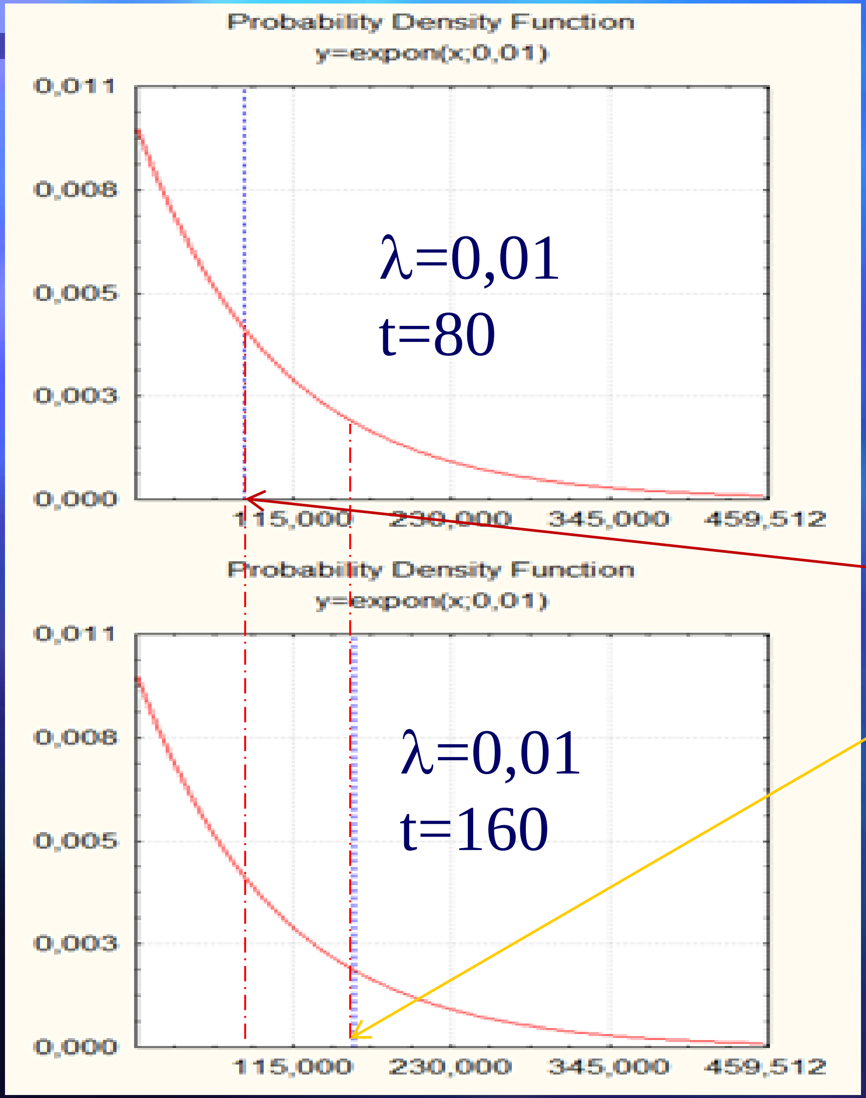
Distribuição Exponencial

Exponential

Mathematica



Distribuição Exponencial



$$P\{X>t\} = e^{-\lambda t}$$

Probabilidade Condicional

Distribuição Exponencial

Um exemplo:

$P\{X>80\} = e^{-0,01\times 80} = 0,449329$

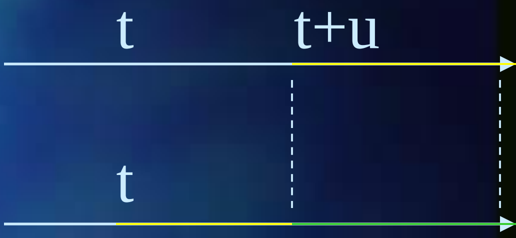
- $P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{P\{X>(80+80) \wedge X>80\}}{P\{X>80\}}$
- $P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{P\{X>160\}}{P\{X>80\}}$

Probabilidade Condicional

$$P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \frac{e^{-0,01\times(80+80)}}{e^{-0,01\times 80}} = e^{-0,01\times 80} = 0,449329$$

$$\boxed{P\{X>160 \mid X>80\} = P\{X>80\} = 0,449329}$$

Distribuição Exponencial



Variável Aleatória Exponencial

$$\boxed{P\{X>t\} = e^{-\lambda t}}$$

- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u \wedge X>t\}}{P\{X>t\}}$

Probabilidade Condicional

- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u\}}{P\{X>t\}}$

$$P\{X>t+u \mid X > t\} = \frac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda t}} = \boxed{e^{-\lambda u} = P\{X>u\}}$$

Distribuição Exponencial

- Contínua

  - Exponencial
    - Parâmentro: λ,
    - Valor Esperado: $1/ \lambda$,
    - Variância: $1/\lambda^2$,
    - Coeficiente de variação: 1
    - Função geratriz de momentos

$$M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-1}$$

Distribuição Exponencial

- Matematicamente (CDF e pdf são):

$$\text{CDF: } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{if } 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where λ is a paramter and the base of natural logarithm, $e = 2.7182818284$

$$\text{pdf: } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Também

$$P(X > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = e^{-\lambda t}$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
$$= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Distribuição Exponencial

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,$$

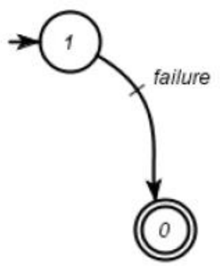
$$h(t) = \lambda,$$

$$E[T] = MTTF = \frac{1}{\lambda},$$

$$Var[T] = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Distribuição Exponencial

$$X_S(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } S \text{ has failed} \\ 1, & \text{if } S \text{ is operational} \end{cases}$$



States of $X_S(t)$

The memoryless property can be demonstrated with conditional reliability:

$$R(x \mid t) = \Pr(T > x + t \mid T > t) = \frac{\Pr(T > x + t)}{\Pr(T > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = R(x), \qquad x \geq 0.$$

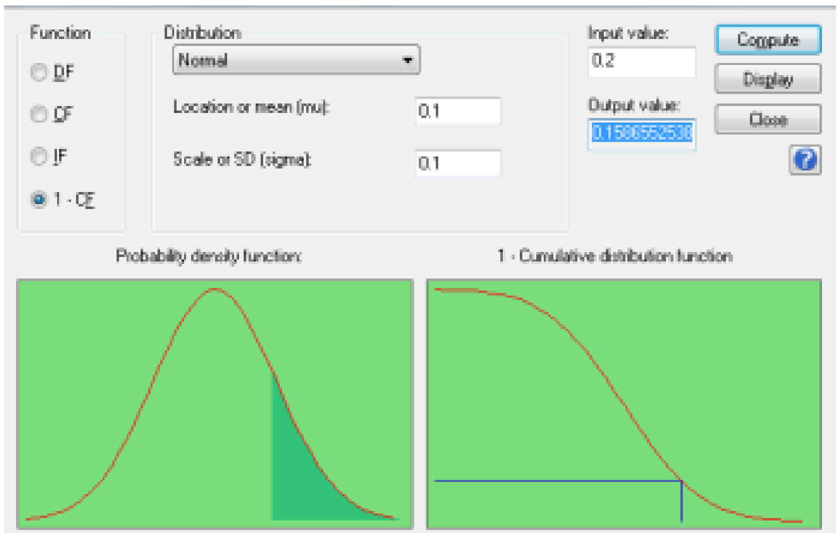
Distribuição Exponencial

Exemplo

NormalDistribution $\mu = 0.1, \sigma = 0.1$

R(0.1)=0.5

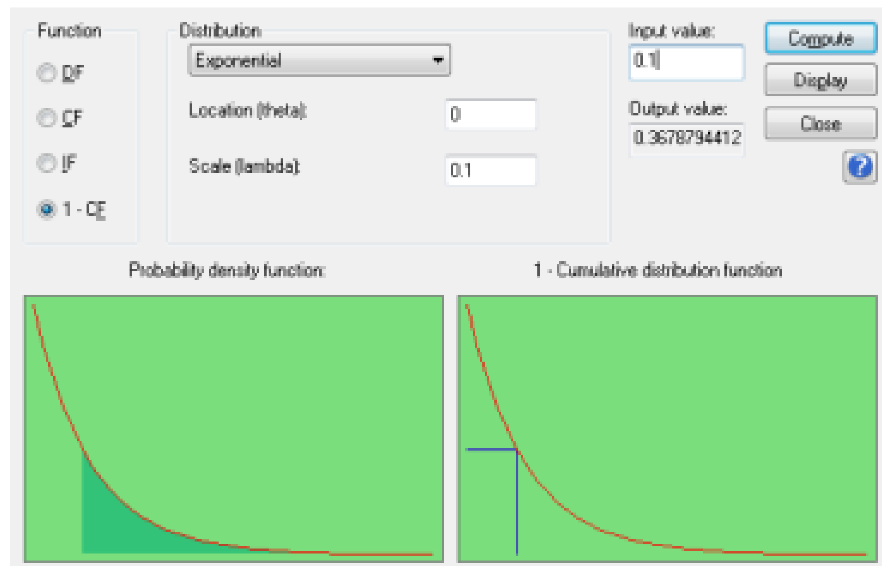
R(0.2)=0.158655 R(0.2|0.1)=0.317311



ExponentialDistribution $\lambda = 10 \Rightarrow E[X] = 0.1$

R(0.1)=0.367879

R(0.2)=0.135335 R(0.2|0.1)=0.36788



Distribuição Hiperexponencial

Mathematica

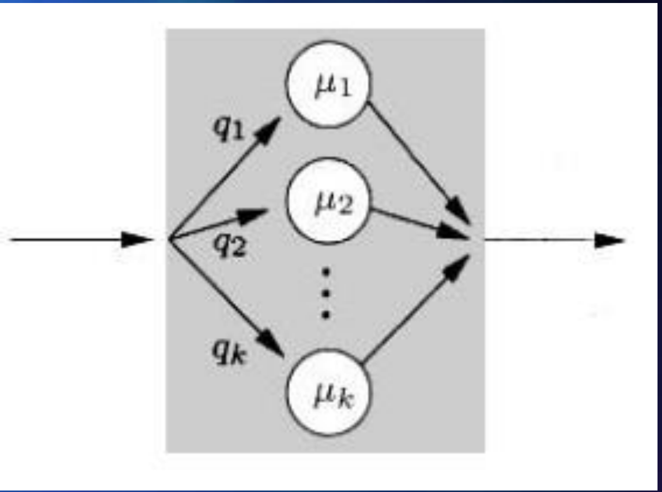
PE

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^{k} q_j (1 - e^{-\mu_j x}), \qquad x \geq 0.$$

$$\text{pdf:} \quad f_X(x) = \sum_{j=1} q_j \mu_j \, e^{-\mu_j x}, \quad x > 0,$$

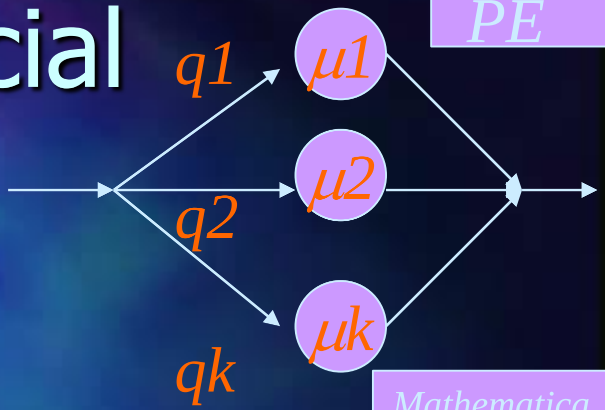
$$\text{mean:} \quad \overline{X} = \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j} = \frac{1}{\mu}, \quad x > 0,$$

$$\text{variance:} \quad \mathrm{var}(X) = 2 \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j^2} - \frac{1}{\mu^2},$$



$$c_X = \sqrt{2\mu^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j^2} - 1} \quad \geq 1$$

Distribuição Hiperexponencial



PE

Mathematica

Hiperexponencial

- Parâmentros: k, μ_j, q_j;
- Valor Esperado:

$$E(X)=\overline{X}=\sum_{j=1}^{k} q_j/\mu_j$$

$$F_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j(1-e^{-\mu_j t})\ ,\ t\geq 0$$

$$f_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j\mu_j e^{-\mu_j t},\ t\geq 0$$

- Coeficiente de variação: $\mathrm{sqrt}(2\times(1/\overline{X})^2\times\Sigma_{j=1}q_j/\mu_j^2\ -\ 1)\geq 1$
- Variância: $2\ \sum_{j=1}^{k} q_j/\mu_j^2\ -\ \overline{X}^2$

Distribuição Hiperexponencial

PE

Hiperexponencial

- Uma distribuição desconhecida de $\bar{X}$ e $c \geq 1$ pode ser aproximada por uma

Mathematica

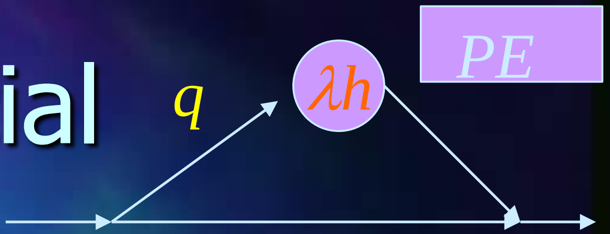
  - Parâmentros:k=2, μ_1, μ_2,q_1, q_2

$\mu_1 = 1/\bar{X} \,.\, (1 - \mathrm{sqrt}(q_2/q_1 \,.\, (c^2 - 1)/2))^{-1}$

$\mu_2 = 1/\bar{X} \,.\, (1 + \mathrm{sqrt}(q_1/q_2 \,.\, (c^2 - 1)/2))^{-1}$

$q_1 + q_2 = 1$, q_1, $q_2 \geq 0$ μ_1, $\mu_2 > 0$

Distribuição Hiperexponencial



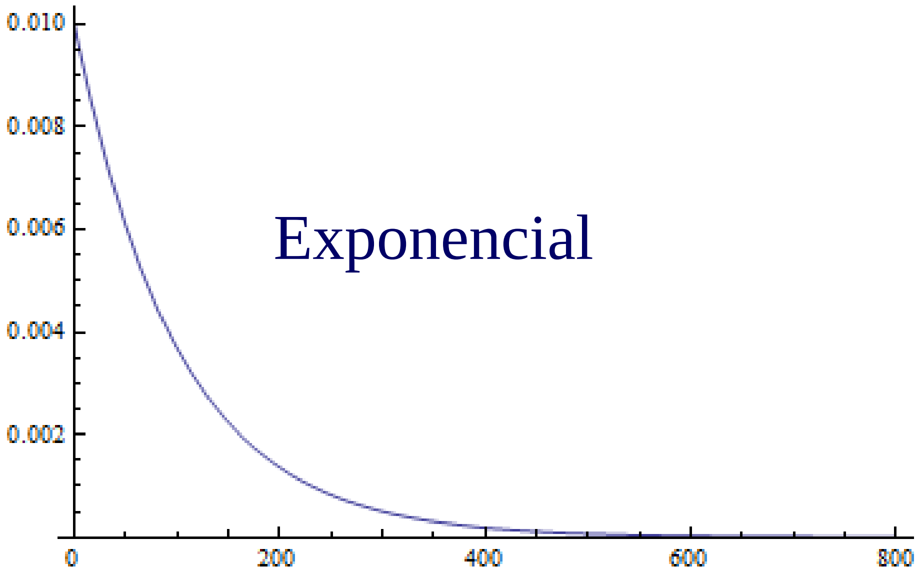
Mathematica

$\lambda = 0.01$

$f1[x\_] := \lambda \times e^{-\lambda \times x}$

$m = \int_0^{\infty} t \times f1[t]\, dt = 100$

$sd = \sqrt{\left(\int_0^{\infty} t^2 \times f1[t]\, dt - m^2\right)} = 100$



Hiperexponencial

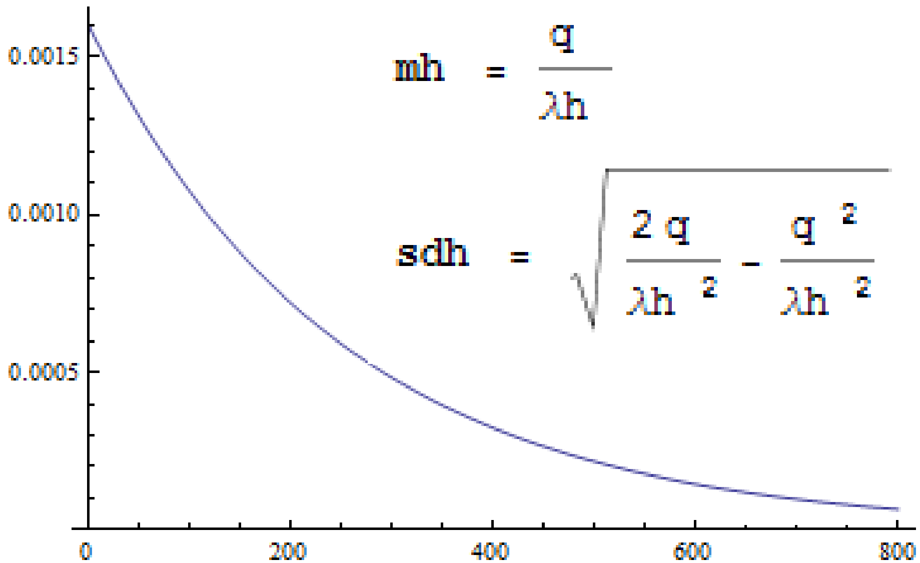
$\lambda h = 0.004$

$q = 0.4$

$fh[x\_] := q \times \lambda h \times e^{-\lambda h \times x}$

$mh = \int_0^{\infty} t \times fh[t]\, dt = 100$

$sdh = \sqrt{\left(\int_0^{\infty} t^2 \times fh[t]\, dt - mh^2\right)} = 200$



$$mh = \frac{q}{\lambda h}$$

$$sdh = \sqrt{\frac{2\,q}{\lambda h^{2}} - \frac{q^{2}}{\lambda h^{2}}}$$

Distribuição Erlang

- Erlang-k

$$F_X(x)=1-e^{-k\mu t}\sum_{j=0}^{k-1}(k\mu t)^j/j!,\ t\geq 0$$

$$f_X(x)= [(k\mu(k\mu t)^{k-1})/(k-1)!]e^{-k\mu t},\ t\geq 0,\ k=1.2,\ldots$$

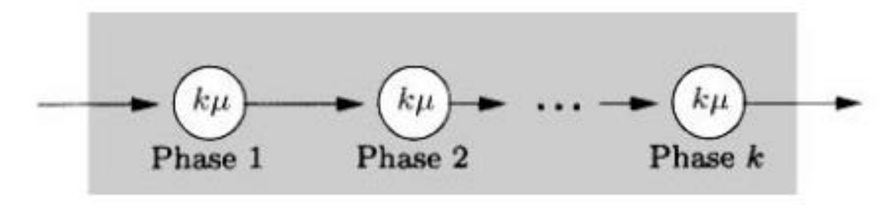
- Parâmentros:k, μ;
- Valor Esperado: k/μ
- Variância: k/μ^2
- Coeficiente de variação: $1/\mathrm{sqrt}(k) \leq 1$
- Função geratriz de momentos

$$M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-k}$$

Distribuição Erlang

PE

$$F_X(x) = 1 - e^{-k\mu x} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k\mu x)^j}{j!}, \quad x \geq 0, \; k = 1, 2 \ldots .$$



$$\text{pdf:} \quad f_X(x) = \frac{k\mu(k\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x}, \; x > 0, \; k = 1, 2, \ldots,$$

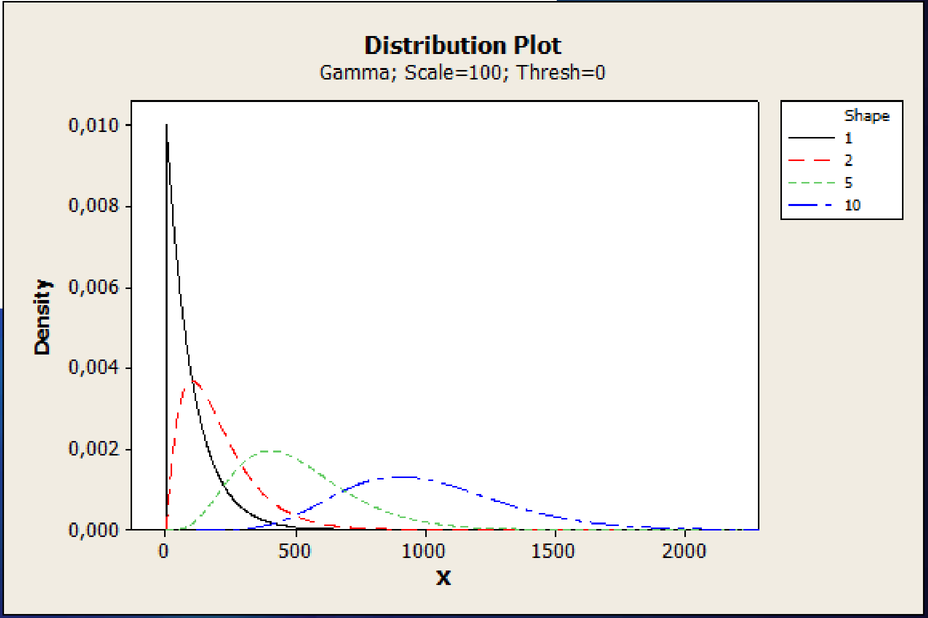
$$\text{mean:} \quad \overline{X} = \frac{1}{\mu},$$

$$\text{variance:} \quad \text{var}(X) = \frac{1}{k\mu^2},$$

$$\text{coefficient of variation:} \quad c_X = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

$$\mu = \frac{1}{c_X^2 k \overline{X}}.$$



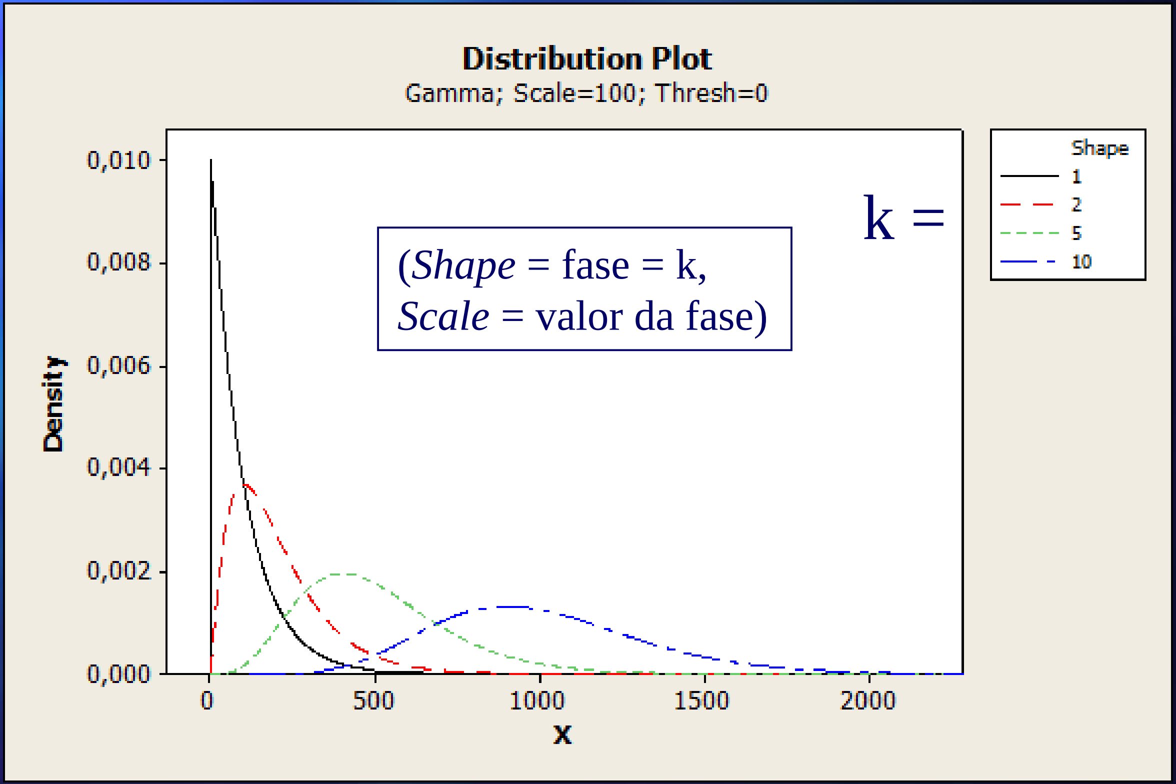
Mathematica

PE

Distribuição Erlang

Erlang-K

- Uma distribuição desconhecida de $\bar{X}$ e $c \leq 1$ pode ser aproximada por uma
  - $k=[1/c^2]$
  - $\mu=1/(c^2 k\bar{X})$

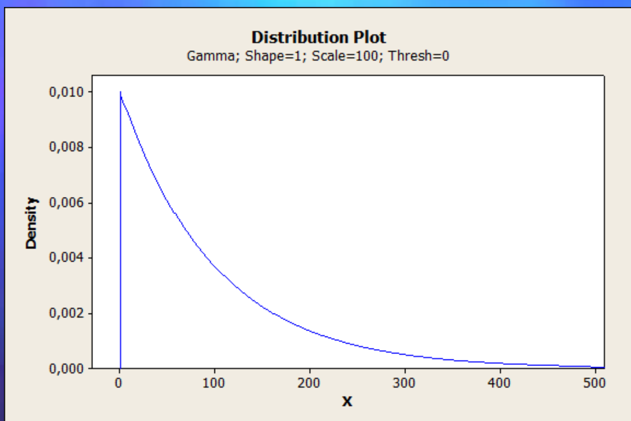


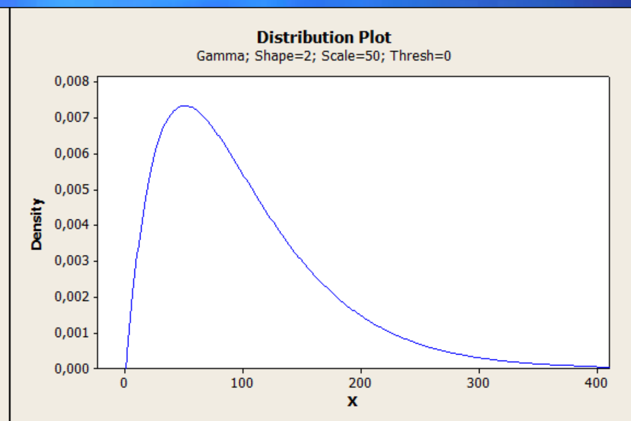
Mathematica

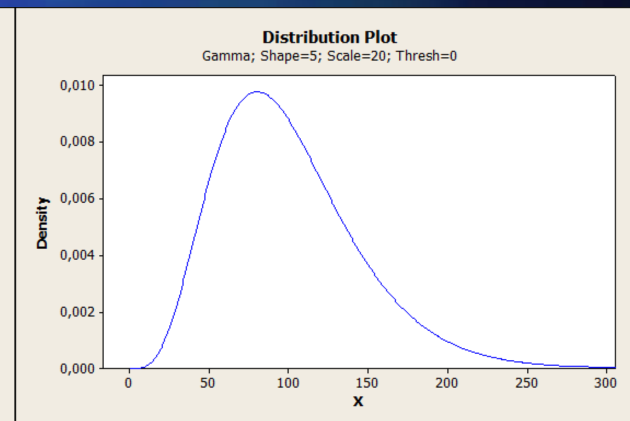
Distribuição Erlang

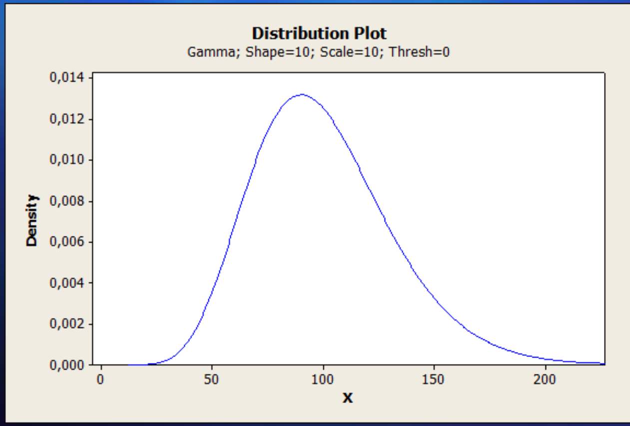
PE

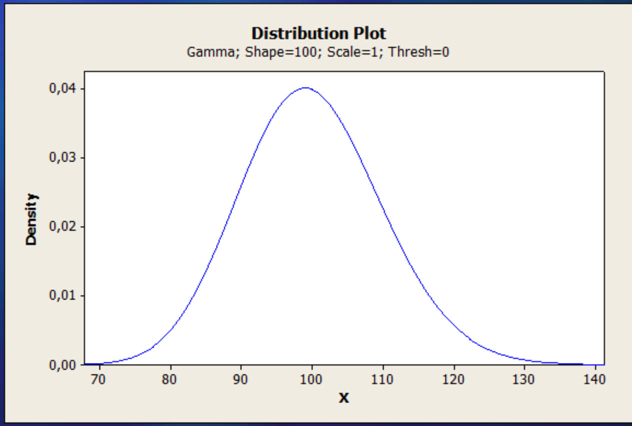
- Erlang-K (*Shape* = fase, *Scale* = valor da fase)











Distribuição Hipo-exponencial

PE

A distribuição **hipo-exponencial** é uma generalização da distribuição de **Erlang** quando se admite fases com taxas diferentes.

$$\text{pdf:} \quad f_X(x) = \sum_{i=1} a_i \mu_i \, e^{-\mu_i x}, \quad x > 0,$$

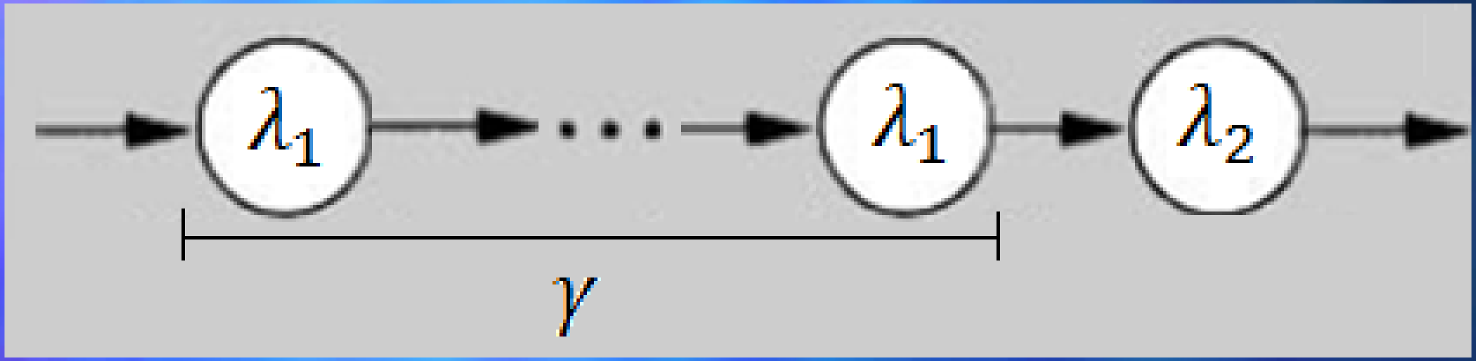
$$\text{with } a_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\mu_j}{\mu_j - \mu_i}, \quad 1 \le i \le k,$$

$$\text{mean:} \quad \overline{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_i},$$

$$\text{coefficient of variation:} \quad c_X = \left(1 + 2 \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\mu_i \sum_{j=i+1}^{k} \mu_j \right)}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Distribuição Hipo-exponencial

PE



- Se $\mu_D/\sigma_D > 1$ e $\mu_D/\sigma_D \notin Z$
- $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$

$\lambda_1 = 1/d_1,\quad d_1 = \mu_D \pm \sqrt{(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D{}^2 - \gamma\mu_D{}^2)/(\gamma+1)}$

$\lambda_2 = 1/d_2,\quad d_2 = \gamma\mu_D \pm \sqrt{(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D{}^2 - \gamma\mu_D{}^2)/(\gamma+1)}$

Distribuição Hipo-exponencial

PE

A distribuição hipo-exponencial é uma generalização da distribuição de Erlang quando se admite fases com taxas diferentes.

– Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com duas fases $\mu_1 \neq \mu_2$, tem-se:

- $F_X(x)=1- [\mu_2 /(\mu_2- \mu_1)e^{-k\mu_1 t}] + [\mu_1 /(\mu_2- \mu_1)e^{-k\mu_2 t}]$, $t \geq 0$
- $f_X(x)= [(\mu_1 \mu_2)/(\mu_1 - \mu_2)] (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t})$, $t \geq 0$

Distribuição Hipo-exponencial

PE

- Hipo-exponencial
  - Parâmentros: $\mu_1, \mu_2,$
  - Valor Esperado: $1/\mu_1 + 1/\mu_2$
  - Variância: $1/\mu^2{}_1 + 1/\mu^2{}_2$

  - Coeficiente de variação: $[\mathrm{sqrt}(\mu^2{}_1 + \mu^2{}_2)/(\mu_1 + \mu_2)] < 1$

Distribuição Hipo-exponencial

PE

- Contínua
- Uma distribuição desconhecida de $\bar{X}$ como valor esperado e $0.5 \leq c^2 < 1$ pode ser aproximada por uma
  - Hipo-exponencial

    $\mu_1 = (2/\bar{X})\ \{1+\text{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

    $\mu_2 = (2/\bar{X})\ \{1-\text{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

Distribuição Hipo-exponencial

PE

- Contínua
  - Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com k fases e taxas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ tem-se:

$$f_X(x)= \sum_{j=1}^{k} a_i \mu_i e_1{}^{\lambda_i t} \;, \quad t \geq 0$$

$$a_i= \prod_{j=1, j\neq i}^{k} [\mu_j/(\mu_j-\mu_i)] \;, \quad 1 \leq i \leq k$$

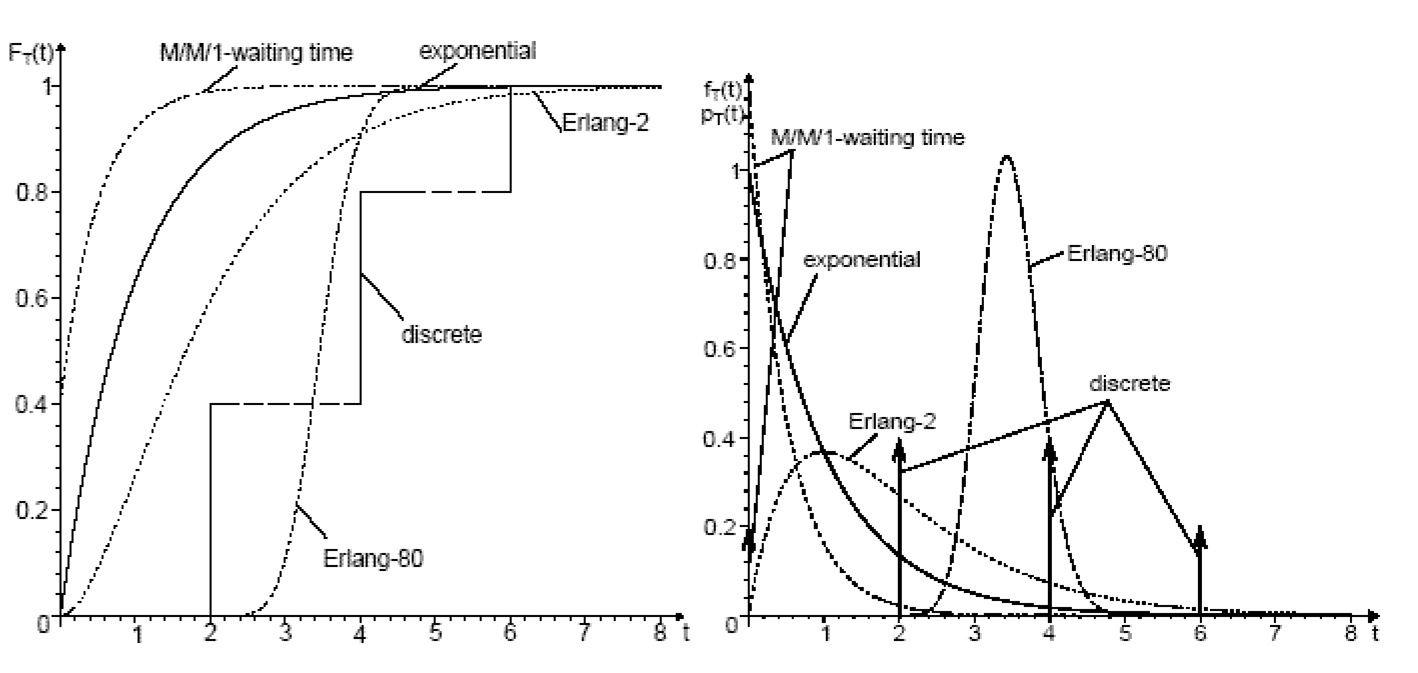
$$\text{Valor Médio} = \sum_{j=1}^{k} 1/\mu_i$$

Variáveis Aleatórias Resumo

PE

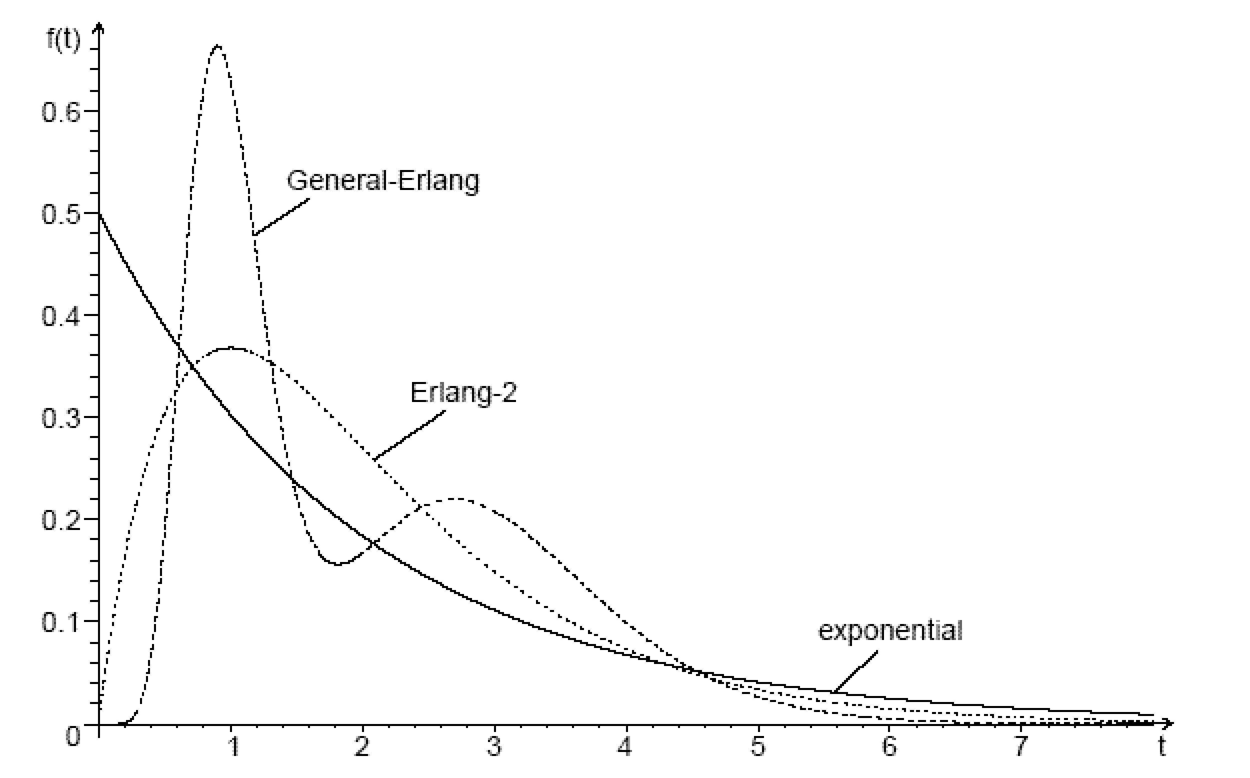
Exp

Erl



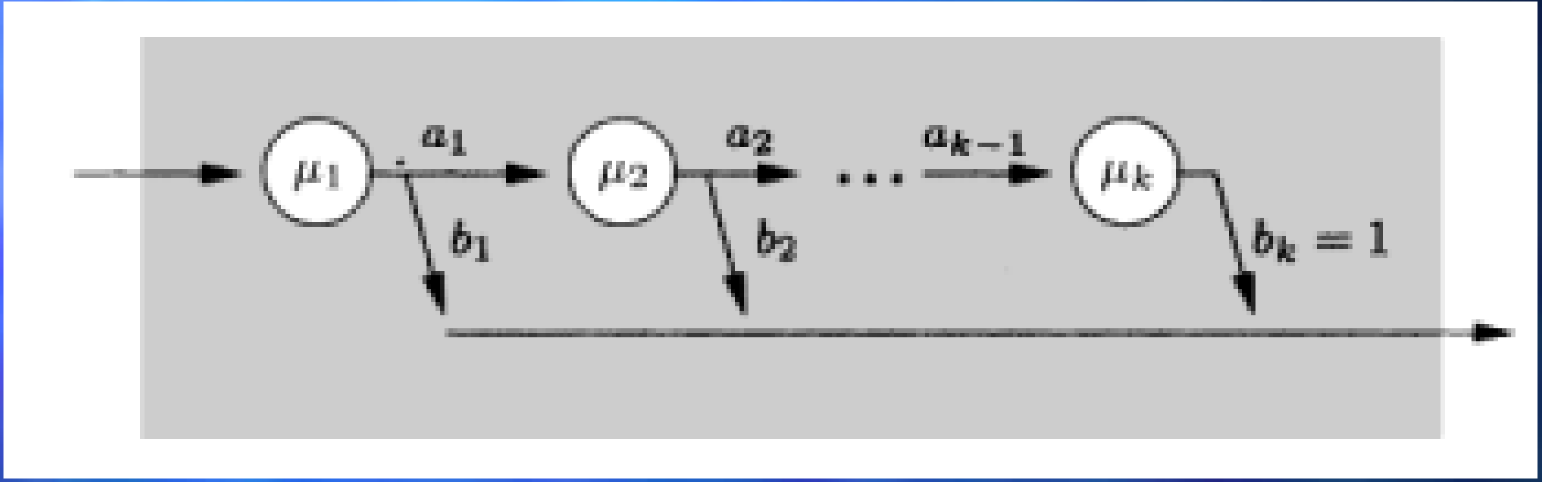
Variáveis Aleatórias
Resumo

PE



Distribuição Cox

PE



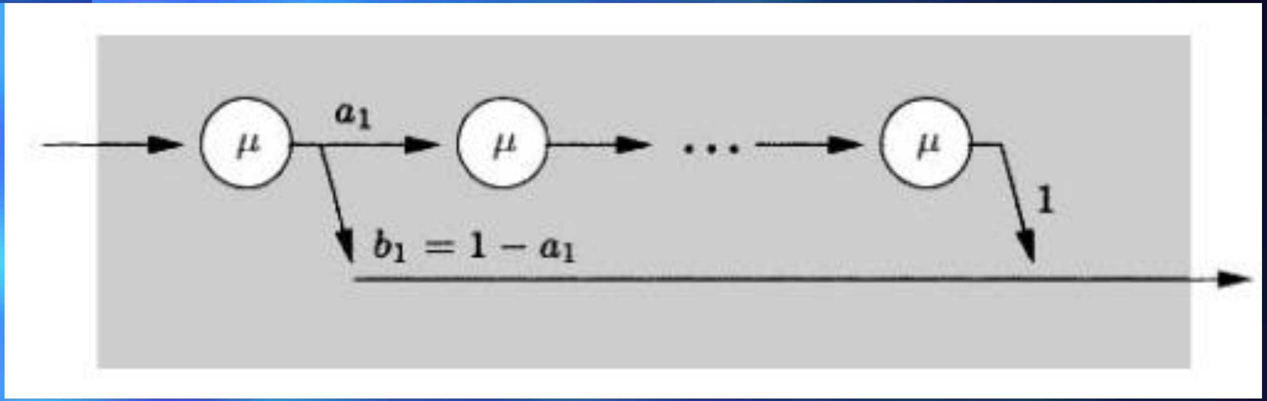
The model consists of k phases in series with exponentially distributed times and rates $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. After phase j, another phase $j+1$ follows with probability a_j and with probability $b_j = 1 - a_j$ the total time span is completed.

Distribuição Cox

PE

Case 1: $c_X \leq 1$

$$\mu_j = \mu \quad j = 1, \ldots, k\,,$$
$$a_j = 1 \quad j = 2, \ldots, k-1$$



$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu}\,,$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k) + k - 2)}{\mu^2}\,,$$

$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k) + k - 2)}{[b_1 + k(1-b_1)]^2}\,.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

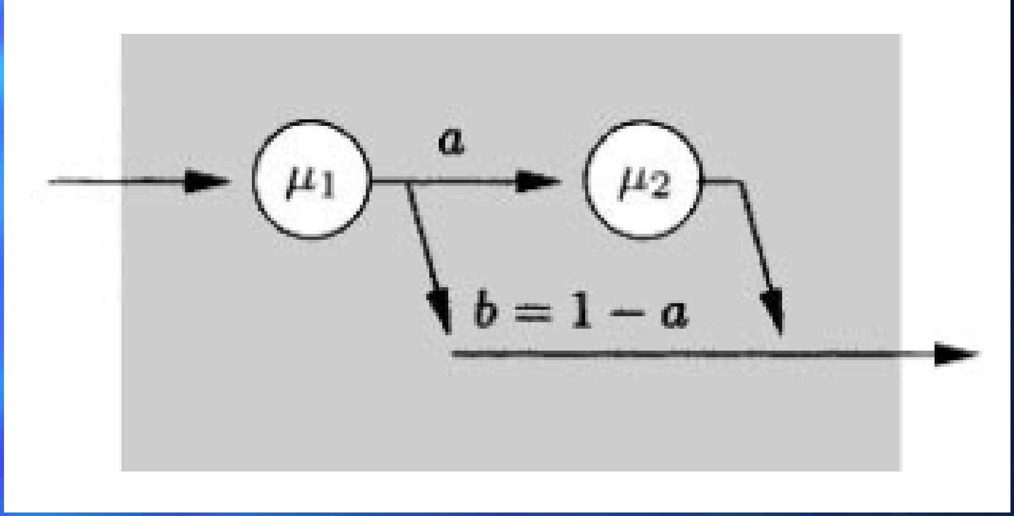
$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2 + 4 - 4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)}\,,$$

$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k-1)}{\overline{X}}\,.$$

Distribuição Cox

PE

Case 2: $c_X > 1$



$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}}$$

$$a = \frac{1}{2c_X^2}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X}c_X^2}$$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Uma função de uma variável aleatória ($Y=f(X)$) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[f(X)] = \sum_{\forall k} f(k) \, . \, P(X=k)$
- Uma função de uma variável aleatória ($Y= g(X)$) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, . \, f_X(x) \, dx$

Função densidade de Probabilidade de X

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Se $f(X) = X$
  - Valor Esperado
    - $E[f(X)] = E(X) = \mu$
  - Variância
    - $Var[f(X)]=E([f(X) - E(f(X))]^2]$

$=E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$ (Variância de X)

$=Var(X) = \sigma^2$

Variáveis Aleatórias Resumo

1. Se f(X) = aX + b

– Valor Esperado

- $E[f(X)] = aE(X) + b$

– Variância

- $Var[f(X)] = a^2 Var(X)$
- Prova: $\operatorname{Var}(aX+b) = a^2 \operatorname{Var}(X).$

Por definição $\operatorname{Var}(aX+b) = E\left[(aX+b) - E(aX+b)\right]^2$

$$= E\left[aX + b - (aE(X) + b)\right]^2$$

$$= E\left(aX - aE(X)\right)^2$$

$$= E\left(a^2 (X - E(X))^2\right) = a^2 E(X - E(X))^2 = a^2 \operatorname{Var}(X).$$

Variáveis Aleatórias
Resumo

2. Se $f(X) = b$
   - Valor Esperado
     - $E(b) = b$
   - Variância
     - $Var(b) = 0$

Variáveis Aleatórias
Resumo

– Exemplo

Suponha que X seja uma variável aleatória tal que $E(X) = 3$ e $Var(X) = 5$. Além disto, seja $Y(X) = 2X - 7$.

Portanto:

$$E(Y(X)) = [2 \times E(X)] - 7 = -1$$

$$Var(Y(X)) = 2^2 \times Var(X) = 20$$

Variáveis Aleatórias
Resumo

Quando $Y=f(X)$ é muito complicada, os cálculos de $E(f(X))$ e $Var(f(X))$ podem ser difíceis. Pode-se obter aproximações de $E(f(X))$ e $Var(f(X))$ expandindo-se $Y=f(X)$ (série de Taylor) até três termos (para a média).

$$Y = f(E(X)) + [(X - E(X)) \times f'(E(X))] + [(1/2)\times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + \underset{\boxed{\textit{Resto da expansão}}}{R}$$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- $Y = f(E(X)) + (X - E(X))\, f'(E(X)) + [(1/2) \times [(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + R$. Portanto:
- $E(f(X)) = E[f(E(X))] + \underbrace{E[(X - E(X))\, f'(E(X))]}_{= 0} +$

$E[(1/2) \times [(X - E(X))^2] \times f''(E(X))\,] + E(R) =$

$E[f(E(X))] + E[(1/2)] \times E[f''(E(X))] \times E[(X - E(X))^2] + E(R) =$

$f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) + E(R)$

$\cong f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) \Rightarrow$

$$\boxed{E(f(X)) \cong f(E(X)) + [\,(1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X)\,]}$$

Variáveis Aleatórias Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

- Seja X uma variável aleatória com $E[X]$ e $Var(X)$. Suponha que $Y=f(X)$. Portanto:
  - $E[Y] \cong f(E[X]) + (f''(E[X]) \times Var(X))/2$
  - $Var(Y) \cong (f'(E[X])^2 \times Var(X)$

Variáveis Aleatórias
Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

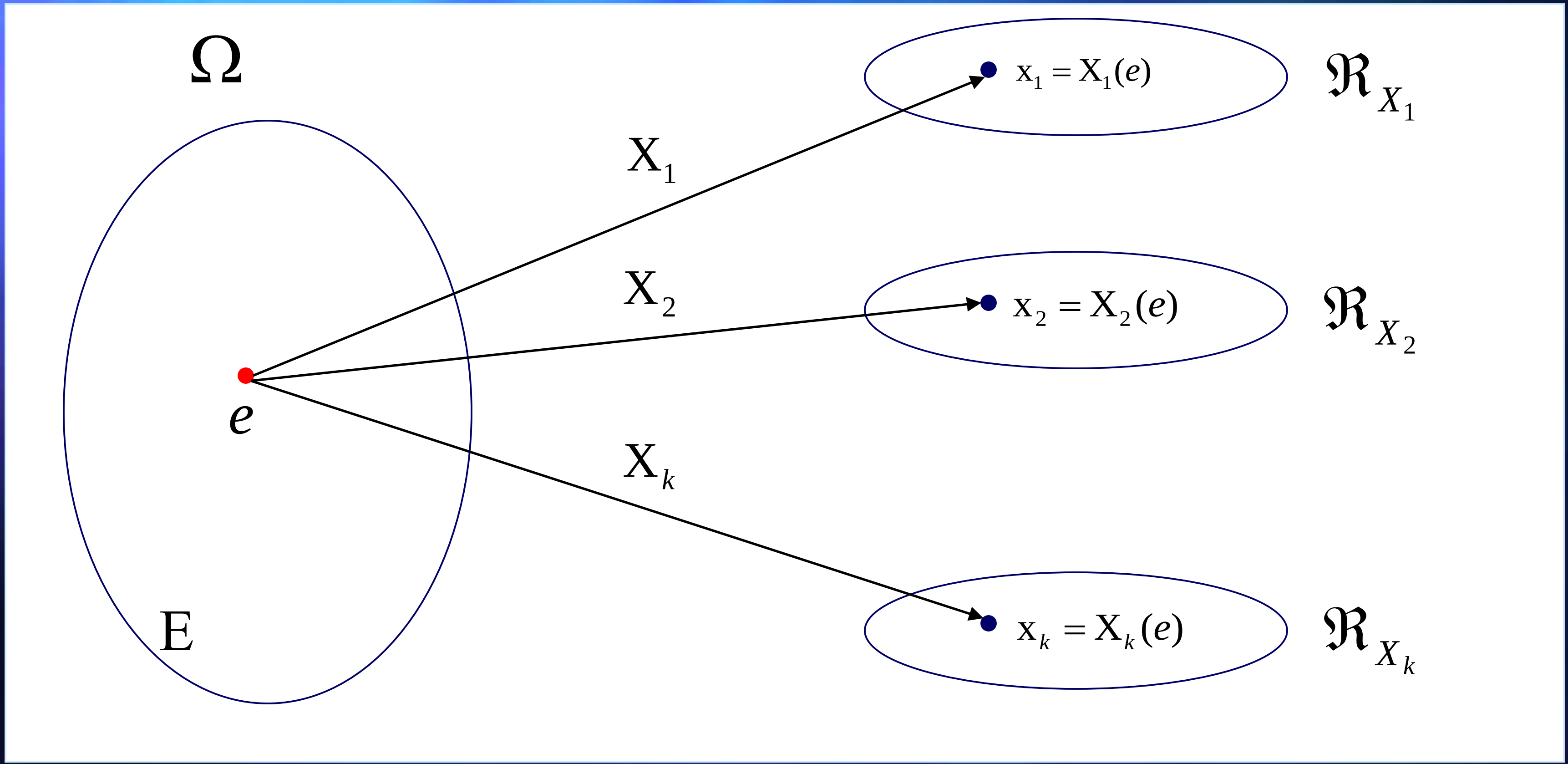
- Suponha uma variável aleatória t, onde $E[t]=20s$ e $Var(t)=5s$. Considere uma função $v(t)=dt^{-1} = 10^3 t^{-1}$
- $v'(t) = - 10^3 t^{-2}$ e $v''(t)=2\times10^3 t^{-3}$
- $E[v(t)] = v(E[t]) + (v''(E[t]) \times Var(t))/2$
- $E[v(t)] = v(20) + (v''(20) \times 5)/2 = 50{,}625$ m/s
- $Var(v(t))=[v'(E[t])]^2 \times Var(t)$
- $Var(v(t))= [v'(20)]^2 \times 5 = 12{,}5$ m/s

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias
  - Seja Ω o espaço amostral associado a um experimento E. $e \in E$ é um resultado do experimento E.
  - Seja $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias que associam um número real $X_1(e), X_2(e), \ldots, X_k(e)$ a cada resultado e.
  - $[X_1, X_2, \ldots, X_k]$ é chamado de vetor aleatório k-dimensional.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias

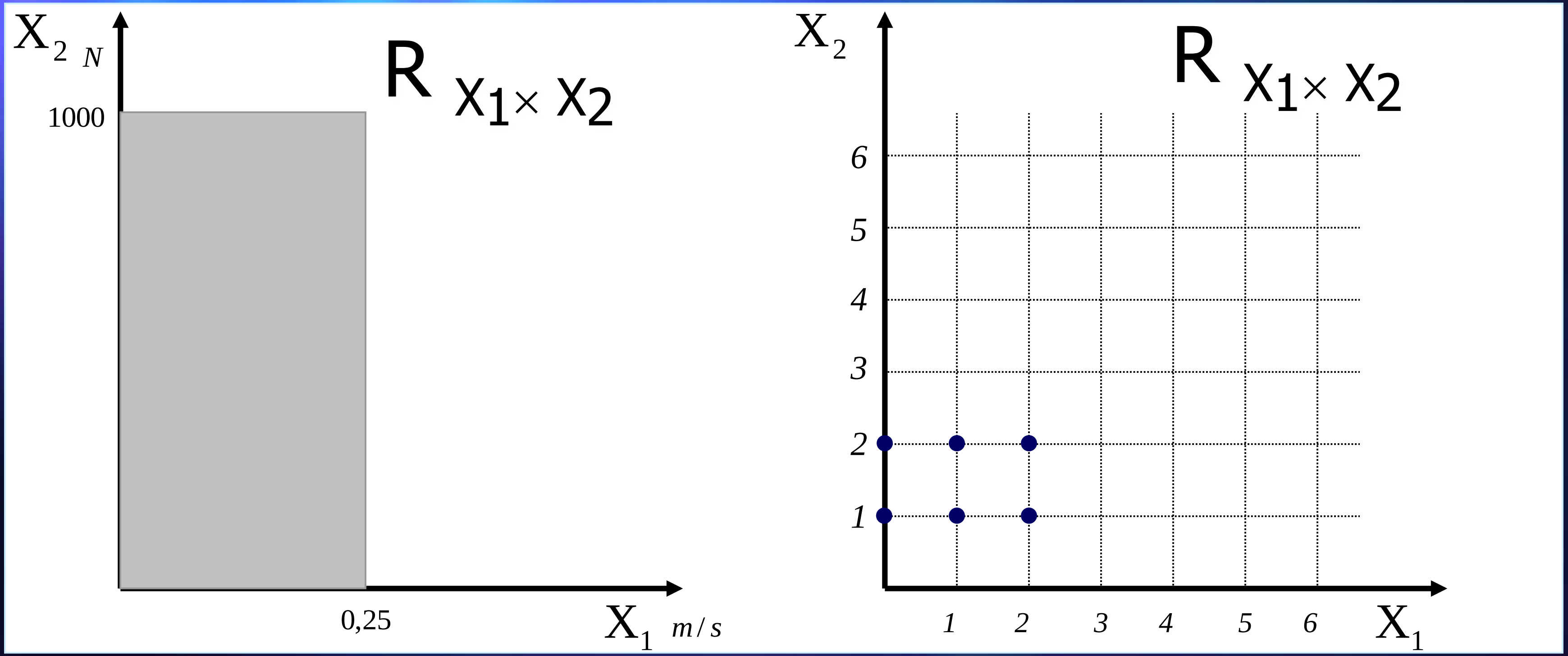


Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto finito ou infinito enumerável, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório discreto bidimensional.
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto não enumerável do plano euclidiano, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo bidimensional.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)



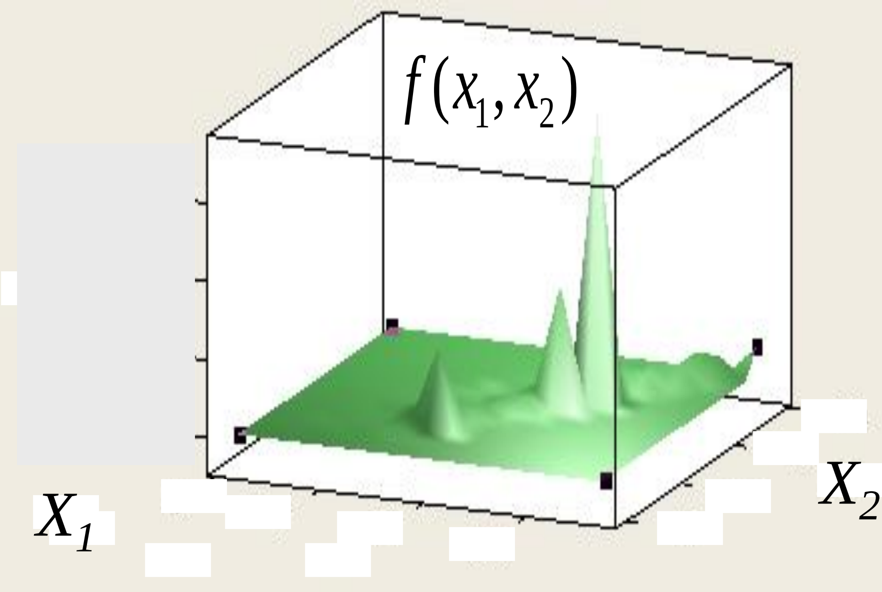
Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Bivariada
  - Caso Discreto: a cada resultado $[x_1, x_2]$ de $[X_1, X_2]$ associamos um número
    $p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$,
    onde $p(x_1, x_2) \geq 0, \forall\ x_1, x_2$
    $$\sum_{x_1}\sum_{x_2} p(x_1, x_2) = 1$$
  - Distribuição de probabilidade de $[X_1, X_2]$
    $$([x_1, x_2], p(x_1, x_2)), \forall x_1, x_2$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Bivariada
  - Caso Contínuo: Se $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo, $f(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall\ (x_1, x_2) \in R_{X_1 \times X_2}$ é a função de densidade conjunta.

$$\iint_{R_{X_1 \times X_2}} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$$



Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Discreto : a distribuição marginal de X_1 é

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2), \forall x_1$$

A distribuição marginal de X_2 é

$$p_2(x_2) = \sum_{x1} p(x_1, x_2), \forall x_2$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

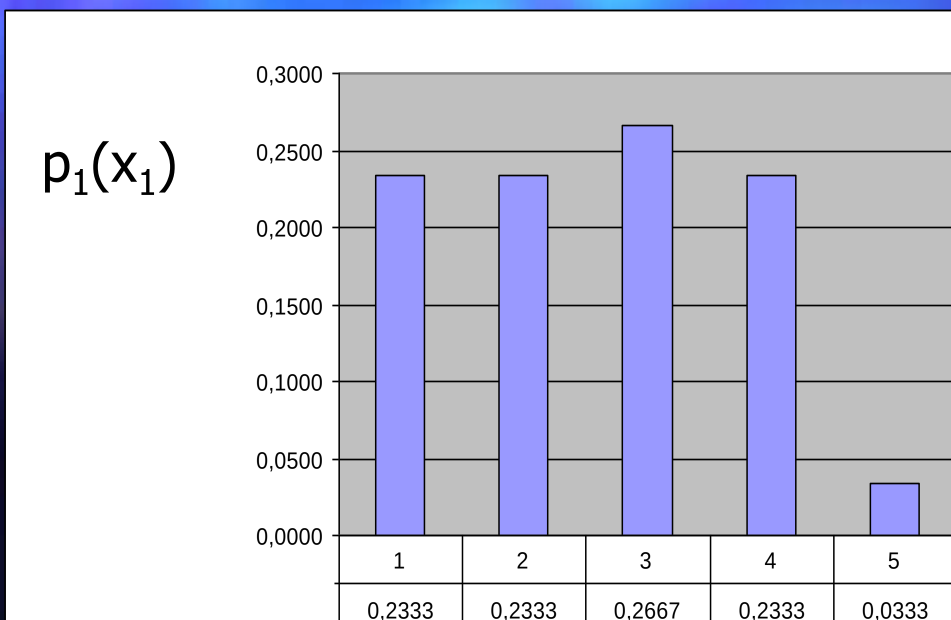
Retornar

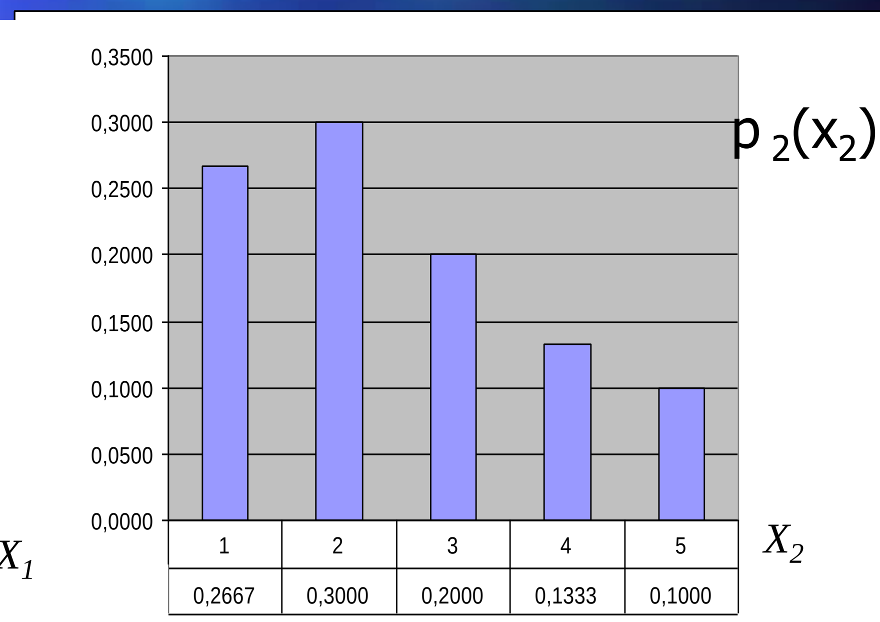
- Probabilidade Marginal: Caso Discreto

x_2 \ x_1	1	2	3	4	5	$p_2(x_2)$
1	1/30	1/30	2/30	3/30	1/30	8/30
2	1/30	1/30	3/30	4/30		9/30
3	1/30	2/30	3/30			6/30
4	1/30	3/30				4/30
5	3/30					3/30
$p_1(x_1)$	7/30	7/30	8/30	7/30	1/30	$\sum_x p(x) = 1$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal: Caso Discreto





Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Contínuo : a distribuição marginal de X_1 é

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2$$

A distribuição marginal de X_2 é

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_1$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Linearidade do Valor Esperado
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$$Z = X + Y.$$

$$\text{Portanto}\, E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias discreta, temos que:

$$E[Z] = E[X + Y] =$$

$$\sum_x \sum_y (x + y) p(x + y) =$$

(*Ver exemplo da página seguinte*)

$$\sum_x x\, p_x(x) + \sum_y y\, p_y(y) =$$

$$E[X] + E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

Ver Tabela Original

- Linearidade do Valor Esperado

x2,x1	0	1	2	3	4	p2(x2)	x2 p(x2)
0	0,0333	0,0333	0,0667	0,1000	0,0333	0,2667	0
1	0,0333	0,0333	0,1000	0,1333		0,3000	0,3
2	0,0333	0,0667	0,1000			0,2000	0,4
3	0,0333	0,1000				0,1333	0,4
4	0,1000					0,1000	0,4
p1(x1)	0,2333	0,2333	0,2667	0,2333	0,0333	2,0000	1,5000
1,6000	0	0,233333	0,533333	0,7	0,133333	x1 p(x1)	E[X2]
E[X1]						E[X1+X2]=	3,1000

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias

contínuas, temos que:

$$E[Z] = E[X + Y] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x+y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)dydx + \int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy =$$

$$E[X] + E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

De forma mais geral, considere Z, Y e X variáveis aleatórias contínuas, onde

Z(X,Y) = aX+bY, e a e b são constantes.

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Prova:

$$
\begin{aligned}
E(aX+bY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[axf(x,y)+byf(x,y)]dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}axf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}byf(x,y)dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right]dx+b\int_{-\infty}^{\infty}y\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right]dy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy \\
&= aE(X)+bE(Y).
\end{aligned}
$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Este resultado pode ser generalizado de forma que:

para $a_1,...a_n$ constantes e qualquer variável aleatória multivariada $(X_1,...X_n)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

Se $E(X_i)$ não divergem.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

Retornar

- Linearidade do Valor Esperado

  Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e seja

$$Z = XY.$$

$$\text{Portanto } E[Z] = E[XY] = E[X]E[Y]$$

Prova: $$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j) =$$

$$\sum_i \sum_j x_i y_j p_X(x_i) p_Y(y_j) = \quad \text{(dado que são independentes)}$$

$$\sum_i x_i y_j p_X(x_i) \sum_j y_j p_Y(y_j) =$$

$$E[X]E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Soma de Variâncias
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$$Z = X + Y$$

$$\text{Portanto} Var[Z] = Var[X + Y]$$

$$= Var[X] + Var[Y] + 2 \times Cov(X, Y)$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Soma de Variâncias

$$
\begin{aligned}
Var[X+Y] &= E[((X+Y)-E[X+Y])^2] \\
&= E[((X+Y)-E[X]-E[Y])^2] \\
&= E[((X-E[X])+(Y-E[Y]))^2]
\end{aligned}
$$

$$= E[(X-E[X])^2+(Y-E[Y])^2+2(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

$$= E[(X-E[X])^2]+E[(Y-E[Y])^2]+E[2(X-E[X])(Y-E[Y]]$$

$$= E[(X-E[X])^2]+E[(Y-E[Y])^2]+2E[(X-E[X])(Y-E[Y]]$$

$$= Var[X]+Var[Y]+2Cov(X,Y)$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Soma de Variâncias

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y]]$$

$$= E(XY - YE[X] - XE[Y] + E[X]E[Y])$$

Devido à propriedade de linearidade do valor esperado, temos:

$$= E[XY] - E(YE[X]) - E(XE[Y]) + E[X]E[Y]$$

$$= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y]$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$ (Se X e Y forem independentes)

$$= 0$$ (devido à linearidade)

Ver também o slide 101

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X+Y)=Var[X]+Var[Y]+2Cov(X,Y)$$

Dado que se X e Y forem independentes, tem-se Cov(X,Y)=0.
Portanto:

$$Var(X+Y)=Var[X]+Var[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X+Y)=Var[X]+Var[Y]$$

O teorema acima pode generalizado para n variáveis aleatória Mutuamente independentes $X_1,\ldots X_n$ com constantes $a_1,\ldots a_n$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$$

Ver também o slide 77

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X-Y)=Var[X]+Var[Y]$$

Dado que $Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$

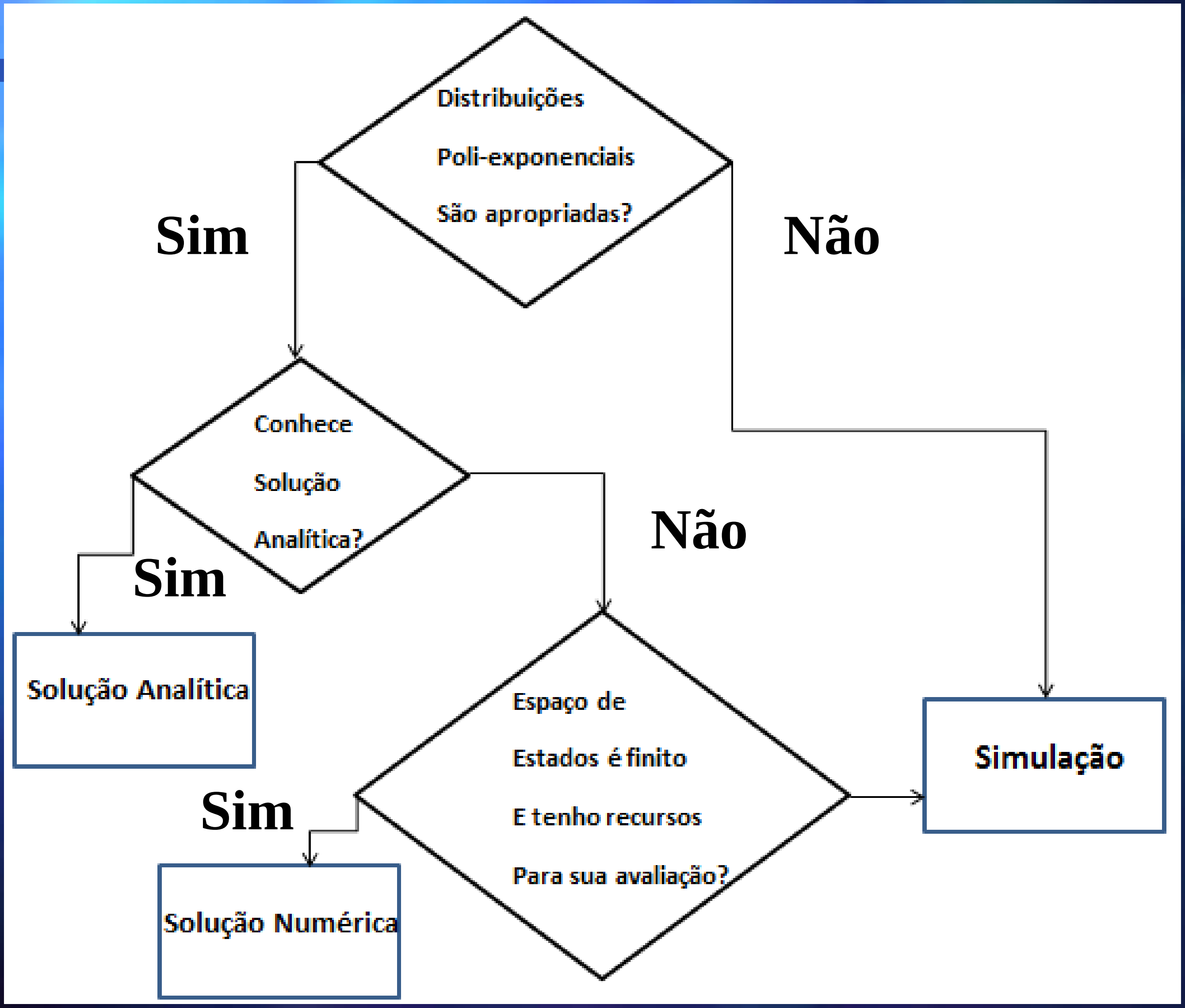
Pois $a_x=1$ e $a_y=-1$

$$Var[X-Y]=a_x^2 Var[X]+a_y^2 Var[Y]$$

$$=(1)^2 Var[X]+(-1)^2 Var[Y]$$

$$=Var[X]+Var[Y]$$

Orientação para Modelagem de Desempenho



Processos Estocásticos

- Processo Estocástico é definido por um conjunto de variáveis aleatórias,

$\{X(t) : t \in T\}$, onde $X(t)$ é uma variável aleatória para cada $t \in T$.

t é denominado parâmetro e cada valor de $X(t)$ são estados.

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Tipos de Processos Estocásticos
  - Processos de espaço de estados e tempo discretos (*Discret Time Markov Chain* - DTMC)
  - Processos de espaço de estados contínuo e tempo discreto
  - Processos de espaço de estados discreto e tempo contínuo (*Continuos Time Markov Chain* - CTMC)
  - Processos de espaço de estados e tempo contínuos

Processos Estocásticos

- Classificação de Estados:
  - Estado Alcançável (*reachable*): um estado s_j é um alcancável de um estado s_i se $p_{ij} > 0$.
  - Um sub-conjunto de estado S é definido com fechado (*closed*) se $\forall s_i \in S$, $p_{ij} = 0$, $\forall s_j \notin S$.
  - Um estado é absorvente se ele é o único membro de conjunto fechado de estados S.
  - Um conjunto fechado de estado S é dito irredutível se $p_{ij} > 0 \;\; \forall\, s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).

Processos Estocásticos

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.

- Observam-se dois aspectos associados a ausência de memória:
  1 Todo estado passado é irrelevante.
  2 O tempo que o processo passa em um estado é irrelevante.

- Processo Estocástico Semi-Markoviano é uma extensão de um processo Markoviano onde a restrição 2 é relaxada.

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

Considere uma CTMC (não-homogênea) $\{X(t): t \geq 0\}$ com espaço de estado $\{0,1,2,...\}$. Vamos usar i,j e k para denotar estados típicos e s,u e t para denotar parâmetro de tempo.

Para $0 \leq s \leq t$, considere $p_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$. Pode ser representada na forma matricial por $H(s,t) = [\, p_{ij}(s,t)]$

A equação de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u)\, p_{kj}(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Na forma matricial, temos:

$$H(s,t) = H(s,u)\, H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$H(s,t) = H(s,u)\, H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$

Substituindo u por t e t por $t+h$, então:

$H(s,t+h) = H(s,t)\, H(t,t+h)$

Subtraindo-se ambos os lados por $H(s,t)$, temos:

$H(s,t+h) - H(s,t) = H(s,t)\, [H(t,t+h) - I]$

Dividindo-se por h e aplicando-se o limite $h \to 0$, tem-se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{H(s,t+h) - H(s,t)}{h} = H(s,t) \left[\lim_{h \to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}\right]$$

Levando à equação diferencial parcial $\dfrac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t) \qquad \textit{(forward Kolmogorov eq.)}$$

Onde $Q(t) = \lim_{h \to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}$

Os elementos de $Q(t)$ são dados por

$$q_{ii}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h} \qquad \text{(I)}$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} \qquad i \neq j \qquad \text{(II)}$$

Continuos Time Markov Chain

Considerando (I), temos:

$$q_{ii}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h} \qquad \text{(I)}$$

$$-q_{ii}(t) = -\lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h}$$

$$-q_{ii}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t,t+h)}{h}$$

$$o(h) - hq_{ii}(t) = 1 - p_{ii}(t,t+h)$$

$$-hq_{ii}(t) + o(h) = 1 - p_{ii}(t,t+h) \qquad \text{(III)}$$

Continuos Time Markov Chain

- Considerando (II), temos:

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} \qquad i \neq j \qquad \text{(II)}$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} \qquad i \neq j$$

$$o(h) + \ hq_{ii}(t) \ = p_{ij}(t,t+h) \qquad i \neq j$$

$$- o(h) - \ hq_{ii}(t) \ = - p_{ij}(t,t+h) \qquad i \neq j$$

$$- \ hq_{ii}(t) - o(h) \ = - p_{ij}(t,t+h) \qquad i \neq j \quad \text{(IV)}$$

Continuos Time Markov Chain

$$- \; hq_{ii}(t) + o(h) = 1 - \; p_{ii}(t,t+h) \qquad \text{(III)}$$

$$- \; hq_{ij}(t) - o(h) \; = - \, p_{ij}(t,t+h) \qquad i \neq j \qquad \text{(IV)}$$

$$-(\text{III} + \text{IV}) =$$

$$-(-hq_{ii}(t) - hq_{ij}(t) = 1 - p_{ii}(t,t+h) - p_{ij}(t,t+h)) =$$

$$hq_{ii}(t) + hq_{ij}(t) = \; p_{ii}(t,t+h) + p_{ij}(t,t+h) - 1$$

Como $\sum_j p_{ij}(s,t) = 1, \; \forall \; i$, então:

$$hqii(t) + hqij(t) = 0$$

$$qii(t) + qij(t) = 0$$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

De forma mais geral:

$$\sum_j q_{ij}(s,t) = 0, \forall i$$

Ou seja, a soma de elementos de uma linha de Q é zero.

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$$ *(forward Kolmogorov eq.)*

Para cadeias homogêneas, tem-se:

$Q(t) = Q$ e $H(s,t) = \Pi(t)$

Continuos Time Markov Chain

- *Steady State Analysis*

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$ (homogêneas)

Em estado estacionário ($t \rightarrow \infty$), pode ser que

$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t) = \Pi(t)$ exista.

Caso exista, então $\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = 0$, então $\Pi Q = 0$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = 0$

$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

Onde π_s fornece a *steady-state probability* de um sistema estar no estado s_i

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$$

Onde $\pi(t)_{si}$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

Continuos Time Markov Chain

- Uma CTMC é dita irredutível se $p_{ij} > 0 \ \forall \ s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).

- Uma CTMC finita, irredutível e homogênea é dita ergódica (*ergodic*) se o vetor de probabilidade estacionária (*steady-state probability vector*) Π existe.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = \underline{0} \qquad \sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$

- **Métodos diretos**
  - Eliminação de Gauss
  - Decomposição LU
  - Método de Grassmann
- **Métodos Iterativos**
  - Power Method
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel

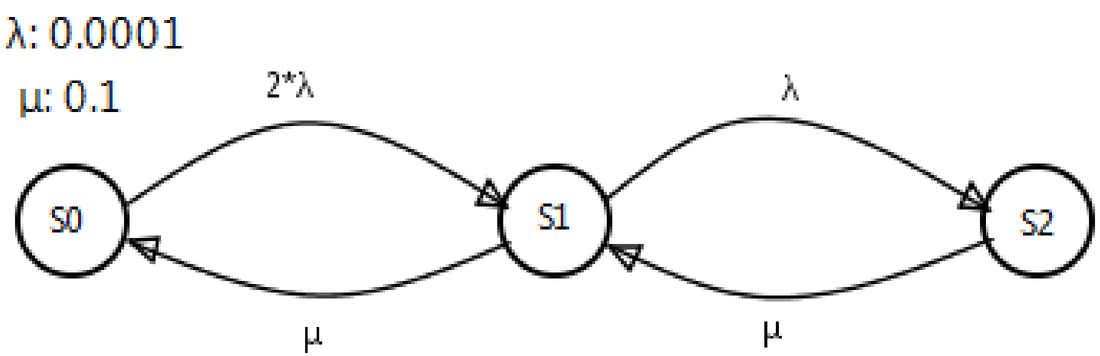
Continuos Time Markov Chain

- Eliminação de Gauss – Método Direto

$$\Pi Q = \underline{0}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$$

Consider the CTMC:



$$Q = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 1 \times 10^{-4} & -0.1001 & 0.1 \\ 0 & 2 \times 10^{-4} & -2 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Continuos Time Markov Chain

Then:

$$(\pi_2 \quad \pi_1 \quad \pi_0)\begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 1\times 10^{-4} & -0.1001 & 0.1 \\ 0 & 2\times 10^{-4} & -2\times 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 + \quad \pi_1 + \quad \pi_0 = 1$$

Therefore:

$$\begin{cases} -0.1\pi_2 + 1\times 10^{-4}\pi_1 + 0 = 0 \\ 0.1\pi_2 - 0.1001\pi_1 + 2\times 10^{-4}\pi_0 = 0 \\ 0 + 0.1\pi_1 - 2\times 10^{-4}\pi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_2 + \quad \pi_1 + \quad \pi_0 = 1$$

Continuos Time Markov Chain

We may consider the system:

$$\begin{cases} -0.1\pi_2 & + & 1 \times 10^{-4}\pi_1 & + & 0 & = 0 \\ 0.1\pi_2 & - & 0.1001\pi_1 & + & 2 \times 10^{-4}\pi_0 & = 0 \\ \pi_2 & + & \pi_1 & + & \pi_0 & = 1 \end{cases}$$

Gauss elimination method

In Gauss elimination, the given system of equations is transformed into an equivalent system which has **upper triangular form**; this new form can be solved easily by a process called **back-substitutior**.

So, considering the system:

$$\begin{cases} -0.1\pi_2 & + & 1 \times 10^{-4}\pi_1 & + & 0 & = 0(R_1) \\ 0.1\pi_2 & - & 0.1001\pi_1 & + & 2 \times 10^{-4}\pi_0 & = 0(R_2) \\ \pi_2 & + & \pi_1 & + & \pi_0 & = 1(R_3) \end{cases}$$

Continuos Time Markov Chain

1. **Transformation into upper triangular form:**

First stage: Eliminate π_2 from equations R2 and R3 using equation R1.

$$\begin{cases} -0.1\pi_2 + 1\times 10^{-4}\pi_1 + 0 = 0 & (R_1') \\ 0 - 0.1\pi_1 + 2\times 10^{-4}\pi_0 = 0 & (R_2' = R_2 + R_1) \\ 0 + 0.1001\pi_1 + 0.1\pi_0 = 0.1 & (R_3' = 0.1R_3 + R_1) \end{cases}$$

Second stage: eliminate π_1 from R3' using equation R2':

$$\begin{cases} -0.1\pi_2 + 1\times 10^{-4}\pi_1 + 0 = 0 & (R_1^{"}) \\ 0 - 0.1\pi_1 + 2\times 10^{-4}\pi_0 = 0 & (R_2^{"}) \\ 0 + 0 + 0.1002\pi_0 = 0.1 & \left(R_3^{"} = \left(\frac{0.1001}{0.1}\right)\times R_2' + R_3'\right) \end{cases}$$

Continuos Time Markov Chain

The system, now in upper triangular form, has the coefficient matrix:

$$\begin{pmatrix} -0.1 & 1\times10^{-4} & 0 \\ 0 & -0.1 & 2\times10^{-4} \\ 0 & 0 & 0.1002 \end{pmatrix}$$

2. **Solution by back-substitution.** The system in uppe triangular form is easily solved by obtaining π_0 from R3" then π_1 from R2", and finally π_2 from R1". This procedure i called back-substitution. Thus:

$$0.1002\pi_0 = 0.1 \qquad \pi_0 = \frac{0.1}{0.1002} = 0.998002$$

$$-0.1\pi_1 + 2\times10^{-4}\pi_0 = 0 \qquad \pi_1 = \frac{2\times10^{-4}}{0.1}\pi_0$$

$$\pi_1 = \frac{2\times10^{-4}}{0.1}\times 0.998002 = 0.001998$$

$$-0.1\pi_2 + 1\times10^{-4}\pi_1 = 0 \qquad \pi_2 = \frac{1\times10^{-4}}{0.1}\pi_1$$

$$\pi_2 = \frac{1\times10^{-4}}{0.1}\times 0.001998 = 1.998\times10^{-6}$$

Continuos Time Markov Chain

Therefore:

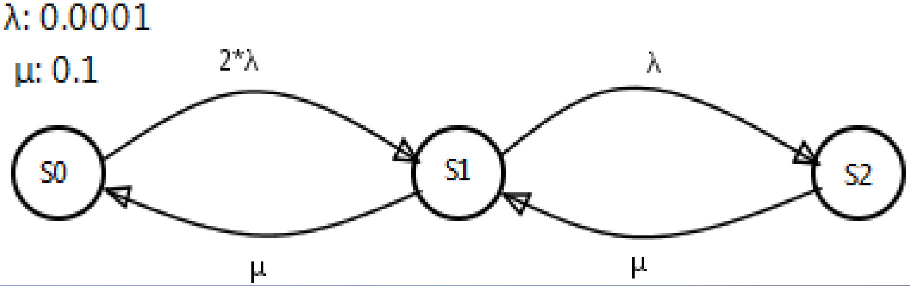
$$\Pi = \begin{pmatrix} 1.998 \times 10^{-6} & 0.001998 & 0.998002 \end{pmatrix}$$

Result obtained through Mercury:

π_2=1.9960037251464553E-6

π_1=0.001996003862706791

π_0=0.9980020001335681



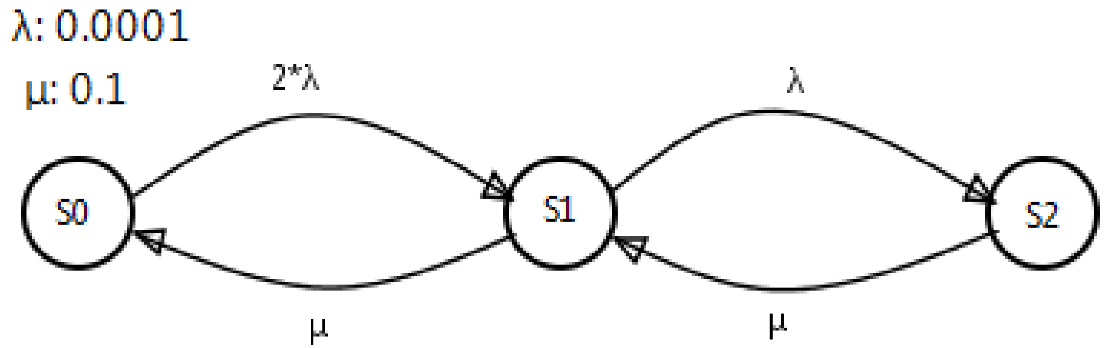
Continuos Time Markov Chain

- Gauss-Seidel – Método Iterativo

$$\Pi Q = \underline{0}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$$

Consider the CTMC:



$$Q = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 1 \times 10^{-4} & -0.1001 & 0.1 \\ 0 & 2 \times 10^{-4} & -2 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Continuos Time Markov Chain

Iterative methods provide solution by repeatedly applying a sequence of solutions which (under suitable conditions) converges to the exact solution. Iterative methods have the advantages of simplicity of operation and are relatively insensitive to propagation of errors. They would be used in preference to direct methods for solving linear systems involving several hundred variables, particularly, if many of the coefficients were zero.

We may consider the system:

$$\begin{cases} \pi_2 + \pi_1 + \pi_0 = 1 \\ 0.1\pi_2 - 0.1001\pi_1 + 2\times 10^{-4}\pi_0 = 0 \\ -0.1\pi_2 + 1\times 10^{-4}\pi_1 + 0 = 0 \end{cases}$$

Convergence:

$$S_k = \sum_{i=0}^{2} \left| \pi_i^{k+1} - \pi_i^{k} \right|$$

Continuos Time Markov Chain

1. The first step is to solve the first equation for π_0, the second for π_1., and the third for π_2. when the system becomes:

$$\pi_0 = 1 - \pi_2 - \pi_1 \quad (1)$$

$$\pi_1 = \frac{1}{0.1001}(0.1\pi_2 + 2 \times 10^{-4}\pi_0) \quad (2)$$

$$\pi_2 = \frac{1\times10^{-4}\pi_1}{0.1} \quad (3)$$

2. An initial solution is now assumed; we shall use $\pi_0 = 0$, $\pi_1 = 0$ and $\pi_2 = 0$.

$$\pi_0^0 = 0,\ \pi_1^0 = 0, \pi_2^0 = 0$$

3. Inserting these values into the right-hand side of Equation (1) yields $\pi_0 = 1 - \pi_2 - \pi_1$

$$\pi_0^1 = 1$$

Continuos Time Markov Chain

4. This value for π_0 is used immediately together with the remainder of the initial solution (i.e., π_1 = 0 and π_2 = 0) in the right-hand side of Equation (2) and yields

$$\pi_1^1 = \frac{1}{0.1001}(0.1\pi_2^0 + 2\times10^{-4}\pi_0^1)$$
$$= \frac{1}{0.1001}(0.1\times0 + 2\times10^{-4}\times1) = 2\times10^{-3}$$
$$\pi_1^1 = 2\times10^{-3}$$

5. Finally, the values π_0 = 1 and $\pi_1 = 2\times10^{-3}$ are inserted into Equation (3) to yield

$$\pi_2^1 = \frac{1\times10^{-4}\pi_1^1}{0.1} = \frac{1\times10^{-4}\times2\times10^{-3}}{0.1} = 2\times10^{-6}$$
$$\pi_2^1 = 2\times10^{-6}$$

6. This second approximate solution ($\pi_0^1 = 1,\ \pi_1^1 = 2\times10^{-3}, \pi_2^1 = 2\times10^{-6}$) completes the first iteration.

Continuos Time Markov Chain

7. Beginning with this second approximation, we repeat the process to obtain a third approximation, etc. Under certain conditions relating to the coefficients of the system, this sequence will converge to the exact solution.
8. Naturally, in practice, the exact solution is unknown. It is customary to end the iterative procedure as soon as the differences between the x(k+1) and x(k) values are suitably small. One stopping rule is to end the iteration when

$$S_k = \sum_{i=0}^{2} \left| \pi_i^{k+1} - \pi_i^k \right|$$

$$S_0 = \sum_{i=0}^{2} \left| \pi_i^{1} - \pi_i^0 \right| = 1.002000$$

Continuos Time Markov Chain

Second approximation:

$$\pi_0^2 = 1 - \pi_2^1 - \pi_1^1 = 1 - 2 \times 10^{-6} - 2 \times 10^{-3} = 9.98 \times 10^{-1}$$

$$\pi_1^2 = \frac{1}{0.1001}(0.1\pi_2^1 + 2 \times 10^{-4}\pi_0^2)$$

$$= \frac{1}{0.1001}(0.1 \times 2 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-4} \times 9.98 \times 10^{-1}) = 2 \times 10^{-3}$$

$$\pi_1^2 = 2 \times 10^{-3}$$

$$\pi_2^2 = \frac{1 \times 10^{-4}\pi_1^2}{0.1} = \frac{1 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-3}}{0.1} = 2 \times 10^{-6}$$

$$\pi_2^2 = 2 \times 10^{-6}$$

$$(\pi_0^2 = 9.98 \times 10^{-1}, \pi_1^2 = 2 \times 10^{-3}, \pi_2^2 = 2 \times 10^{-6})$$

$$S_1 = \sum_{i=0}^{2} |\pi_i^2 - \pi_i^1| = 0.002000$$

Continuos Time Markov Chain

Third approximation:

$$\pi_0^3 = 1 - \pi_2^2 - \pi_1^2 = 1 - 2 \times 10^{-6} - 2 \times 10^{-3}$$
$$= 9.98 \times 10^{-1}$$

$$\pi_1^3 = \frac{1}{0.1001}(0.1\pi_2^2 + 2 \times 10^{-4}\pi_0^3)$$
$$= \frac{1}{0.1001}(0.1 \times 2 \times 10^{-6} + 2 \times 10^{-4} \times 9.98$$
$$\times 10^{-1}) = 2 \times 10^{-3}$$

$$\pi_1^3 = 2 \times 10^{-3}$$

$$\pi_2^3 = \frac{1 \times 10^{-4}\pi_1^3}{0.1} = \frac{1 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-3}}{0.1} = 2 \times 10^{-6}$$

$$\pi_2^3 = 2 \times 10^{-6}$$

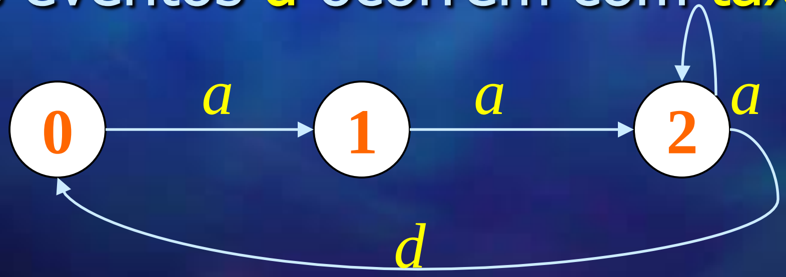
$$(\pi_0^3 = 9.98 \times 10^{-1},\ \pi_1^3 = 2 \times 10^{-3},\ \pi_2^3 = 2 \times 10^{-6})$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{2} \left|\pi_i^3 - \pi_i^2\right| = 0$$

Continuos Time Markov Chain

Exemplo

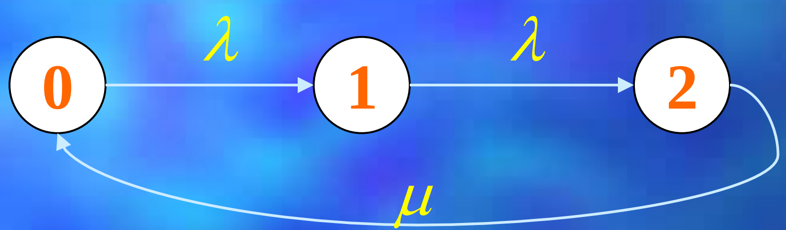
- Suponha um sistema representado por um autômato estocástico, onde:
  - $S = \{0,1,2\}$
  - $E = \{a,d\}$
  - $f(0,a)=1$, $f(1,a)=2$, $f(2,a)=2$, $f(2,d)=0$
  - $\Gamma(0) = \{a\}$, $\Gamma(1) = \{a\}$, $\Gamma(2) = \{a,d\}$
  - Os eventos a ocorrem com taxa igual = λ,
  - Os eventos d ocorrem com taxa igual = μ



State Transition Diagram

Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*



$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

$\Pi\, Q = 0$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)\, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $Q = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \end{array}$

$-\lambda\, \pi_0 + \mu\, \pi_2 = 0$

$\lambda\, \pi_0 - \lambda\, \pi_1 = 0$

$-\lambda\, \pi_1 - \mu\, \pi_2 = 0$

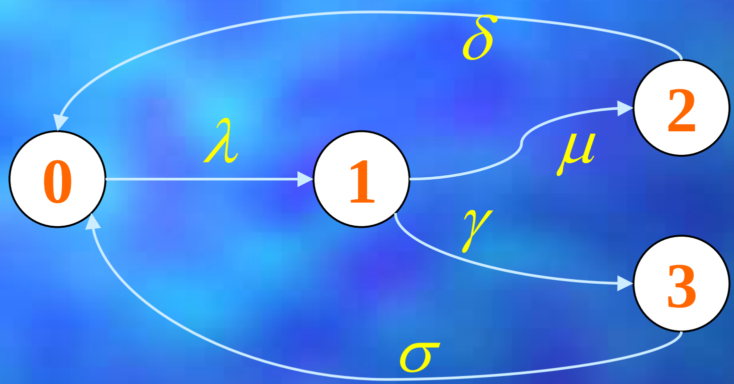
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$\pi_0 = \pi_1 = \mu / (2\mu + \lambda)$

$\pi_2 = \lambda / (2\mu + \lambda)$

Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*



- $$Q = \begin{array}{c c} \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma+\mu) & \mu & \gamma \\ \delta & 0 & -\delta & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} & \end{array}$$

$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

$\Pi\, Q = 0$

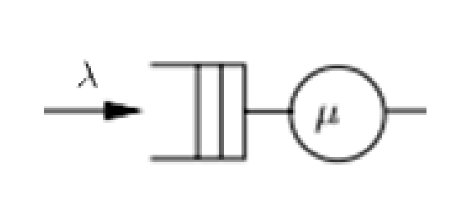
$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)\, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$T = 1 / (\pi_0 \times \lambda)$ - Tempo médio entre finalizações

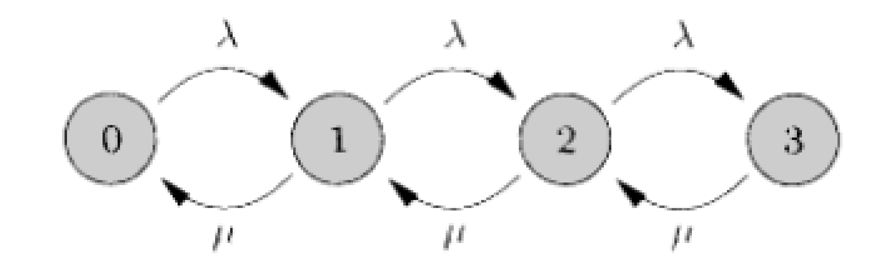
Continuos Time Markov Chain

Exemplo

- $\lambda = 0,2,$
- $\mu = 0,4$



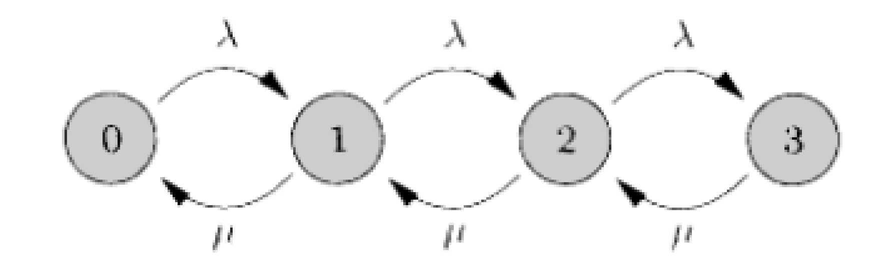
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$



$$\pi(0) = \underline{0.5333}, \quad \pi(1) = \underline{0.2667}, \quad \pi(2) = \underline{0.1333}, \quad \pi(3) = \underline{0.0667}$$

Continuos Time Markov Chain

- $\lambda = 0{,}2,$
- $\mu = 0{,}4$



- Utilização: $\rho = 1 - \pi\ (0) = \underline{0.4667}$
- Throughput

$$tp = \pi(1) \times \mu + \pi(2) \times \mu + \pi(3) \times \mu$$

$$tp = 0{,}2667 \times 0{,}4 + 0{,}1333 \times 0{,}4 + 0{,}0667 \times 0{,}4$$

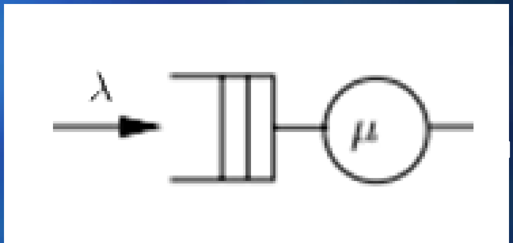
$$tp = 0{,}18668$$

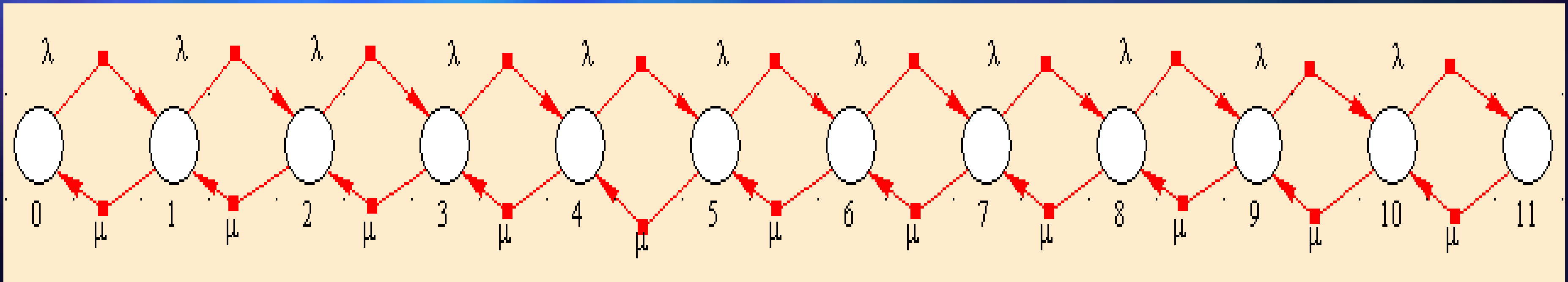
Continuos Time Markov Chain

Sharpe
(chame via Desktop)

Exemplo

- Tamanho do buffer=11
- λ
- μ
- FCFS





State probability of State i={0,1,…,11}
State_Prob(i):

Continuos Time Markov Chain

- Métricas - Métricas de interesse pode ser calculadas através da soma ponderada das probabilidades de estado.
  - *Reward rate* em estado estacionário

$$E[Z] = \sum_i r_i \pi_i$$

  - *Reward rate* instantânea

$$E[Z(t)] = \sum_i r_i \pi_i(t)$$

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

Continuos Time Markov Chain

- Métricas – a probabilidade acumulada de que se esteja num estado é dada por:

$$\mathbf{L}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\pi}(u)\,\mathrm{d}\,u$$

Portanto, $\mathbf{L}_i(t)$ tempo médio (esperado) que se permanece no estado i durante o intervalo [0,t).

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

Data

Continuos Time Markov Chain

Exemplo

$$\lambda = 20\ tps, \qquad COV = 1$$

$$\mu = 40\ tps, \qquad COV_{TS} = 1$$

$$E[ST] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$$

State probability of 0: 5.16129024e-001

State probability of 1: 2.58064518e-001

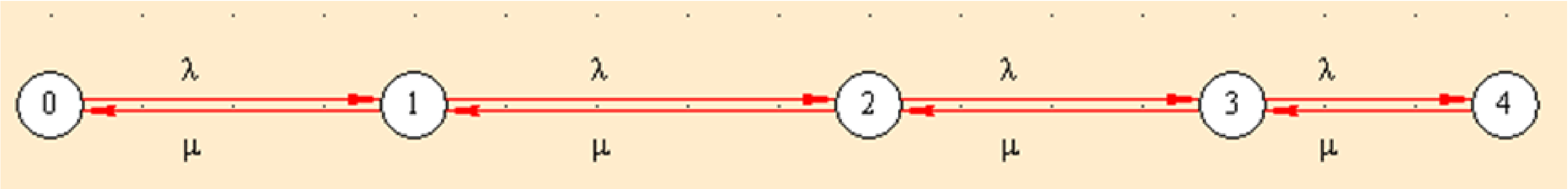
State probability of 2: 1.29032262e-001

State probability of 3: 6.45161314e-002

State probability of 4: 3.22580656e-002

Utilization= 0.483871

The CTMV (M/M/M/1/K=4)



Data

Continuos Time Markov Chain

Exemplo

$$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$$

$$E[TBA] = 0.05s$$

$$\mu = 40\ tps, \quad COV_{ST} = 0.5$$

$$E[ST] = 0.025s$$

Considering:

$$\gamma = \left(\frac{E[ST]}{\sigma_{ST}}\right)^2$$

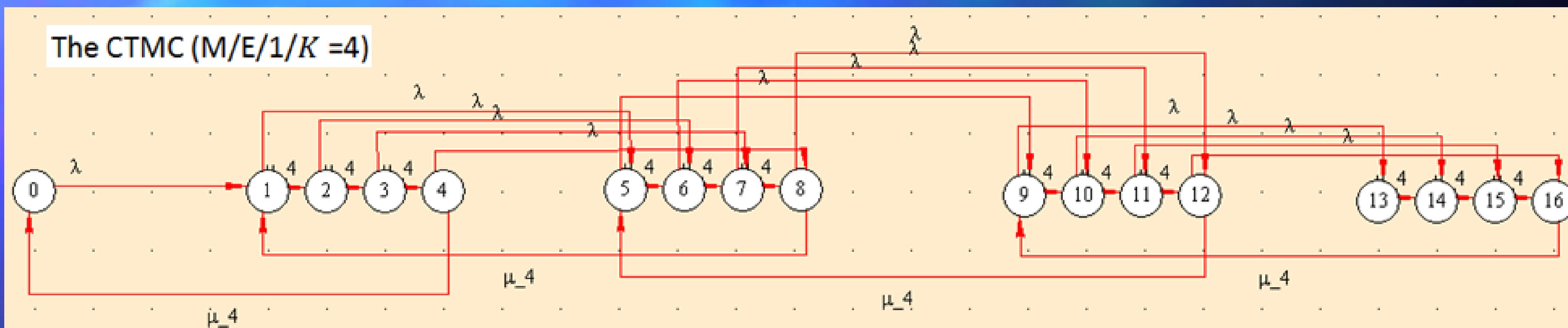
$$\mu_E = \left(\frac{\gamma}{E[ST]}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{0.025}{0.0125}\right)^2 = 4$$

$$\mu_E = \frac{4}{0.025} = 160$$

Therefore, the ST is represented by a Erlang(γ =4, $\mu_E = 160$).

Continuos Time Markov Chain



$\pi_0 = 5.06605425 \times 10^{-1}$

$\pi_1 = 9.01648794 \times 10^{-2}$

$\pi_2 = 8.01465589 \times 10^{-2}$

$\pi_3 = 7.12413851 \times 10^{-2}$

$\pi_4 = 6.33256751 \times 10^{-2}$

$\pi_5 = 2.42068626 \times 10^{-2}$

$\pi_6 = 3.04223846 \times 10^{-2}$

$\pi_7 = 3.49578293 \times 10^{-2}$

$\pi_8 = 3.81098122 \times 10^{-2}$

$\pi_9 = 7.97946839 \times 10^{-3}$

$\pi_{10} = 1.04731260 \times 10^{-2}$

$\pi_{11} = 1.31936488 \times 10^{-2}$

$\pi_{12} = 1.59621117 \times 10^{-2}$

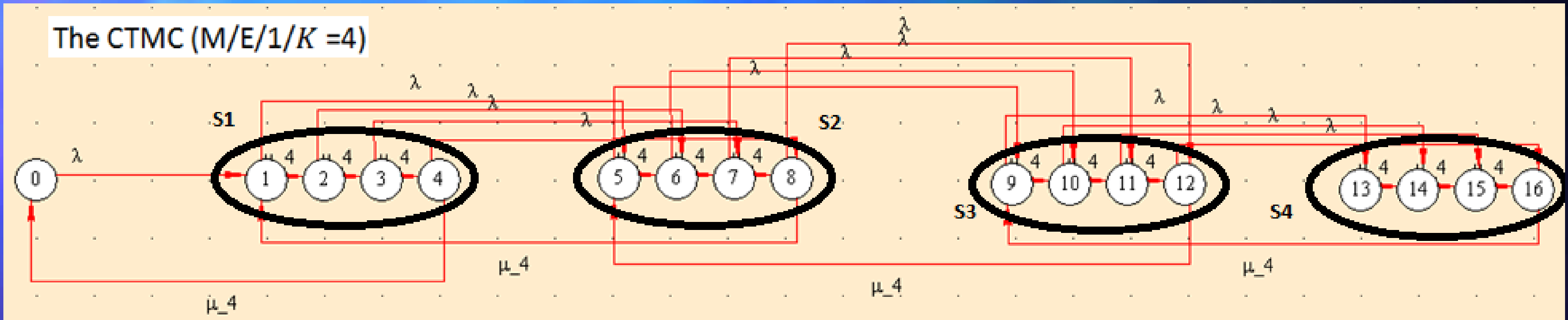
$\pi_{13} = 9.97433581 \times 10^{-4}$

$\pi_{14} = 2.30657440 \times 10^{-3}$

$\pi_{15} = 3.95578062 \times 10^{-3}$

$\pi_{16} = 5.95104472 \times 10^{-3}$

Continuos Time Markov Chain



$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$E[TBA] = 0.05s$

$\mu = 40\ tps, \ COV_{ST} = 0.5$

$E[ST] = 0.025s$

$$\gamma = \left(\frac{0.025}{0.0125}\right)^2 = 4$$

$$\mu_E = \frac{4}{0.025} = 160$$

$$\pi_0 = 5.06605 \times 10^{-1}$$

$$\pi_{S1} = 3.04878 \times 10^{-1}$$

$$\pi_{S2} = 1.27697 \times 10^{-1}$$

$$\pi_{S3} = 4.76084 \times 10^{-2}$$

$$\pi_{S4} = 2.21877 \times 10^{-2}$$

$Utilization = 0.493395$

Continuos Time Markov Chain

Sharpe
(chame via Desktop)

Exemplo

C:\Sharpe-Gui\ SHARPE GUI Examples \Markov\Degradable

Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios*: CPU_OK, Degradable e Faulty_CPU.*

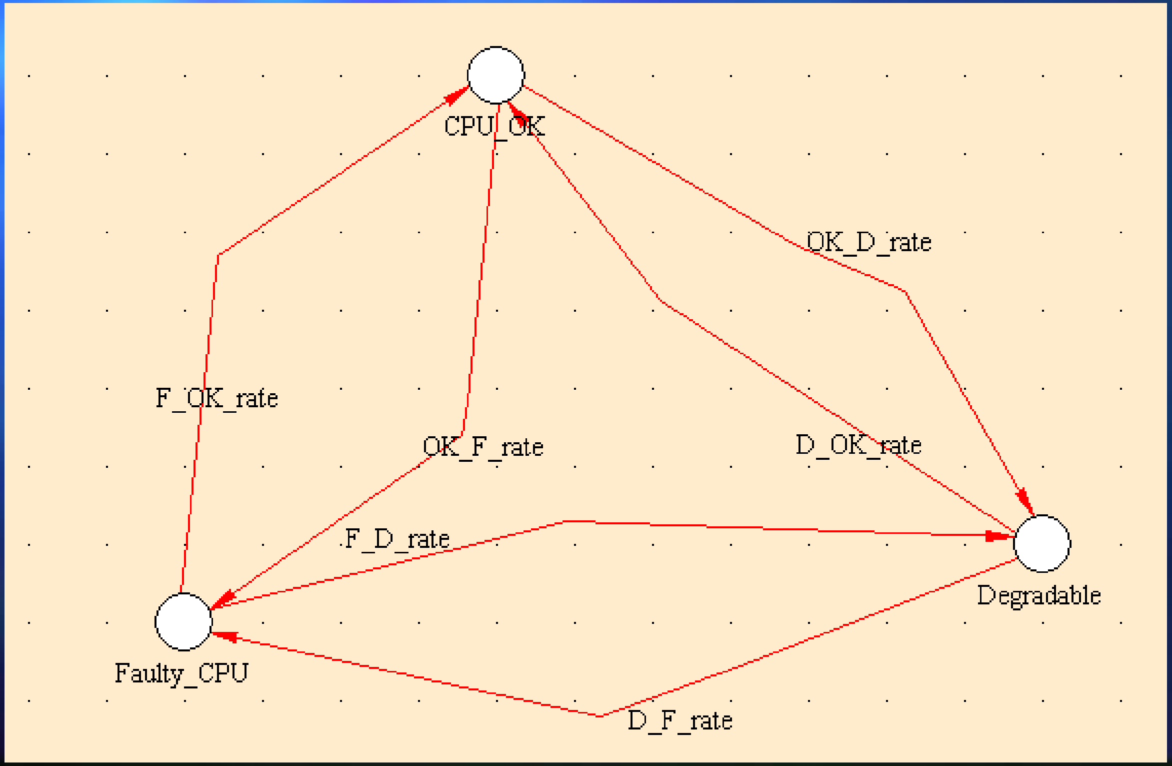
- As taxas entre os estados são:

  CPU_OK para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20,*Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.

Continuos Time Markov Chain

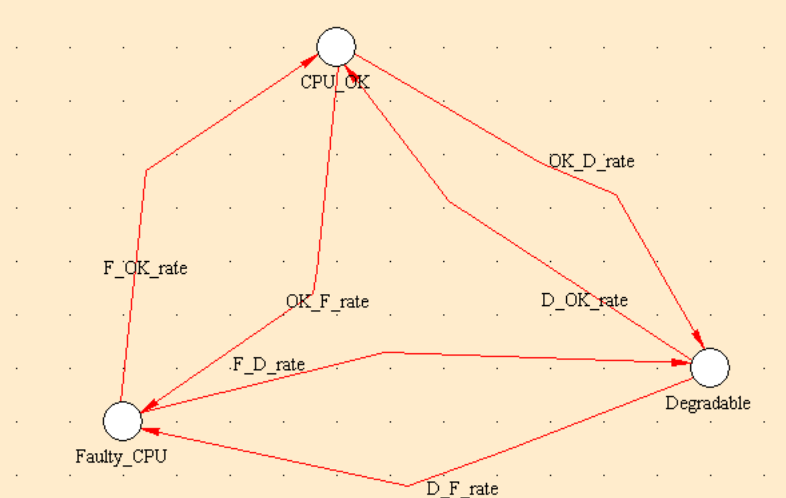
Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios*: CPU_OK, Degradable e Faulty_CPU.* As taxas entre os estados são:
- *CPU_OK* para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20, *Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.



Continuos Time Markov Chain

Sistema Computacional com degradação



Rate Matrix

Matrix	CPU_OK	Degradable	Faulty_CPU
CPU_OK		OK_D_rate	OK_F_rate
Degradable	D_OK_rate		D_F_rate
Faulty_CPU	F_OK_rate	F_D_rate	

****

********* Outputs asked for the model: Degradable **************

Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5, F_D_rate=10, OK_F_rate=1, F_OK_rate=1

Output:

State probability of CPU_OK

State_Prob: 1.20967742e-001

State probability of Degradable

State_Prob_0: 5.96774194e-001

State probability of Faulty_CPU

State_Prob_1: 2.82258065e-001

****

********* Outputs asked for the model: Degradable **************

Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5

Output:

Expected steady-state reward rate for Degradable

Exp_SS_Reward_Rate: 2.40322581e+001

****

********* Outputs asked for the model: Degradable **************

Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5, F_D_rate=10, OK_F_rate=1, F_OK_rate=1

Output:

Steady_State Availability for Degradable

SS_Avail: 7.17741935e-001

Up states:

CPU_OK
Degradable

Reward configuration:

State input:

Name of the state:

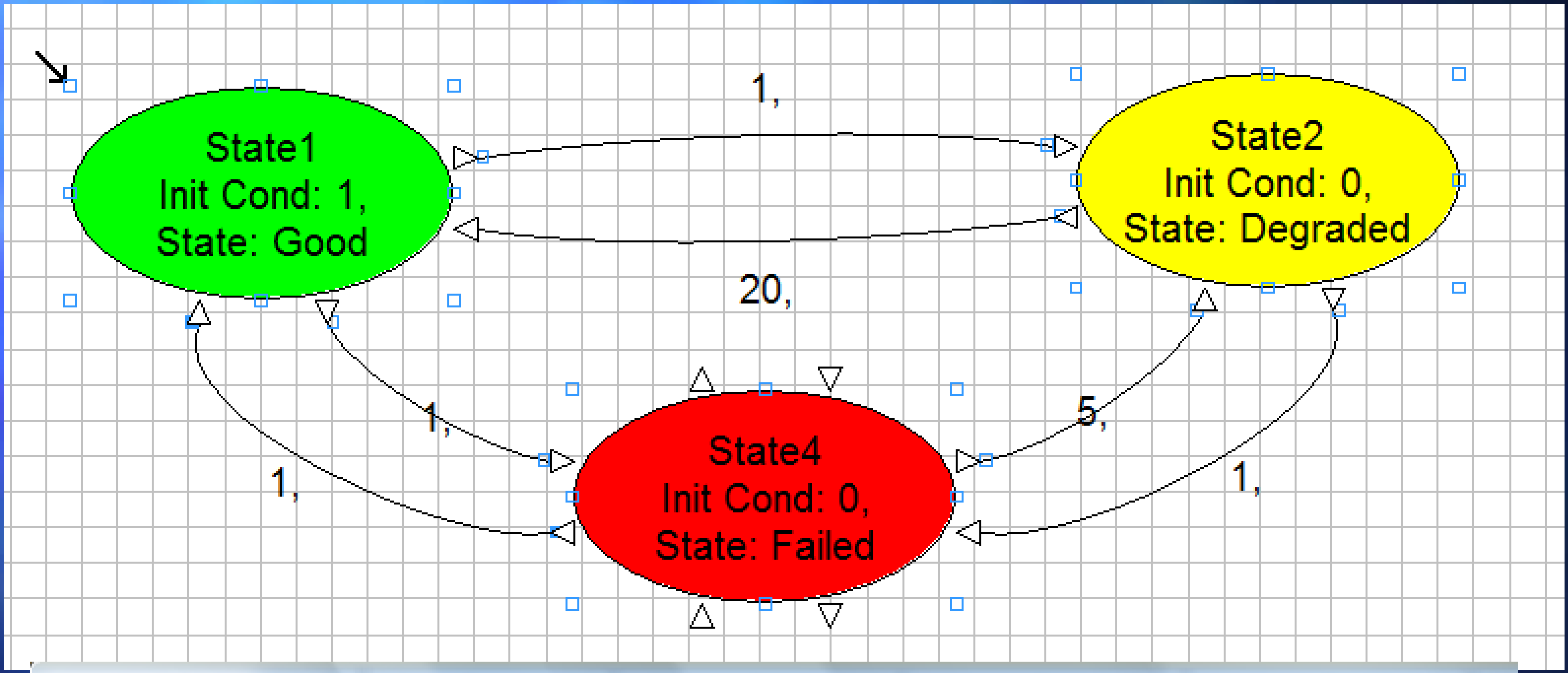
CPU_OK

Reward rate:

100

State	Reward
CPU_OK	100
Degradable	20
Faulty_CPU	0

Continuos Time Markov Chain



Markov Transitions

	Identifier	Description	Input State	Output State	Transition Reward	Rate	Cost
1	Transition1		State1	State2	Loss	1,000000	0,00
2	Transition2		State2	State1	Loss	20,000000	10,00
3	Transition3		State2	State4	Loss	1,000000	0,00
4	Transition4		State4	State2	Loss	5,000000	20,00
5	Transition5		State1	State4	Loss	1,000000	0,00
6	Transition6		State4	State1	Loss	1,000000	40,00

Continuos Time Markov Chain

Steady State Results:

Result	Value
Availability	0,857143
Cost Per Unit Time	765,714286
MTBF	1,166667
MTTR	0,166667

Results at time 1000,000000:

Result	Value
Availability	0,857143
Cost Per Unit Time	765,714286
Failure Rate	NA
Mean Availability	0,857163
Mean Cost	765,744808
Mean Unavailability	0,142837
Reliability	0,000000
Total Cost	765744,807972
Total Downtime	142,836554
Total Uptime	857,163446
Unreliability	1,000000

Time	Availability	Cost Per Unit Time	Failure Rate	Mean Availability	Mean Cost	Mean Unavailabi...	Reliability	Total Cost	Total Downtime	Total Uptime	Unreliabili
0	1,000000	1000,000000	1000000,000000	1,000000	1000,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
100,00	0,857143	765,714286	NA	0,857349	766,019508	0,142651	0,000000	76601,950829	14,265126	85,734874	1,000000
200,00	0,857143	765,714286	NA	0,857246	765,866897	0,142754	0,000000	153173,379401	28,550840	171,449160	1,000000
300,00	0,857143	765,714286	NA	0,857211	765,816027	0,142789	0,000000	229744,807972	42,836554	257,163446	1,000000
400,00	0,857143	765,714286	NA	0,857194	765,790591	0,142806	0,000000	306316,236543	57,122269	342,877731	1,000000
500,00	0,857143	765,714286	NA	0,857184	765,775330	0,142816	0,000000	382887,665115	71,407983	428,592017	1,000000
600,00	0,857143	765,714286	NA	0,857177	765,765156	0,142823	0,000000	459459,093686	85,693697	514,306303	1,000000
700,00	0,857143	765,714286	NA	0,857172	765,757889	0,142828	0,000000	536030,522258	99,979412	600,020588	1,000000
800,00	0,857143	765,714286	NA	0,857169	765,752439	0,142831	0,000000	612601,950829	114,265126	685,734874	1,000000
900,00	0,857143	765,714286	NA	0,857166	765,748199	0,142834	0,000000	689173,379401	128,550840	771,449160	1,000000
1000,00	0,857143	765,714286	NA	0,857163	765,744808	0,142837	0,000000	765744,807972	142,836554	857,163446	1,000000

Continuos Time Markov Chain

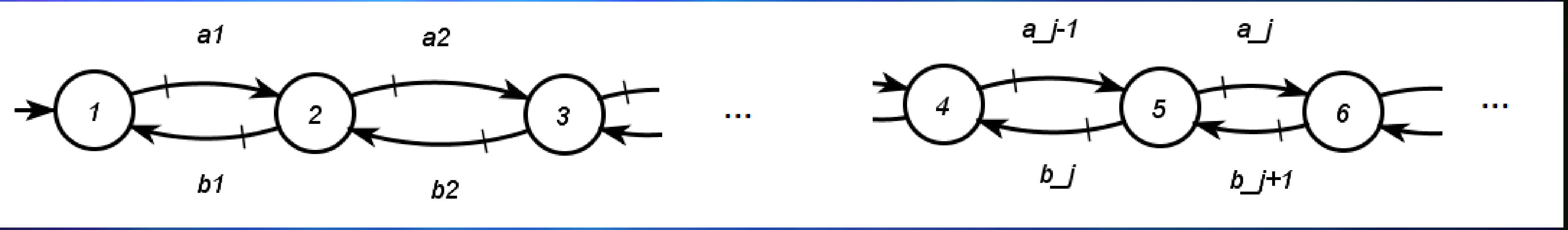
- *Birth-death chain*

$$f(i, a_i) = i + 1$$

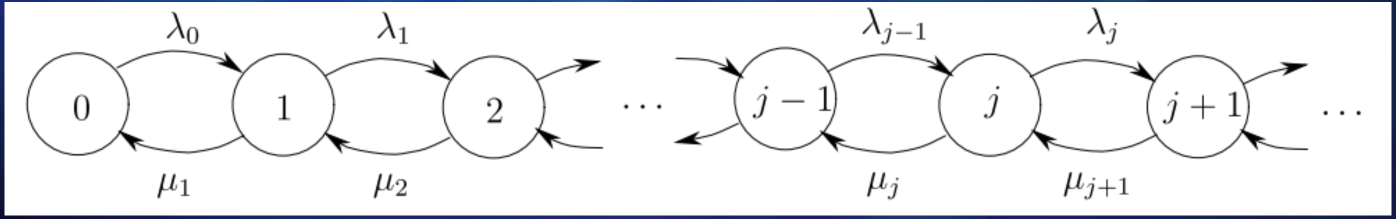
$$f(i+1, b_i) = i$$

enquanto $i > 0$

Considere o automata

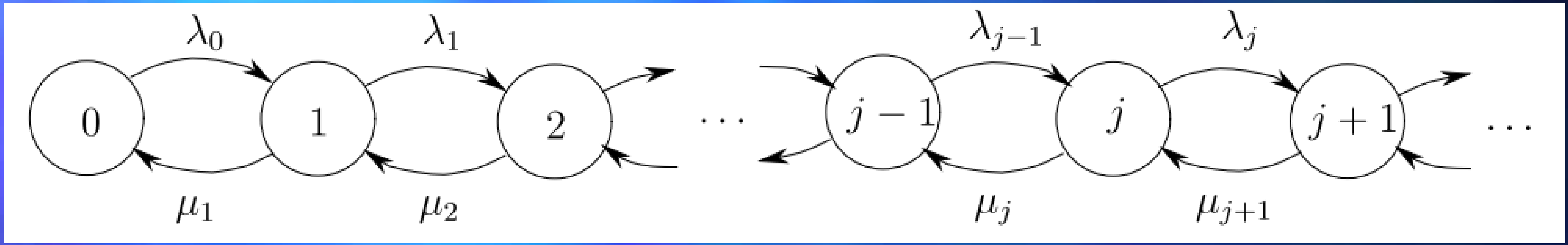


CTMC



Continuos Time Markov Chain

- *Birth-death chain*



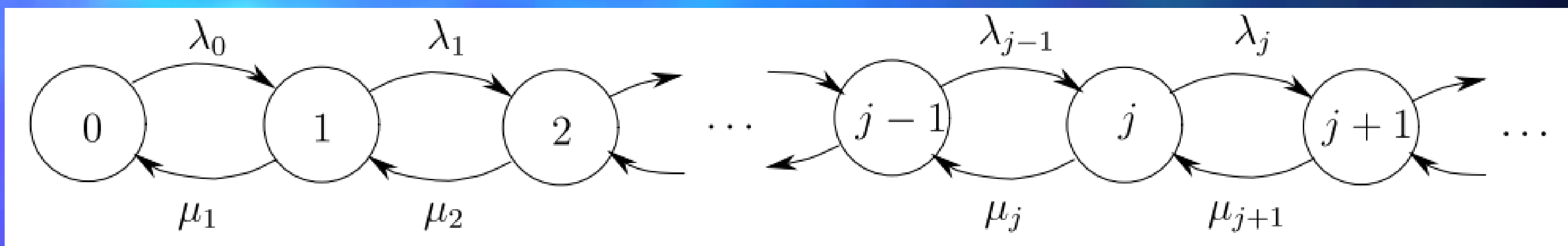
$$-(\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0,$$

$$-\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

Continuos Time Markov Chain

- Birth-death chain



$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

$$\mu_2\pi_2 = -\lambda_0\pi_0 + (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1$$

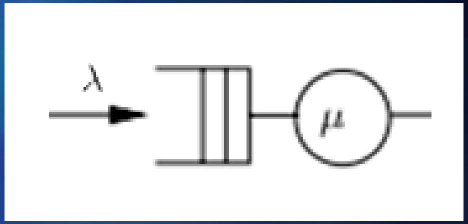
$$\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$$

$$\pi_j = \left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}\right)\pi_0$$

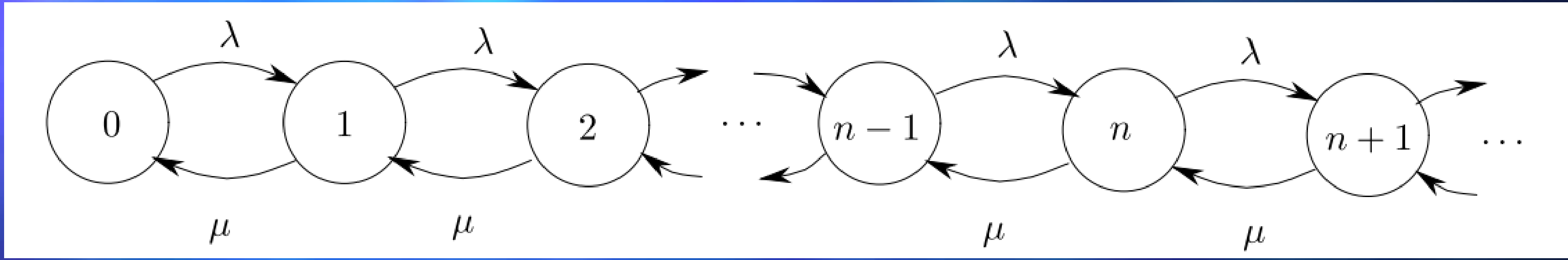
$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}\right)}$$

Continuos Time Markov Chain

- *M/M/1 queueing system*



Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo i, tem-se:



$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}$$

Desde que $\lambda < \mu$

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Utilização

$$\rho = \lambda/\mu$$

$$0 \leq \rho < 1$$

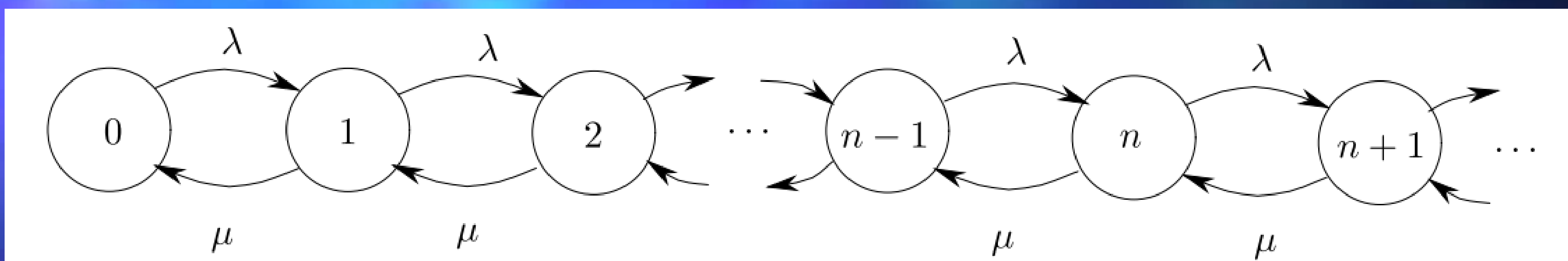
$$\pi_0 = 1 - \rho$$

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1 - \rho)$$

Continuos Time Markov Chain

- *M/M/1 queueing system*

Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo i, tem-se:



Utilização

$\rho = \lambda/\mu$

Desde que $\lambda < \mu$

$0 \leq \rho < 1$

$\pi_0 = 1 - \rho$

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1 - \rho)$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Excel

QBM

M/M/1

Continuos Time Markov Chain

- *M/M/1 queueing system*

Throughput

Desde que $\lambda < \mu$

O throughput é λ

Se $\lambda > \mu$

throughput é μ

Tamanho médio da fila

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$0 \le \rho < 1$

$E[X] \rightarrow \infty$ $\quad$ $\rho \rightarrow 1$

Mean response time

$$E[S] = \frac{1/\mu}{1-\rho}$$

$0 \le \rho < 1$

$E[S] \rightarrow \infty$ $\quad$ $\rho \rightarrow 1$

Mean waiting time

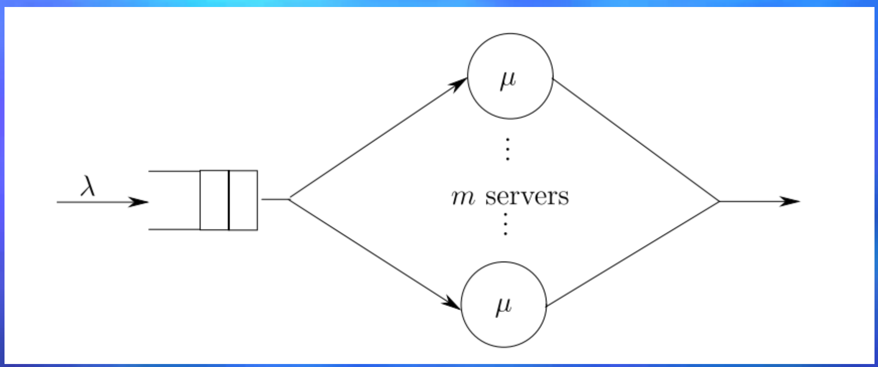
$$E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$E[W] \rightarrow \infty$

Continuos Time Markov Chain

- *M/M/m queueing system*

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!} & n = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \dfrac{m^m}{m!}\rho^n & n = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

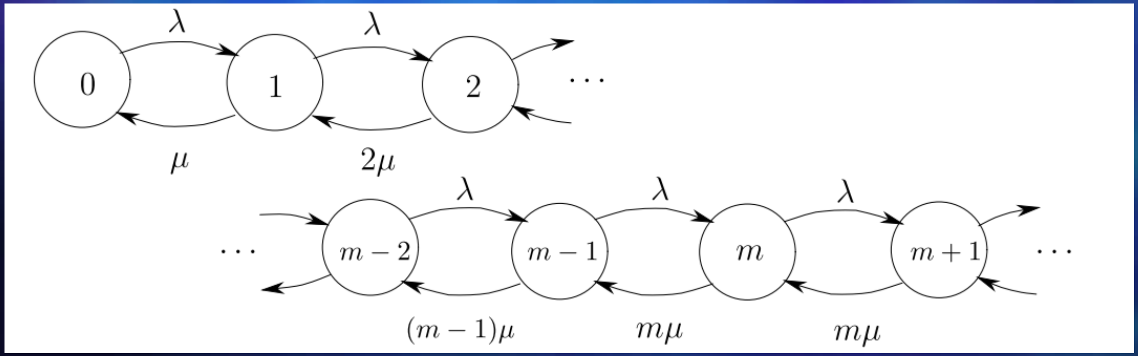


$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

Utilização

$$\rho = \lambda / m\mu$$

Throughput



Desde que $\lambda < \mu m$

O throughput é λ

Se $\lambda \geq \mu m$

throughput é μm

Excel

QBM

M/M/m

Continuos Time Markov Chain

- *M/M/m queueing system*

Tamanho médio da fila

$$E[X] = m\rho + \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\rho}{(1-r)^2}\pi_0$$

$\lambda < \mu\, m$

$$E[X] \rightarrow \infty$$

$\lambda \geq \mu\, m$

Fórmula C de Erlang

Probabilidade de um cliente chegar

e não encontrar o servidor disponível

$$P_Q = P[X \geq m] = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n$$

$$P_Q = \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\pi_0}{1-\rho}$$

Mean response time

$$E[S] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\pi_0}{m(1-\rho)^2}$$

$\lambda < \mu\, m$

$$E[S] \rightarrow \infty$$

$\lambda \geq \mu\, m$

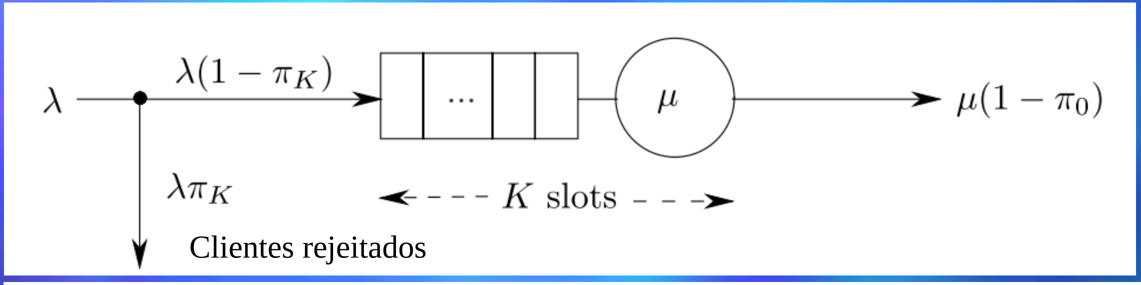
Excel QBM *M/M/1/k*

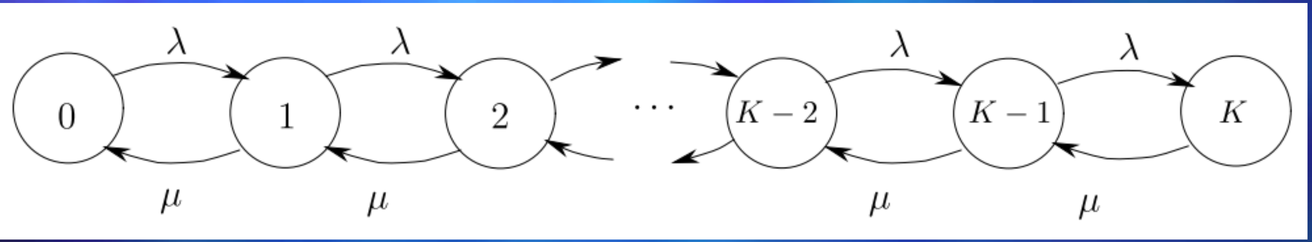
Continuos Time Markov Chain

- *M/M/1/K queueing system*

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n & \text{if } 0 \le n \le K \\ 0 & \text{if } n > K \end{cases}$$





Utilização

Se $\lambda > \mu$ a utilização $\longrightarrow 1$

Se $\lambda < \mu$ a utilização $= 1 - \pi_0$

Probabilidade de Descarte

$$P_D = \pi_K = (1-\rho)\frac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

Excel

QBM

M/M/1/k

Continuos Time Markov Chain

- *M/M/1/K queueing system*

Tamanho médio da fila

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right]$$

Mean response time

$$E[S] = \frac{E[X]}{\lambda(1-\pi_K)}$$

$\lambda(1-\pi_K)$- taxa de chegada dos clientes admitidos

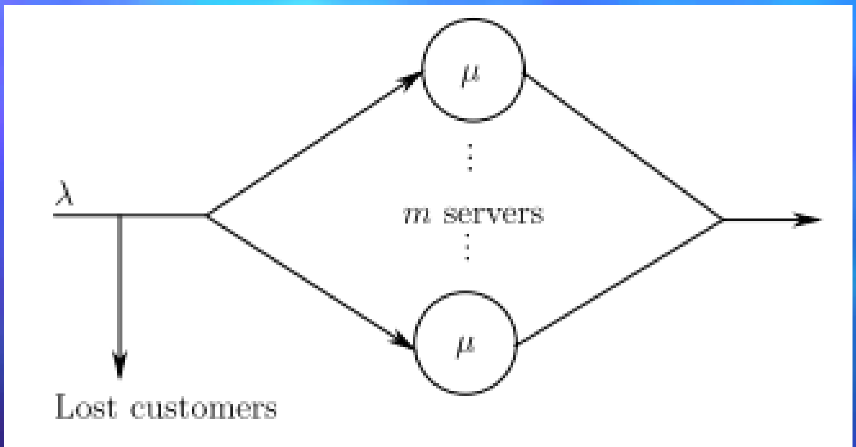
Excel

QBM

M/M/m/m

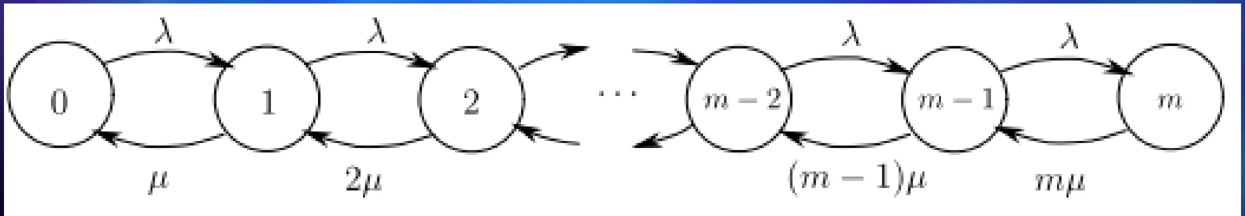
Continuos Time Markov Chain

- *M/M/m /m queueing system*



$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\lambda^n}{(\mu)(2\mu)\cdots(n\mu)}\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$$



$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{if } 0 \le n < m \\ 0 & \text{if } n \ge m \end{cases}$$

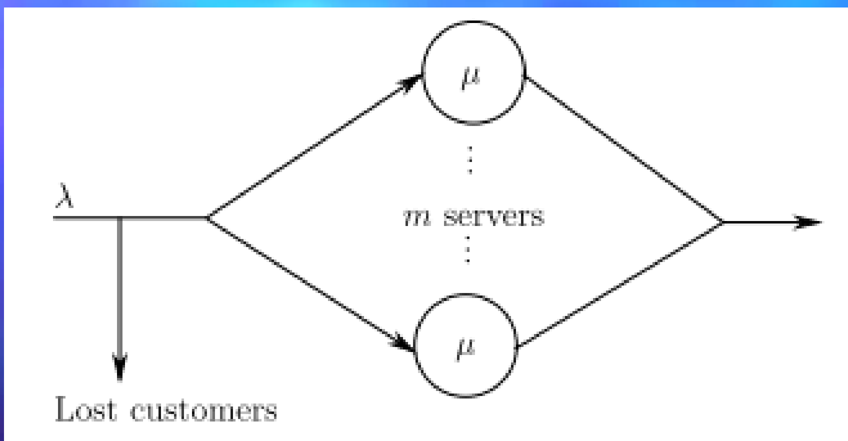
$$\mu_n = n\mu \qquad \text{for all } n = 1, 2, \ldots, m$$

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^j}{j!}} \dfrac{\rho^n}{n!} & \text{if } 0 \le n \le m \\ 0 & \text{if } n > m \end{cases}$$

Excel QBM Examples M/M/m/m

Continuos Time Markov Chain

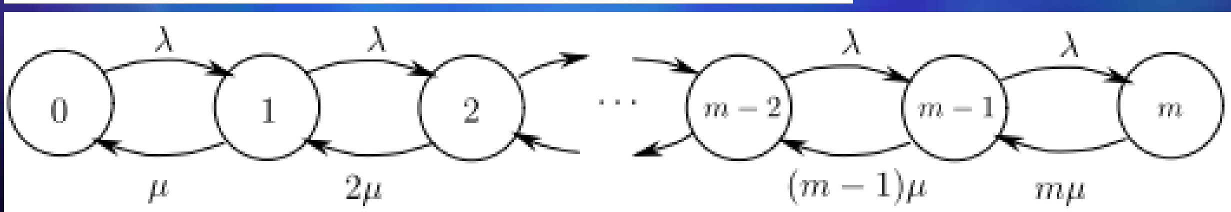
- *M/M/m /m queueing system*



Blocking Probability

$$P_B = \pi_m = \frac{\rho^m / m!}{\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^j}{j!}}$$

Erlang B formula



$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{if } 0 \le n < m \\ 0 & \text{if } n \ge m \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu \qquad \text{for all } n = 1, 2, \ldots, m$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q\ ,\ \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$$

Onde $\pi_{si}(t)$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

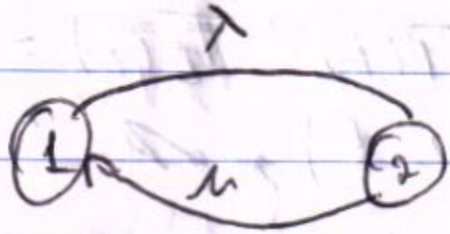
Métodos de Solução:

- Solução via Sistemas de Eq. Diferencial Ordinária
- Solução através de transformada de Laplace
- Runge-Kutta
- Uniformização (Transformar CTMC em DTMC)

Continuos Time Markov

- Soluções Transientes (*Laplace Tr*

$f(s) = a \times \frac{1}{s}$	$f(t) = a$
$LT^{-1}[f(s)] = a$	$LT[f(t)] = \frac{a}{s}$
$f(s) = a \times \frac{1}{s+b}$	$f(t) = a e^{-bt}$
$LT^{-1}[f(s)] = LT^{-1}[a \frac{1}{s+b}] = a e^{-bt}$	$LT[f(t)] = a \times \frac{1}{s+b}$
	$\frac{df(t)}{dt} = f(t)$
	$LT\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\, LT[f(t)] + f(0$



Find transient solution through LT.

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} + \lambda \pi_1(t) - \mu \pi_2(t) = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu \pi_2(t) - \lambda \pi_2(t) = 0 \quad \text{(II)}$$

by LT:

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = s\, LT[\pi_1(t)] - \pi_1(0)$$

Continuos Time Markov Chain

Then, considering (I) :

$s\,LT[\pi_1(t)] - \pi_1(0) + LT[\lambda\,\pi_1(t)] = LT[\mu\,\pi_2$

$s\,LT[\pi_1(t)] - 1 + LT[\lambda] \times LT[\pi_1(t)] = LT[\mu] \times LT[$

Stop here for a while.

Let's consider (II) :

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu\,\pi_2(t) - \lambda\,\pi_1(t) = 0$$

We know that $\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$,

then: $\pi_1(t) = 1 - \pi_2(t)$, so :

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu\,\pi_2(t) - \lambda(1 - \pi_2(t)) =$$

$f(s) = a \times \frac{1}{s}$	$f(t) = a$
$LT^{-1}[f(s)] = a$	$LT[f(t)] = \frac{a}{s}$
$f(s) = a \times \frac{1}{s+b}$	$f(t) = a\,e^{-bt}$
$LT^{-1}[f(s)] = LT^{-1}[a \cdot \frac{1}{s+b}] = a\,e^{-bt}$	$LT[f(t)] = a \times \frac{1}{s+b}$
	$\frac{df(t)}{dt} = f'(t)$
	$LT\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\,LT[f(t)] + f(0)$

Continuos Time Markov Chain

Applying LT:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = s\,LT[\pi_2(t)] - \pi_2(0)$$

As $\pi_2(0) = 0$, then:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = s\,LT[\pi_2(t)].$$

Hence:

$$s\,LT[\pi_2(t)] + LT[\mu\,\pi_2(t)] - LT[\lambda - \lambda\,\pi_2(t)] = 0$$

$$s\,LT[\pi_2(t)] + LT[\mu\,\pi_2(t)] - LT[\lambda] + LT[\lambda\,\pi_2(t)] = 0$$

$f(s) = a \times \frac{1}{s}$	$f(t) = a$
$LT^{-1}[f(s)] = a$	$LT[f(t)] = \frac{a}{s}$
$f(s) = a \times \frac{1}{s+b}$	$f(t) = a\,e^{-bt}$
$LT^{-1}[f(s)] = LT^{-1}[a \cdot \frac{1}{s+b}] = a\,e^{-bt}$	$LT[f(t)] = a \times \frac{1}{s+b}$
	$\frac{df(t)}{dt} = f(t)$
	$LT\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s\,LT[f(t)] + f(0$

Continuos Time Markov Chain

$$s\, LT[\pi_2(t)] + \mu\, LT[\pi_2(t)] - \frac{\lambda}{s} - \lambda\, LT[\pi_2(t)] = 0$$

$$s\, LT[\pi_2(t)] + (\mu + \lambda) \times LT[\pi_2(t)] - \frac{\lambda}{s} =$$

$$LT[\pi_2(t)]\,(s + \mu + \lambda) = \frac{\lambda}{s}$$

$$\boxed{LT[\pi_2(t)] = \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}}$$

$$\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$$

$$LT[\pi_1(t) + \pi_2(t)] = LT[1]$$

$$LT[\pi_1(t)] + LT[\pi_2(t)] = \frac{1}{s}$$

$$LT[\pi_1(t)] = \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}$$

Continuos Time Markov Chain

As $LT[\pi_2(t)] = \dfrac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}$,

then applying $L^{-1}[LT[\pi_2(t)]] =$

So:

$$\pi_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right]$$

We may say that, there are A and B, that:

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\mu+\lambda}\right]$$

So

$$\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\mu+\lambda}$$

$$\lambda = A(s+\mu+\lambda) + Bs$$

Continuos Time Markov Chain

$$\lambda = s(A+B) + A(\mu+\lambda)$$

for $s = 0$

$$\boxed{A = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$$

then

$$\lambda = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(s+\mu+\lambda) + Bs$$

$$\lambda = \frac{\lambda s}{\mu+\lambda} + \lambda\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right) + B\cancel{s}$$

$$\lambda = \frac{\lambda s}{\mu+\lambda} + \lambda\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu+\lambda}\right) + Bs$$

$$\boxed{B = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$$

Continuos Time Markov Chain

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(\mu+\lambda)} + \frac{\lambda}{(s+\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda} \times \frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda} \times \frac{1}{s+\mu+\lambda}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)}$$

Continuos Time Markov Chain

$$\pi_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 + \right.$$

$$\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1 \quad \therefore \quad \pi_2(t)$$

$$\pi_1(t) = 1 - \pi_2(t), \text{ then}$$

$$\pi_1(t) = 1 - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 + e^{-(\mu+\lambda)t}\right.$$

$$\pi_1(t) = \frac{\mu + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda}}{\mu+\lambda}\left(1 + e^{-(\mu+\lambda)t}\right.$$

Continuos Time Markov Chain

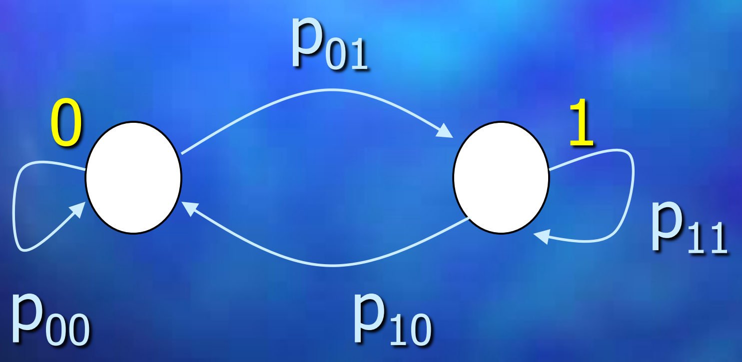
$$\boxed{\pi_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}$$

$$\boxed{\pi_2(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}$$

Discrete Time Markov Chain

- O comportamento de uma rede estocástica é representado por DTMC

Matriz de Propabilidades de Próximo Estados



$$
\begin{array}{ccc} & 0 & 1 & \\ P = & \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}
$$

Discrete Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$A_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$

$A_2=(a_{21}\ a_{22}\ a_{23})$

$A_3=(a_{31}\ a_{32}\ a_{33})$

a_{ij} - probabilidade

$\sum_{si \in S} a_{ij}=1$

$\Pi \,.\, P = \Pi$, $\sum_{si \in S} \pi_i=1$, onde π_i fornece o número relativo de visitas ao estado s_i

Chamar o modelo C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl

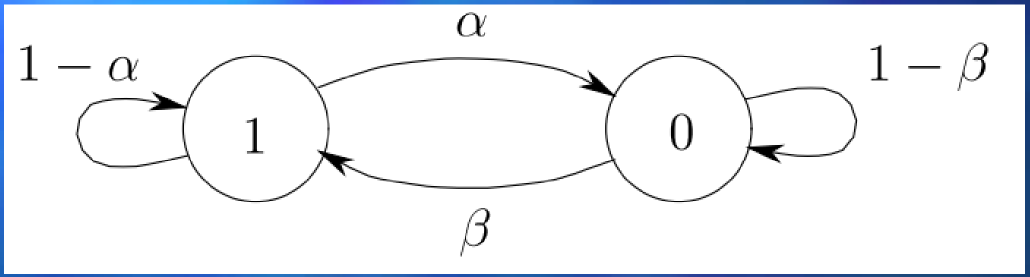
Mathematica

Mathematica DTMC Int

Discrete Time Markov Chain

Considere uma máquina que pode estar em um dos dois estados, UP ou DOWN, onde 1 denota UP e 0 denota DOWN. O estado do máquina é verificada a cada hora, e nós horas de índice k = 0, 1,. .

Consideremos que se a máquina estiver UP, tem uma probabilidade α de falhar durante a próxima hora. Se a máquina estiver no estado DOWN, tem probabilidade β de sere reparada durante a próxima hora.



$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Chamar o modelo C:\Users\Paulo Maciel\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl

Mathematica

Mathematica DTMC Int

Excel DTMC_Int

Discrete Time Markov Chain

- Soluções para Transiente

$\Pi(1) = \Pi(0)\,P,$

$\Pi(2) = \Pi(1)\,P = \Pi(0)\,P^2$

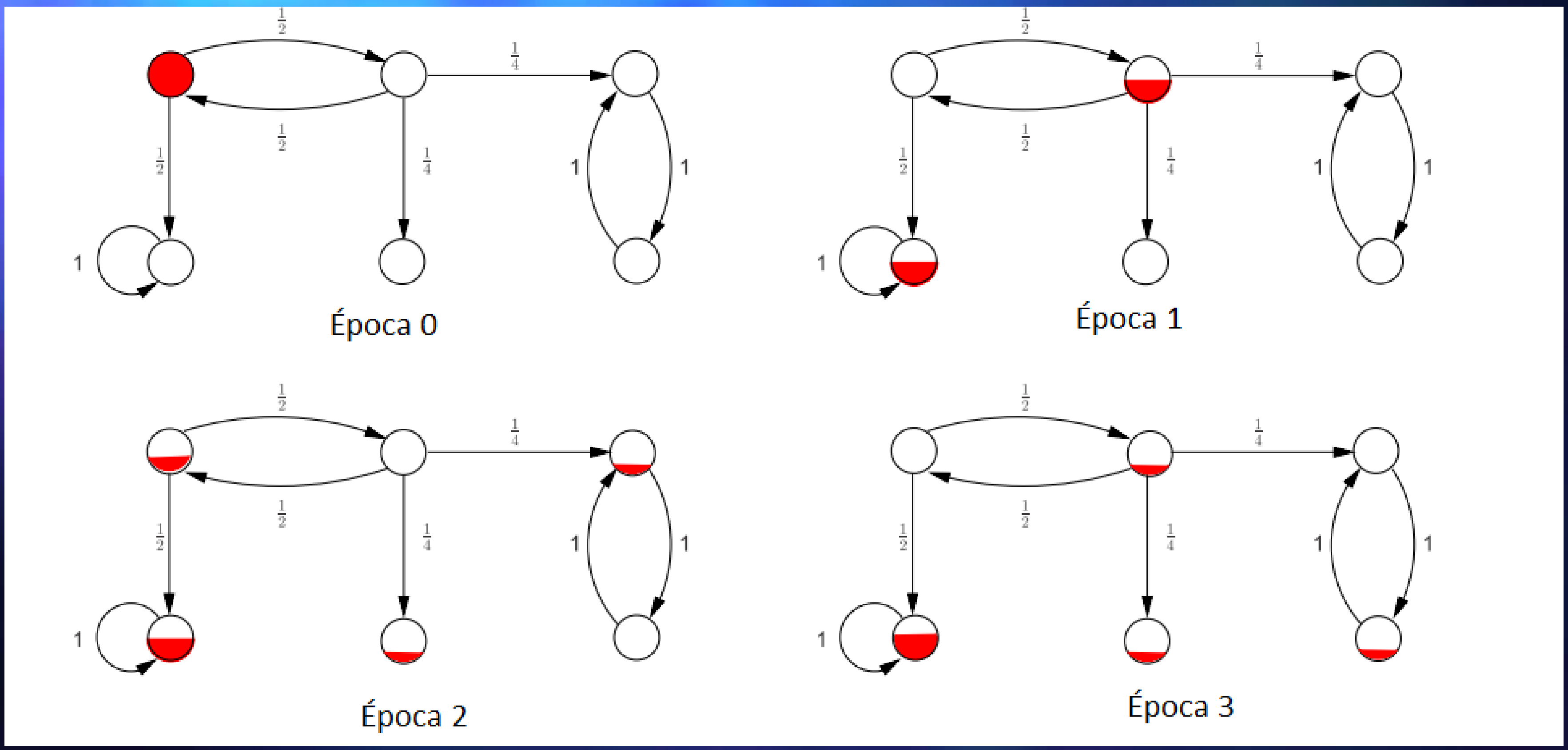
$\Pi(k) = \Pi(0)\,P^n\ ,\ k=1,2,\ldots$

Discrete Time Markov Chain

Mathematica

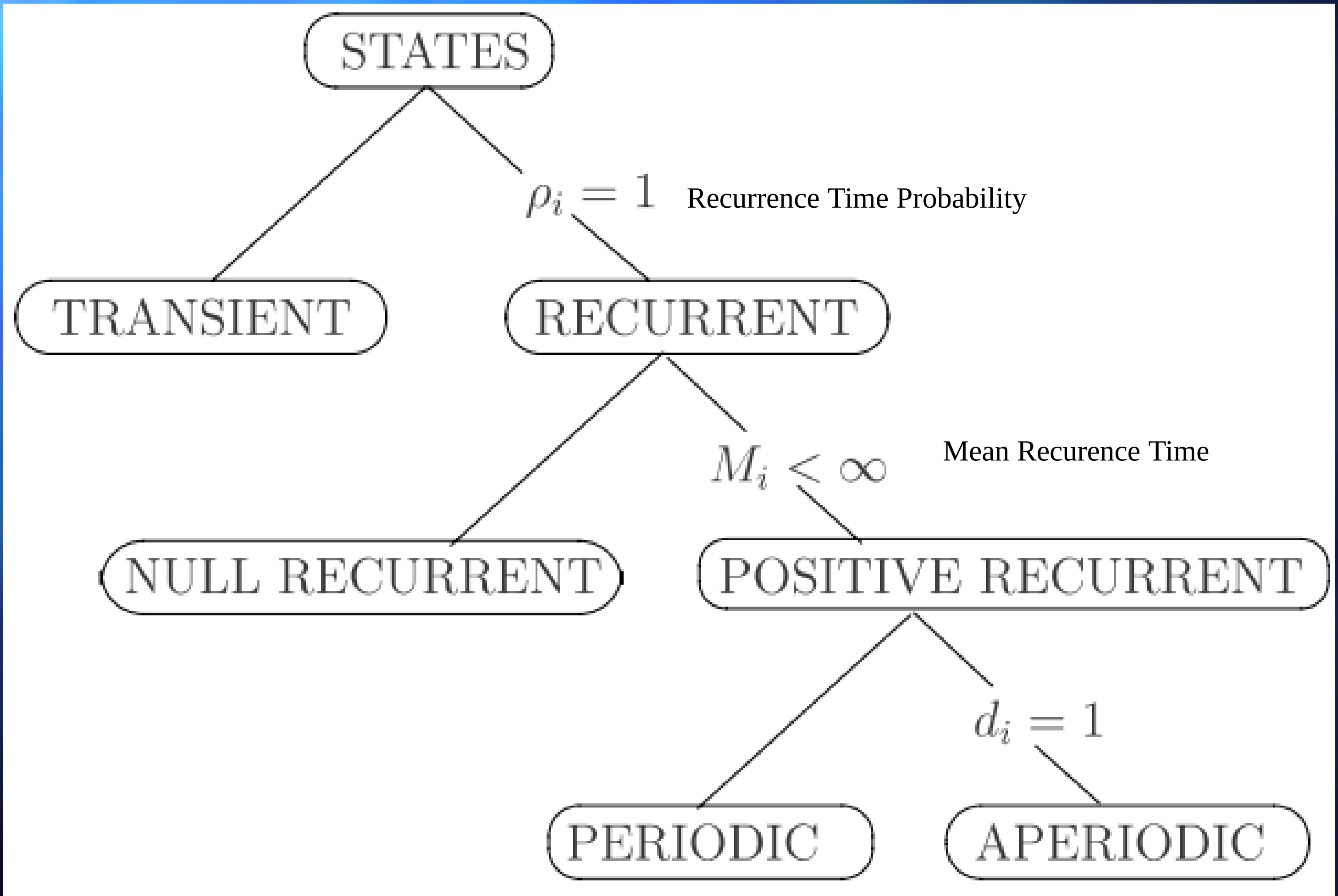
Mathematica DTMC Int

- Evolução de uma DTMC



Discrete Time Markov Chain

Classificação dos estados



Discrete Time Markov Chain

Hitting Time

$$T_{ij} \equiv \min\{k > 0 : X_0 = i, X_k = j\}$$

Recurrence Time

$$T_{ii}$$

Probabilidade do Recurrence Time ser k

$$\rho_i^k \equiv P[T_{ii} = k]$$

Probabilidade do Recurrence Time

$$\rho_i = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^k$$

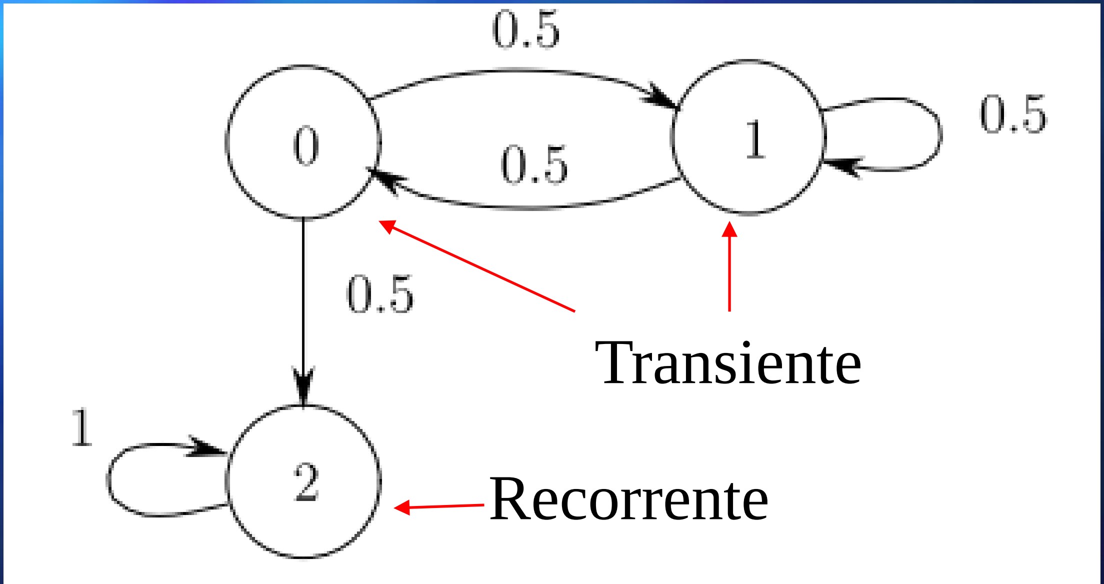
Discrete Time Markov Chain

Para um estado recorrente i

$$\rho_i = 1$$

Para um estado transiente i

$$\rho_i < 1$$



Discrete Time Markov Chain

Tempo Médio de Recorrência ao estado i

$$M_i \equiv E[T_{ii}] = \sum_{k=1}^{\infty} k \rho_i^k$$

Estado recorrente positivo

$$M_i < \infty$$

Estado recorrente nulo

$$M_i = \infty$$

Discrete Time Markov Chain

Estado recorrente positivo

$M_i < \infty$

Considere o conjunto $\{n > 0 : p_{ii}^n > 0\}$

E seja d máximo divisor comum deste conjunto.

Estado i é periódico se $d \geq 2$

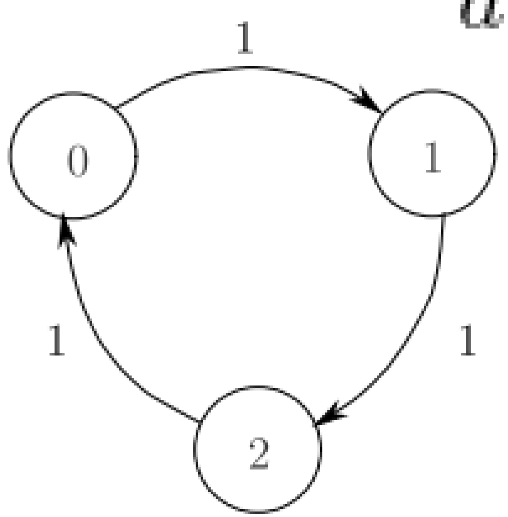
Estado i é aperiódico se $d = 1$

Discrete Time Markov Chain

Estado i é periódico se

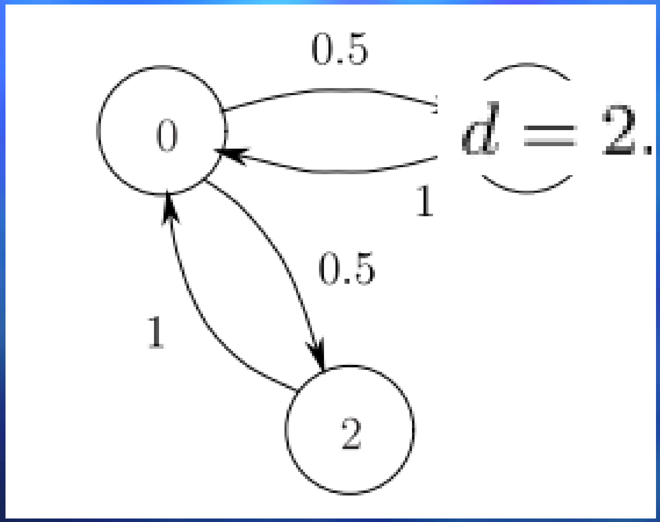
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d = 3$$



Discrete Time Markov Chain

Estado i é aperiódico se $d = 1$



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Discrete Time Markov Chain

$HT(i) -\ Holding\ Time\ at\ state\ i$

$$MHT(i) = E[HT(i)] = \frac{1}{\sum_{\forall j, j \neq i} p_{i,j}} = \frac{1}{1 - p_{i,i}} \qquad p_{i,j} \in [0,1],\ \sum_{\forall j} p_{i,j} = 1$$

$MHT(i) - Mean\ Holding\ Time\ at\ state\ i - Mean\ Residence\ Time\ at\ state\ i$

$$Var[HT(i)] = \frac{p_{i,i}}{(1 - p_{i,i})^2}$$

$Var[HT(i)] - Variance\ of\ Holding\ Time\ at\ state\ i$

Discrete Time Markov Chain

Mean First Passage Time

$$MFPT(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} n \times f_{i,j}^{(n)}$$

$$= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} \times (1 + M_{k,j}) = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} \times M_{k,j}$$

$$MFPT(i,j) = 1 + \sum_{k} p_{i,j} \times M_{k,j} \; - p_{i,j} \times M_{j,j}$$

In matrix form:

$$M = \underline{1} + P(M - diag\{M\})$$

$\underline{1}$ denotes a square matrix whose elements are all equal to 1.

Mathematica

Discrete Time Markov Chain

Excel

Mean First Passage Time

The diagonal elements of M are the mean recurrence times, whereas the off-diagonal elements are the mean first passage times.

The matrix M may be obtained iteratively from:

$$M^{(k+1)} = \underline{\mathbf{1}} + P(M^{(k)} - diag\{M^{(k)}\}), \;\; M^{(0)} = \underline{\mathbf{1}}$$

Discrete Time Markov Chain

Uma DTMC aperiódica na qual todos os estados são recorrentes positivos é Ergódica.

$$MRT(i) = \frac{1}{\pi_i}$$

π_i *é a probabilidade estacionária do estado i de uma DTMC ergódica.*

$MRT(i)$ – *Mean Recurrence Time to state i*

Mean Time at state i in a period T (at steady state)

$$MTS(i) = \pi_i \times T$$

Average Number of Visits to State i between Two Sucessive Visits to State j (at steady state)

$$ANV(i, j) = \frac{\pi_i}{\pi_j}$$

Discrete Time Markov Chain

Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains

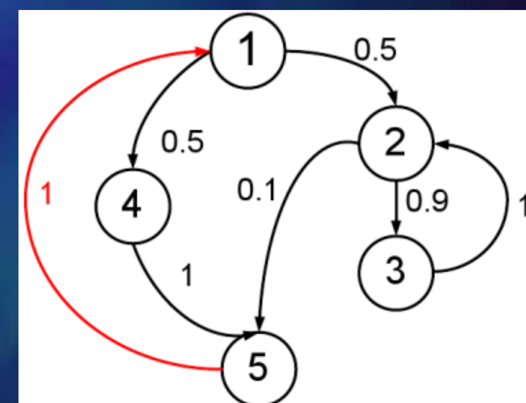
More specifically, the Control Flow Graph (CFG) of the application is mapped into an ergodic DTMC. In this approach, energy consumption as well as execution time are numerically evaluated.

```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else {  //  <0.5>
     x = 0;
    }

}
```

Modeling. Each basic block[1] B_i in the CFG is mapped into a state X_i in the DTMC. Similarly, control flow edges are mapped as transitions between states and are labeled by the state transition probabilities, as:

$$P(B_i, B_j) = Pr(B_i \, jumps \, to \, B_j) \; ,$$

which defines the probability of executing B_j after B_i.



Discrete Time Markov Chain

Mathematica

Outro exemplo

Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains

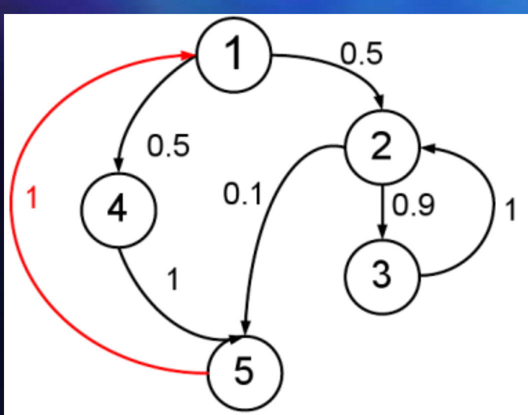
```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else {  //  <0.5>
     x = 0;
   }

}
```

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$0 \le p_{ij} \le 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \text{ for each } i.$$

Excel e abrir também o SHARPE:

C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\ext_dtmc.mkv)



$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$$

$$v_j = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

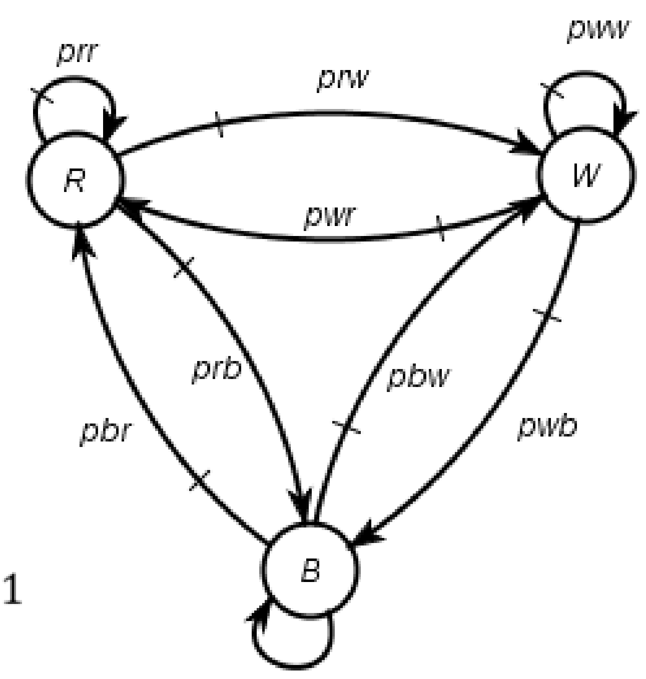
$$E = \sum_{\substack{b = all \\ basic \\ blocks}} v_b \times \Big(\sum_{\substack{c = all \\ instruction \\ classes}} I_{b,c} \times (e_c + O_b \times e_o) \Big)$$

$$T = \sum_{\substack{b = all \\ basic \\ blocks}} v_b \times \Big(\sum_{\substack{c = all \\ instruction \\ classes}} I_{b,c} \times (t_c + O_b \times t_o) \Big)$$

Representação dos Estados de um Processador

DTMC

Geração da DTMC (do trace) -Excel



- Probabilidade do processador está no estado i

$$\Pi = (\pi_i)_{|S|}, \qquad \pi_i \in [0,1], \qquad \sum_{\forall i} \pi_i = 1$$

- Tempo médio de permanência em cada estado i

$$MHT(i) = \frac{1}{\sum_{\forall j, i \neq j} P_{ij}}, \qquad P_{ij} \in [0,1], \qquad \sum_{\forall j, i \neq j} P_{ij} = 1$$

- Tempo médio de recorrência a cada estado i

$$MRT(i) = \frac{1}{\pi_i}, \qquad \pi_i \in [0,1], \qquad \sum_{\forall i} \pi_i = 1$$

- Métricas relacionadas

Representação dos Estados de um Processador

DTMC

Geração da DTMC (do trace) -Excel

Π_0_(R)	Π_0_(W)	Π_0_(B)	
0	1	0	Π_0
Π_i(R)	Π_i(W)	Π_i(B)	
0.68742	0.162503228	0.150077	Π_i
mrt_(R)	mrt(W)	mrt(B)	
1.454714	6.153723928	6.663267	mrt(s)
mht_(R)	mht(W)	mht(B)	
3.35	1.13333333	1.363636	mht(s)

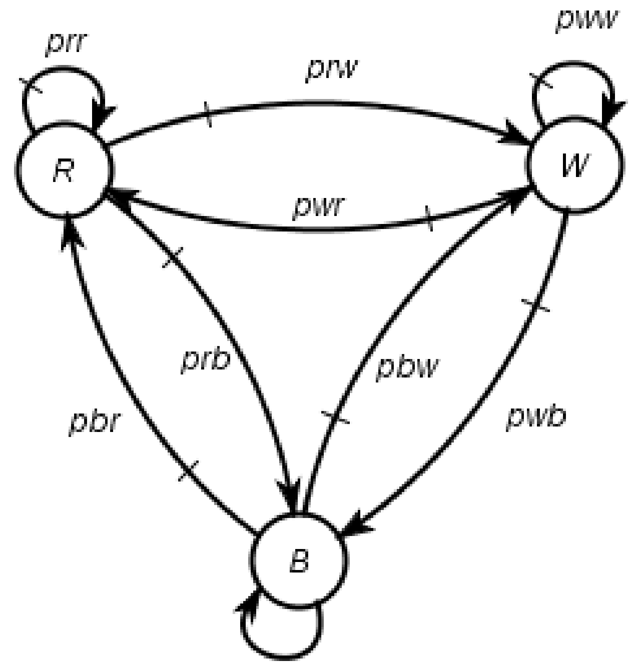
Trace - Processor State (mnemonic)
W
R
W
B
R
R
R
R
R
R
R
W
R
W
B
R

From_Trace to DTMC- Ge

Sum(R→W)	Sum(W→R)	Sum(R→B)	Sum(B→R)	Sum(W→B)	Sum(B→W)	Sum(R→R)	Sum(W→W)	Sum(B→B)
13	11	7	10	4	1	47	2	4
p(R→W)	p(W→R)	p(R→B)	p(B→R)	p(W→B)	p(B→W)	p(R→R)	p(W→W)	p(B→B)
0.13131313	0.11111111	0.0707071	0.1010101	0.04040404	0.01010101	0.47474747	0.02020202	0.04040404

Estimate from trace

Π(R)	Π(W)	Π(B)
0.67676768	0.17171717	0.1515152



$$\Pi \,.\, P = \Pi \,, \qquad \Sigma_{si \in S}\ \pi_i = 1$$

$$\Pi(k) = \Pi(0)\ P^n \,,\ k = 1, 2, \ldots$$

	R	W	B	
P =	0.70149254	0.19402985	0.1044776	R
	0.64705882	0.11764706	0.2352941	W
	0.66666667	0.06666667	0.2666667	B

Matrix P raised to the 100 power.

row/col	1	2	3	4
1	0.687	0.163	0.15	
2	0.687	0.163	0.15	
3	0.687	0.163	0.15	
4				

Continuos Time Markov Chain

Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \;, \; \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$$

Método da Uniformização

Transformar CTMC em DTMC

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \ , \ \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$$

Pela série de Taylor/MacLaurin, temos:

$$e^{Qt} = I + Qt/1! + (Qt)^2/2! + (Qt)^3/3! + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

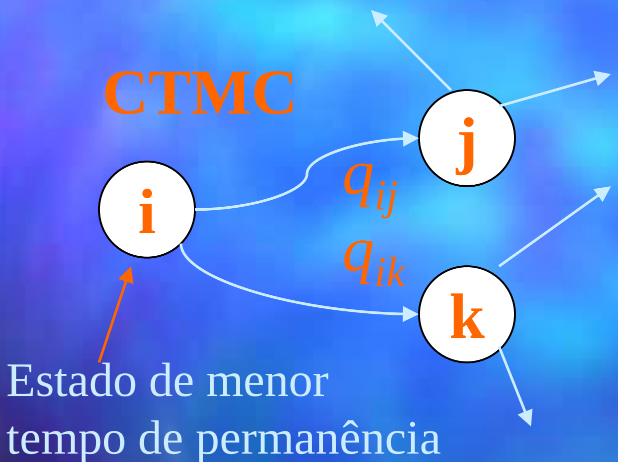
$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$$

- Problemas de arrendodamento ocorrem devido aos valores positivos e negativos que Q contém.
- A matriz $(Qt)^k$ se torna não-esparsa o que requer capacidade muito maior.

Para evitar estes problemas aplica-se o método chamado de uniformização (ou aleatorização - *Randomization*) também chamado de método de Jensen

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



$$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$$

$$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ii}|\}$$

Considere que tomemos uma taxa uniforme $\lambda \geq \Lambda(i)$ onde:

$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$ $(\lambda - \Lambda(i) = \nu)$

e $\nu \geq 0$ é a taxa de arbitrária de um evento fictício que não muda o estado *i*.

Tempo de permanência no estado i:

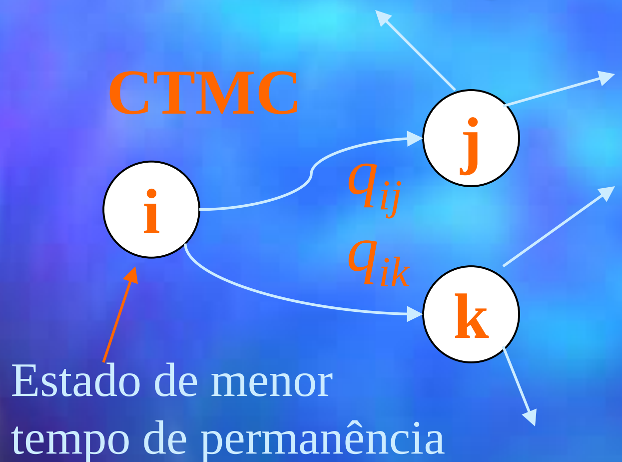
$1/(-q_{ii}) = 1/\ \Lambda(i)$

Sabe-se também que:

$p_{ij} = q_{ij}/\ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/\ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$

Sabe-se também que:

$p_{ij} = q_{ij} / \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik} / \Lambda(i)$

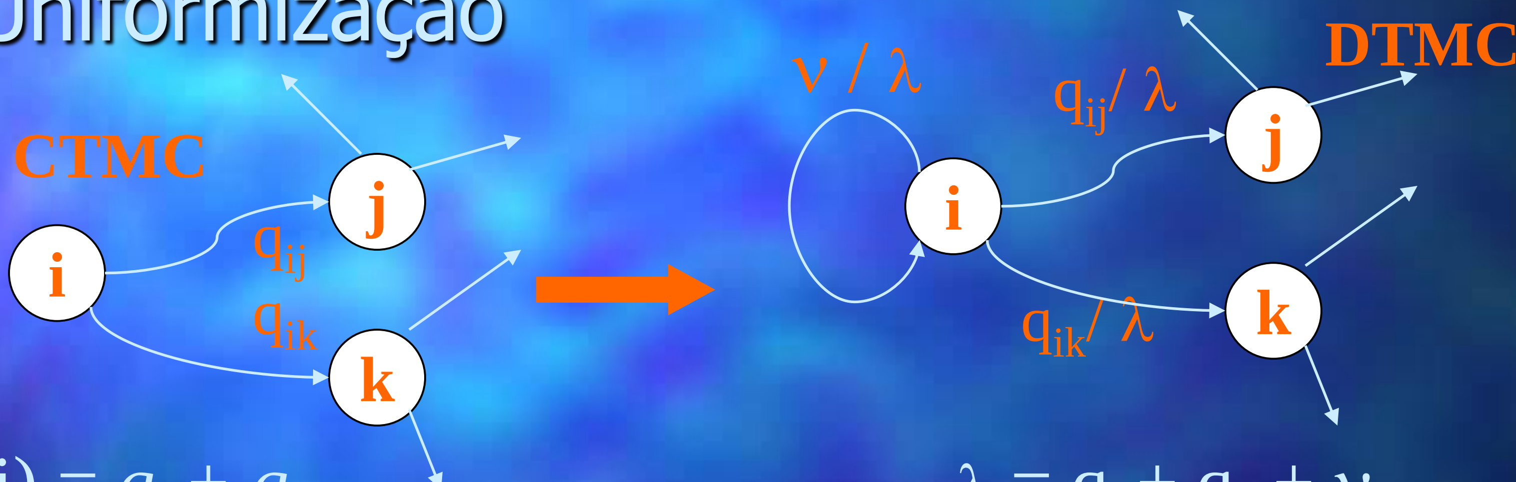
Em todos os estados na CMTC que tiverem tempo de permanência igual a $1/(-q_{ii})$, não teremos transição (auto-laço) na DTMC. Para os estados que tiverem tempo de permanência maior, ou seja uma época não é longa o suficiente, estes estados devem ser revisitados (auto-laço).

Tempo de permanência no estado i:

$\Delta t = 1/(-q_{ii}) = 1/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



$\Lambda(\mathrm{i}) = q_{ij} + q_{ik}$

$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$

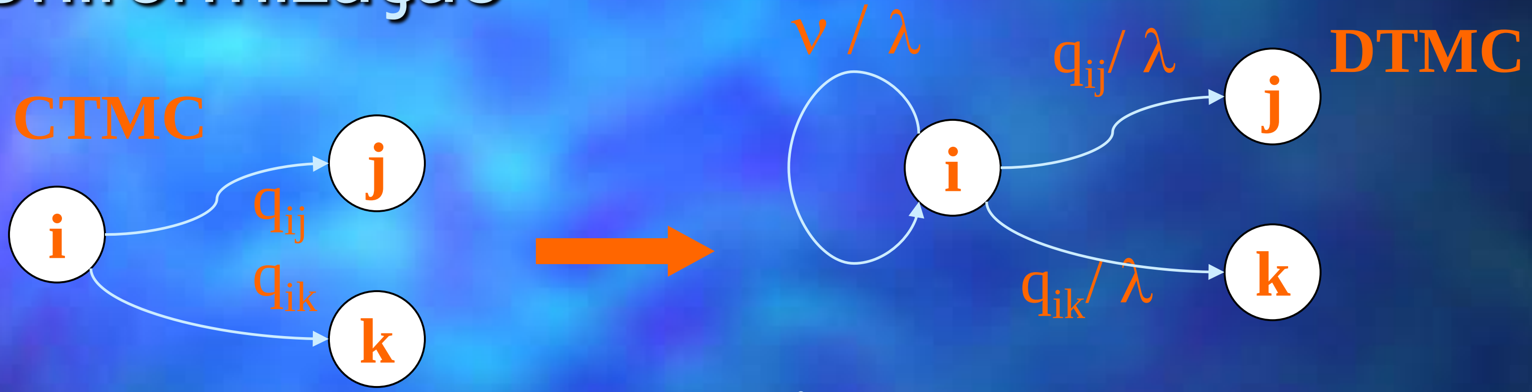
Sabe-se também que:

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$

$p_{ij} = q_{ij} / \Lambda(\mathrm{i})$ e $p_{ik} = q_{ik} / \Lambda(\mathrm{i})$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



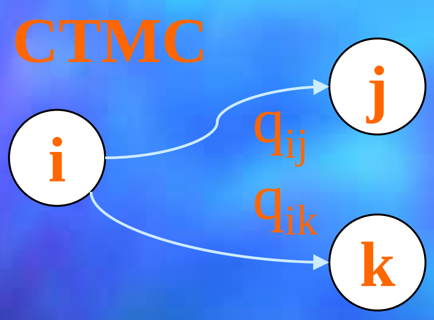
$$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$$

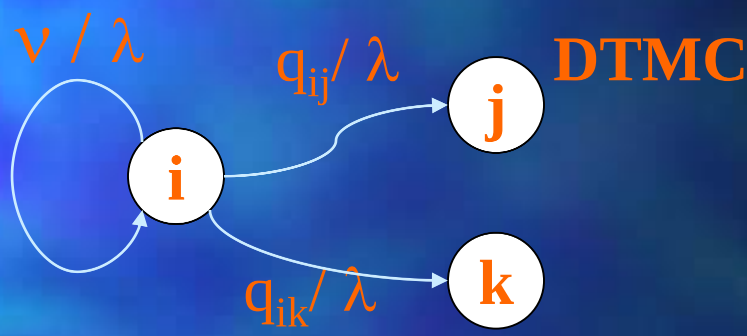
- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{-q_{ij}\}$$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização





$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{-q_{ij}\}$

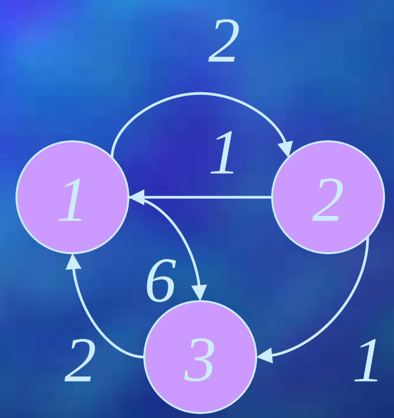
- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

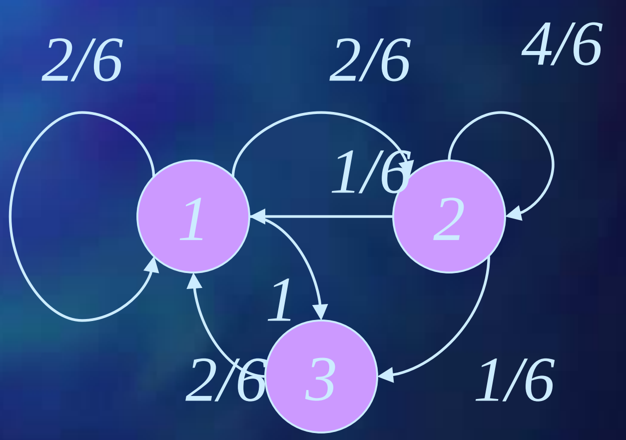
Outra interpretação:

Considerando $1/\lambda = \Delta t$ como uma época (time-step), $P = I + Q \, \Delta t$ é igual aos dois primeiros termos da expansão de Taylor, portanto a cadeia uniformizada é uma aproximação de primeira ordem da CTMC.

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$





- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)e^{\lambda(P - I)t}$$

$$= \Pi(0)e^{\lambda Pt}\, e^{-\lambda It} = \Pi(0)e^{\lambda Pt}\, e^{-\lambda t} =$$

$$\Pi(0)\, e^{-\lambda t}\, e^{\lambda Pt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n! =$$

$$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n!\ ,\ n \in \aleph$$

Na matriz P os valores estão entre 0 e 1. Não há valores negativos, o que evita os erros de arrendodamento que ocorrem na expansão com a matriz Q.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n! \quad , \quad n \in \aleph$$

$$\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n! \quad , \quad n \in \aleph$$

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\Pi(t)=\Pi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)P^n \quad , \quad n \in \aleph$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \Pi(0)P^n \quad , n\in \aleph$$

Uma solução iterativa:

$$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n) \quad , n\in \aleph$$

$$\hat{\Pi}(0)= \Pi(0), \quad \hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P \, , n\in \aleph$$

Podemos truncar a série de maneira que a se atinja uma exatidão $1-\varepsilon$ (ε = erro).

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\tilde{\Pi}(t)=\sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n)\,\hat{\Pi}(n) \quad , n \in \aleph$$

$$\|\Pi(t)- \tilde{\Pi}(t)\|_{\infty} = \|[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda P t)^n/n!] \; -$$

$$[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda P t)^n/n!\;]\|_{\infty} = \varepsilon$$

A desiguladade ocorre, pois $[P^n]_{ij}$ são menores ou iguais a um.

Portanto:

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! \le \varepsilon$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

Dado que $\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$ é uma distribuição discreta (Poisson), portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n) = 1 = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n) + \sum_{n=ke+1}^{\infty} \psi(\lambda t,n) \text{ , } n \in \aleph$$

Do slide anterior, tem-se:

$$\boxed{\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \le \varepsilon}$$

Desta forma:

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! = [1 - e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n!] \le \varepsilon$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transiente

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \;=\; [1 - e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n!\;] \le \varepsilon$$

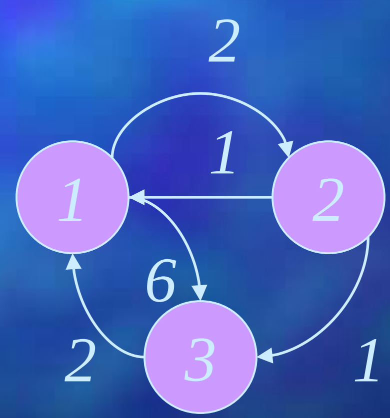
$$\sum_{n=0}^{ke} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \ge 1-\varepsilon \qquad\qquad \Rightarrow$$

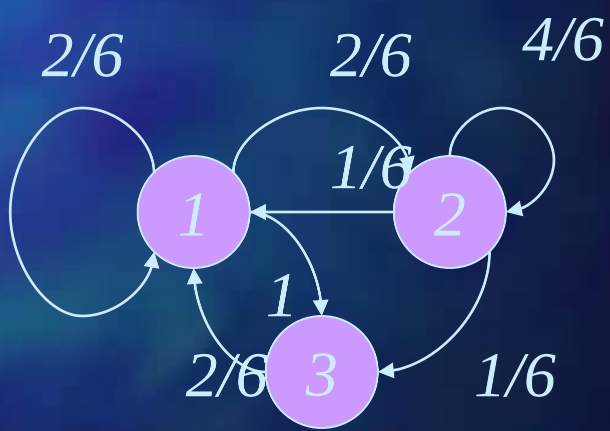
$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \ge (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{\forall s_i \in S}\{|q_{ij}|\}$





- *Considere* $\varepsilon = 10^{-4}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \geq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Para $t = 0.1$, tem-se: $(1-\varepsilon)\, e^{\lambda t} = (1-10^{-4})\, e^{0.6} = 1{,}8219$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \geq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

$$\sum_{n=0}^{4} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8214,$$

$$\sum_{n=0}^{5} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8221,$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(\lambda t, n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n! \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\tilde{\Pi}(t) = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t, n)\, \hat{\Pi}(n) \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0{,}1 \Rightarrow ke = 5$ Portanto:

$\hat{\Pi}(0) = \Pi(0) = (1,0,0)$ obtêm-se:

$\hat{\Pi}(1)$, $\hat{\Pi}(2)$, $\hat{\Pi}(3)$, $\hat{\Pi}(4)$, $\hat{\Pi}(5)$ através de

$$\hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P \ , \ n \in \{1,2,3,4,5\}$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(0.6,n) = [e^{-0.6} (0.6)^n]/n! \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n) \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\psi(0.6,0) = [e^{-0,6}(0,6)^0/0!]$

$\psi(0.6,1) = [e^{-0,6}(0,6)^1/1!]$

$\psi(0.6,2) = [e^{-0,6}(0,6)^2/2!]$

$\psi(0.6,3) = [e^{-0,6}(0,6)^3/3!]$

$\psi(0.6,4) = [e^{-0,6}(0,6)^4/4!]$

$\psi(0.6,5) = [e^{-0,6}(0,6)^5/5!]$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!\,,\ n \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\,\hat{\Pi}(n)\quad,\ n \in \{1,2,3,4,5\}$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

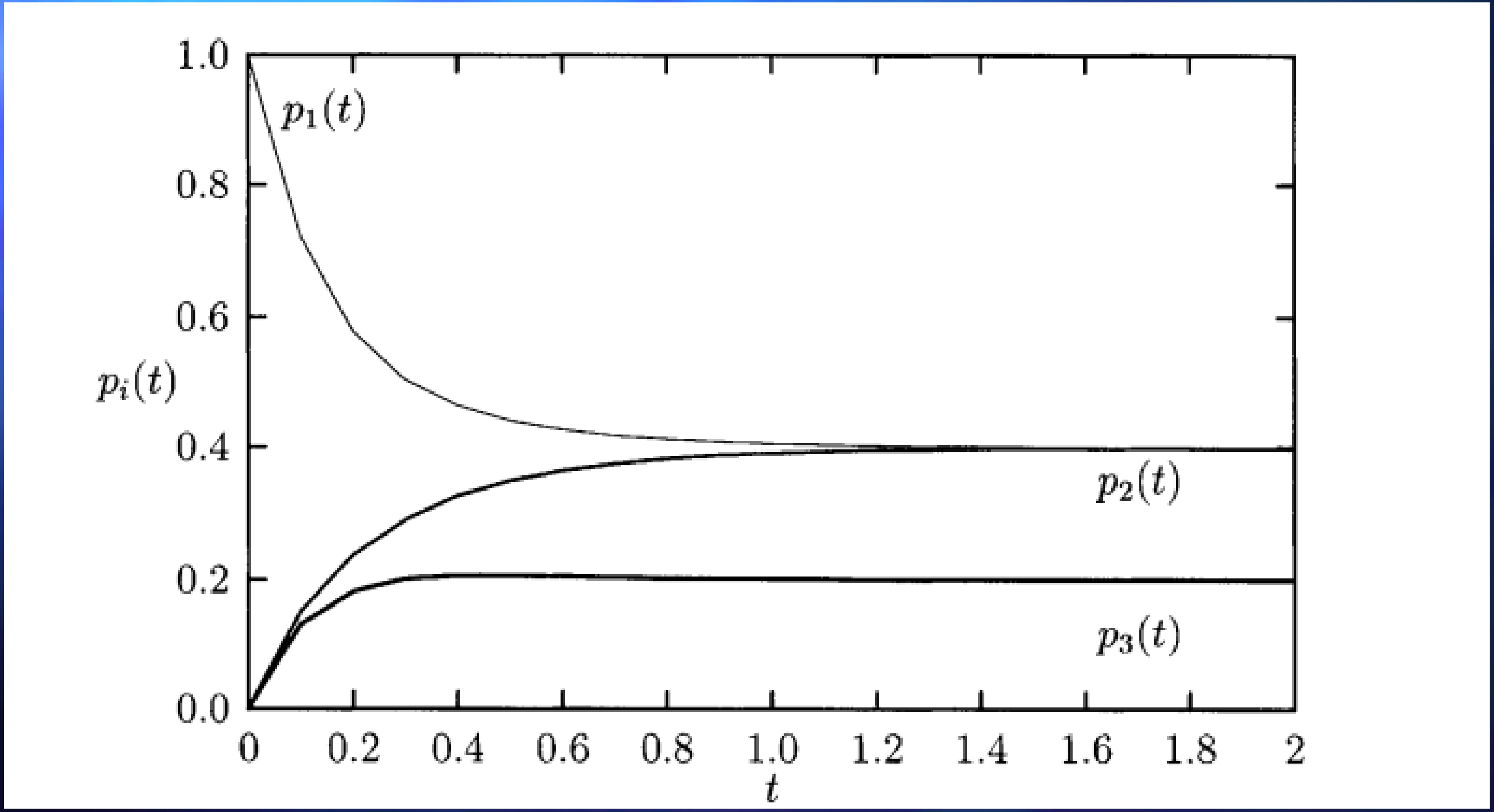
Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n) \quad , n \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = (0.71,\ 0.1502,\ 0.1268)$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)



Semi-Markovian Chain (SMC)

- Considere uma DTMC "embutida", contudo também considere um tempo de permanência (no domínio contínuo: $t \in \mathbb{R}$), em cada estado $i \in S$ da DTMC, com distribuição $F_i(t)$ e densidade $f_i(t)$.

- Este modelo é denominado SMC.

Semi-Markovian Chain (SMC)

- SMC é caracterizada por:
  - matriz de probabilidade de 1 passo (P),
  - vetor de probabilidade inicial ($\Pi(0)$) e
  - o vetor de distribuições de permanência nos estados ($F(t) = (F_1(t),\ldots,F_i(t),\ldots,F_{|s|}(t))$).

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Interpretação
  - Em cada instante em que ocorrem mudanças de estados, a SMC tem comportamento igual ao da correspondente DTMC (comportamento descrito por P) e é independente do passado.
  - Quando se alcança um estado i, um tempo distribuído conforme $F_i(t)$ deve se passar para que ocorra nova transição entre estados.

Semi-Markovian Chain (SMC)

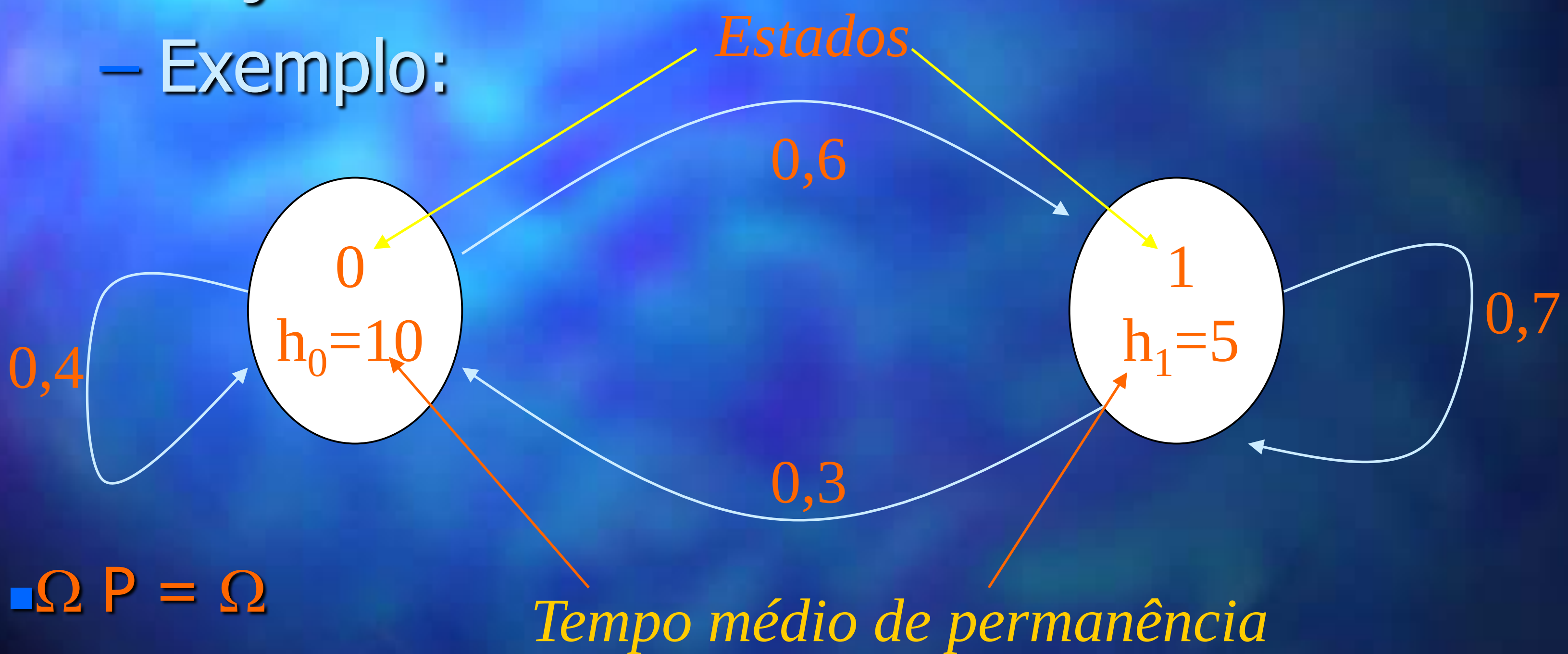
- Solução Estacionária
  - Encontre a solução estacionária para DTMC embutida (caracterizada por P):
    - $\Omega P = \Omega$
    - $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
  - Calcule o tempo médio de permanência (h_i) em cada estado i:
    - $h_i = \int_0^\infty t \, f_i(t) dt$

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - A probabilidade de estado estacionário da SMC é obtida por:
    - $\pi_i = (\omega i \times h_i) / (\sum_{\forall j \in S} \omega_j \times h_j), \ \forall i$
  - Em muitas aplicações, h_i é fornecido diretamente.
- Solução transiente é mais sofisticada.

Semi-Markovian Chain (SMC)

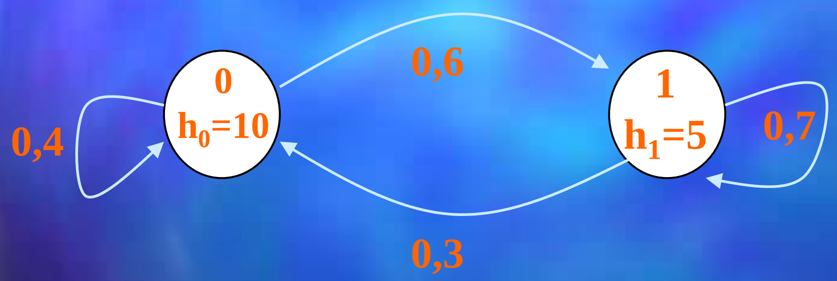
- Solução Estacionária
  - Exemplo:



- $\Omega P = \Omega$
- $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
- $h_0=10,\ h_1=5$

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:



Matriz de Propabilidades
de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \left|\begin{array}{cc} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{array}\right| & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

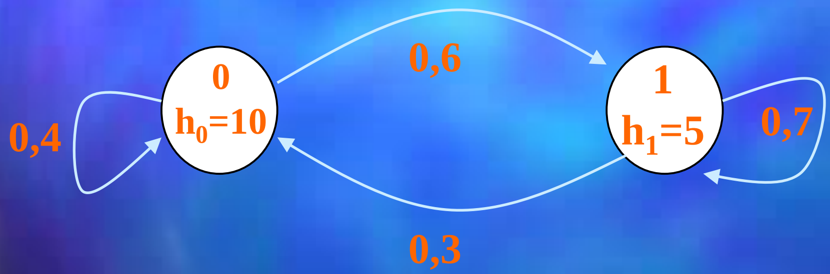
- $\Omega\, P = \Omega$
- $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
- $h_0=10,\ h_1=5$

$\rightarrow$

- $\omega_0=0,5385$
- $\omega_1=0,4615$

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:



Matriz de Propabilidades
de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \left| \begin{array}{cc} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$

- $\omega_0 = 0{,}5385$
- $\omega_1 = 0{,}4615$

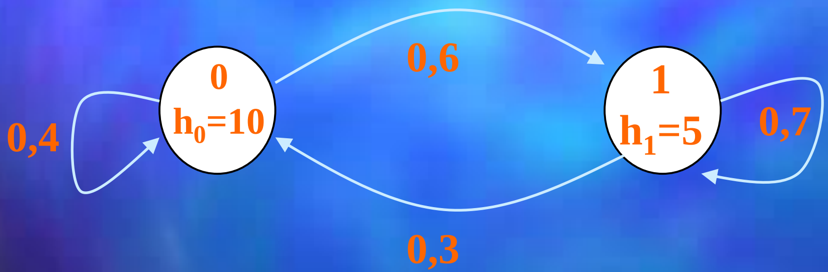
$$\pi_0 = \frac{(0{,}5385 \times 10)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)}$$

$$\pi_1 = \frac{(0{,}4615 \times 5)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)}$$

- $\pi_i = \dfrac{(\omega i \times h_i)}{(\sum_{\forall j \in S} \omega_j \times h_j)} \quad , \forall i \in S$

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:



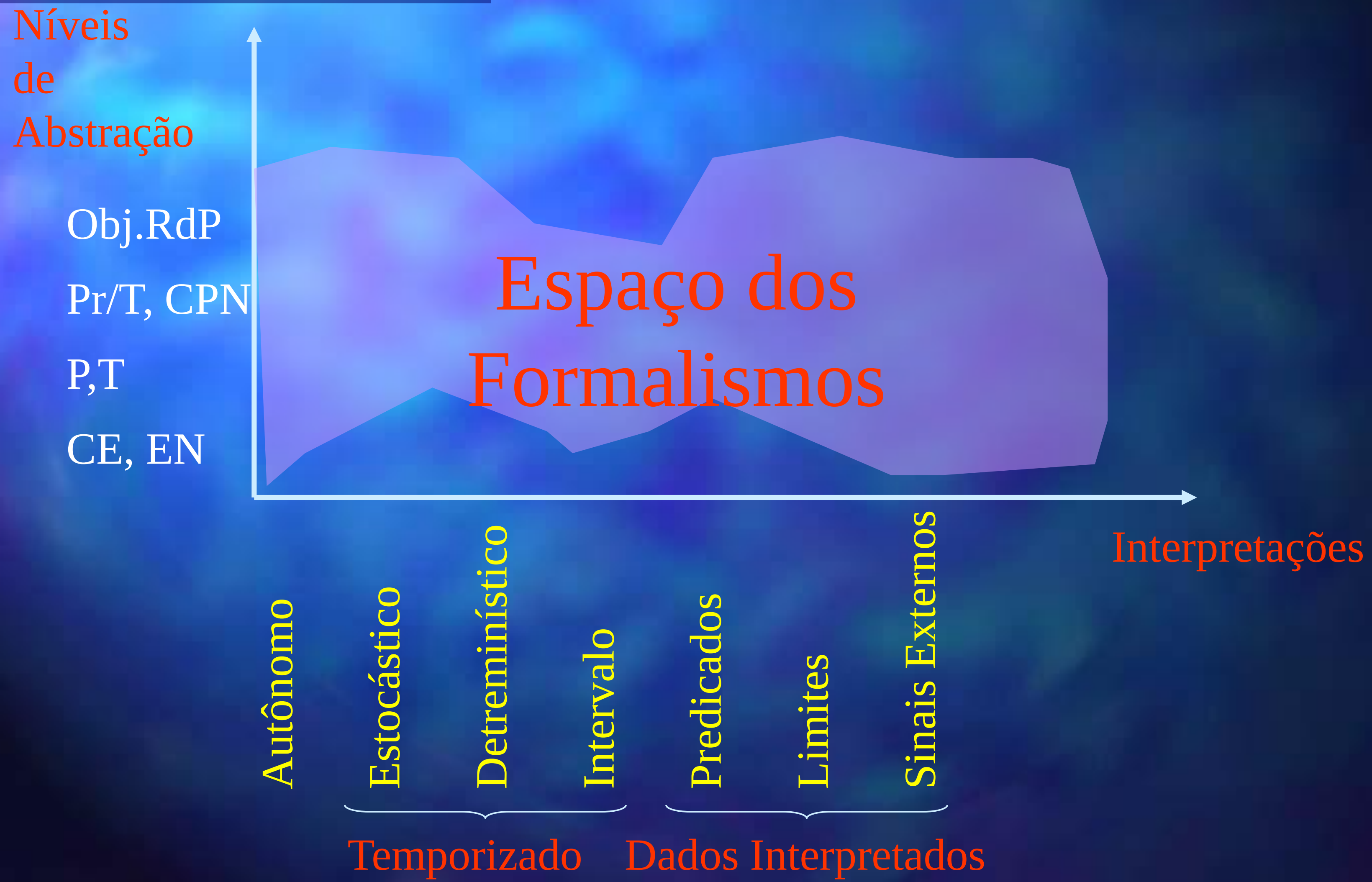
Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ \hline 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,7 & 0,3 & 1 \end{array}$$

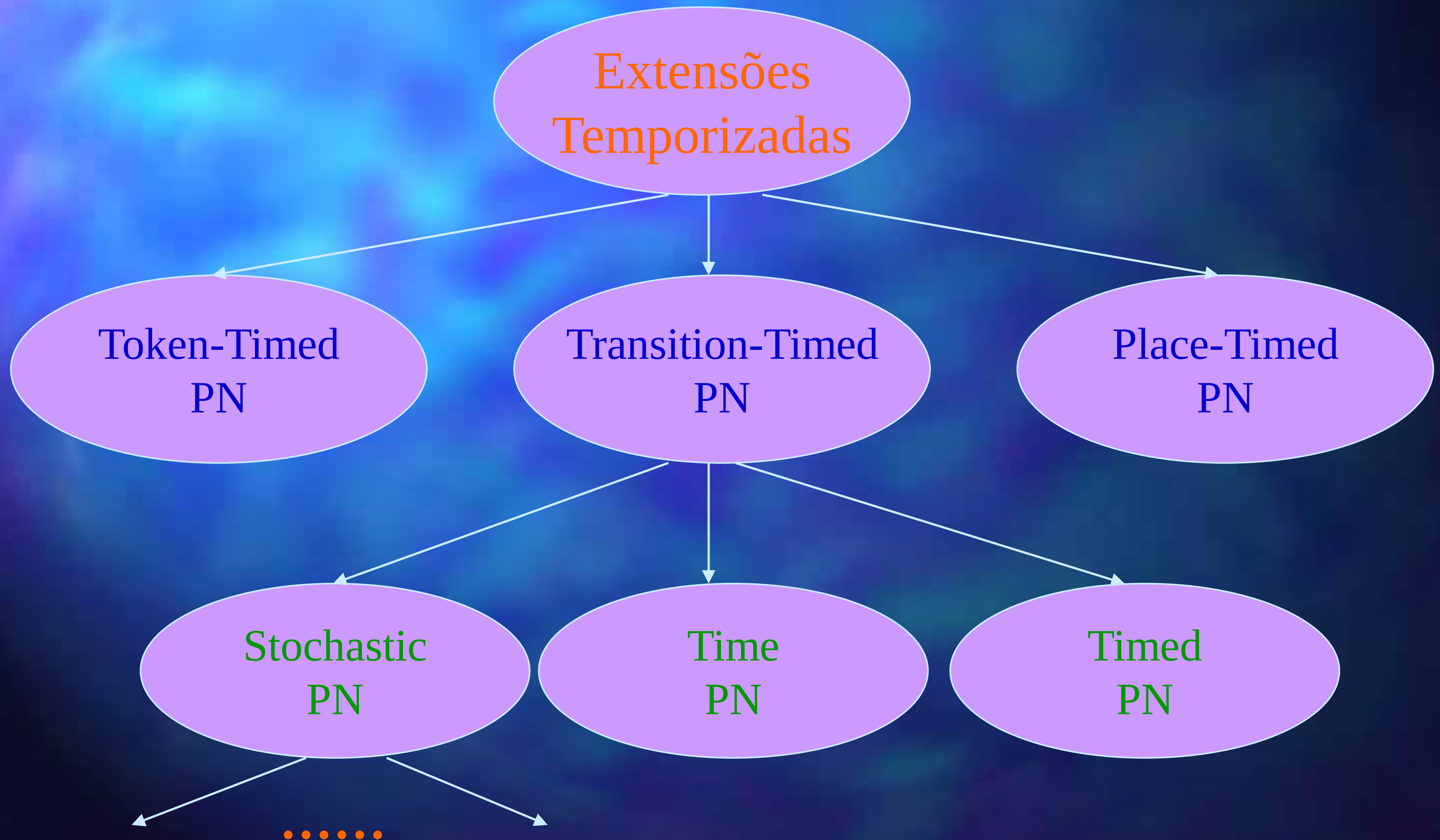
$$\pi_0 = \frac{(0,5385 \times 10)}{(0,5385 \times 10) + (0,4615 \times 5)} = 0,7$$

$$\pi_1 = \frac{(0,4615 \times 5)}{(0,5385 \times 10) + (0,4615 \times 5)} = 0,3$$

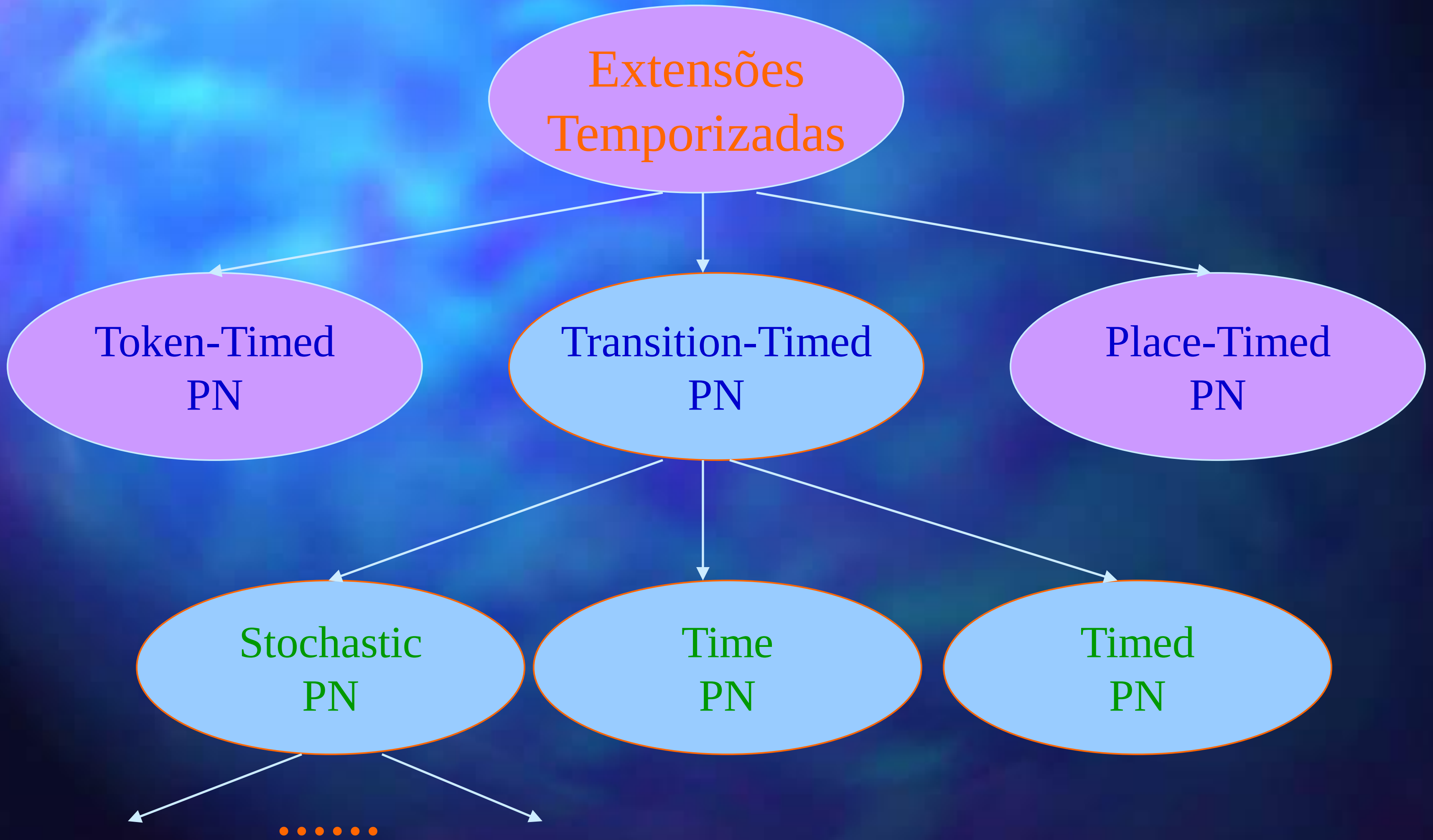
Redes de Petri



Redes Temporizadas



Redes Temporizadas



Redes Temporizadas

- Ramchandani, 1973 - Transition Timed Net
- Merlin, 1976 - Transition Time Net
- Sifakis, 1977 - Place Timed Net

Redes Temporizadas Estocásticas

- Natkin -1980
- Molloy - 1981
- Marsan et al. - 1984

É uma rede temporizada onde o *delay* associado à transição é uma variável aleatória de distribuição exponencial

Redes Temporizadas

- Redes de Petri com Lugares Temporizados (PTPN) (Sifakis77)
- Definição: PTPN=$(P,T,F,K,W,M_0,\Gamma,\upsilon)$, onde

P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ uma relação que representa os arcos

W – Valoração (peso dos arcos) - $W: F \rightarrow N$

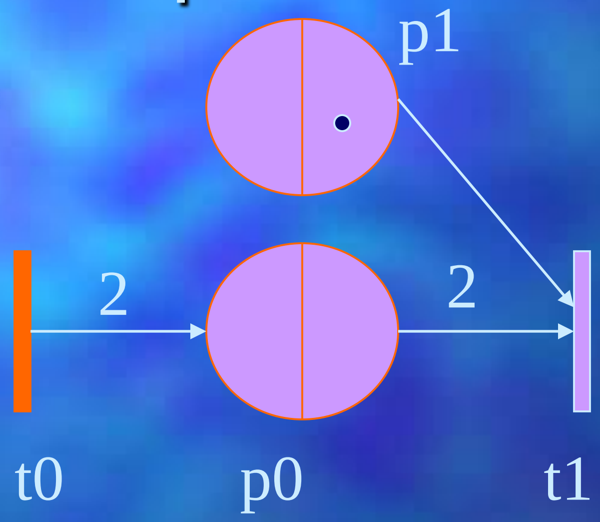
M_0- Marcação inicial - $M_0:P \rightarrow N$

$\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_i,...\}$ números reais denominada base de tempo.

$\upsilon:P \rightarrow \Gamma$ um mapeamato que $\upsilon(p) = \gamma_j$

Redes Temporizadas
- PTPN -

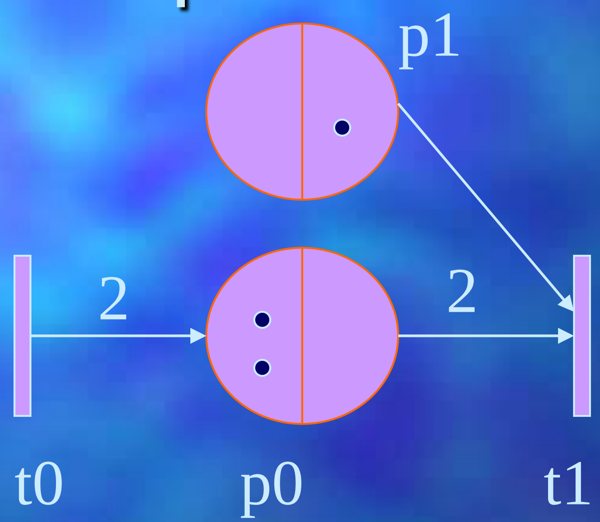
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$

Redes Temporizadas
- PTPN -

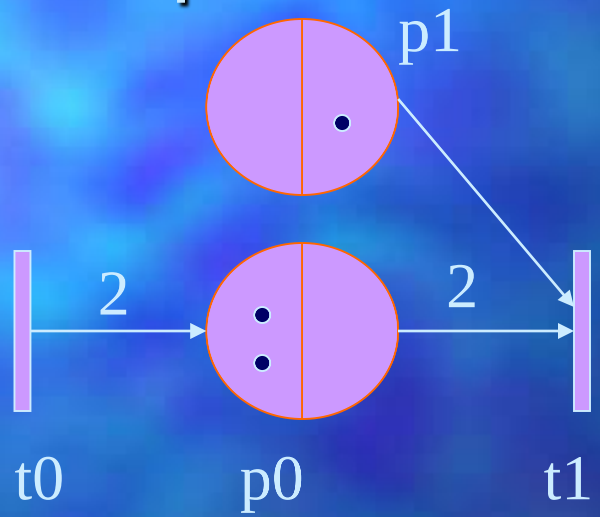
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=0

Redes Temporizadas - PTPN -

- Regra de Disparo

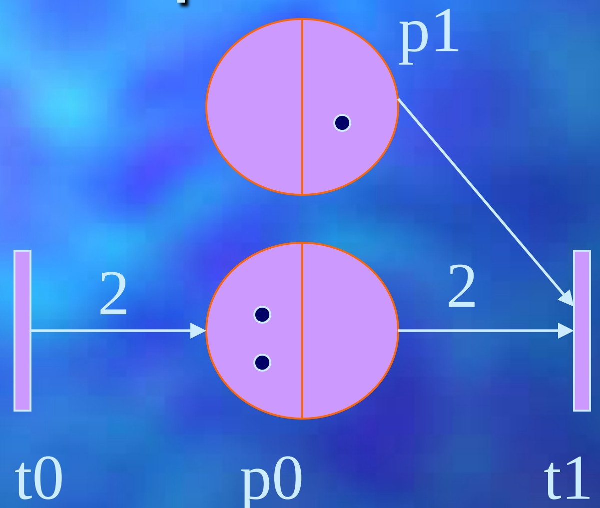


$\upsilon(p0) = 3$

Instante=1

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regra de Disparo

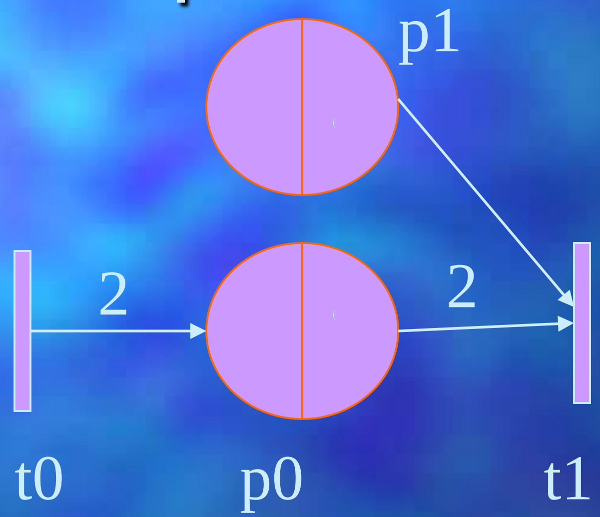


$\upsilon(p0) = 3$

Instante=2

Redes Temporizadas - PTPN -

- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$

Instante=3

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Marcas são consumidas dos lugares de entrada
    - Há uma duração
    - Marcas são geradas no lugares de saída
  - Disparo atômico
    - As marca permanecem nos lugares de entrada pelo período igual ao *delay* associada à transição. Após o *delay* as marcas são consumidas e geradas nos lugares de saída imediatamente.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Pode ser representada por uma rede com disparo atômico
    - Modelo mais compacto
    - O estado é uma informação mais complexa do que o modelo não-temporizado
  - Disparo atômico
    - Pode representar o modelo com duração
    - O conjunto de marcações alcançáveis é um sub-conjunto das marcações do modelo não-temporizado.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:

  - Regras de Seleção:
    - Pré-seleção: (duração e *delay*)
      - Prioridade
      - Probabilidade

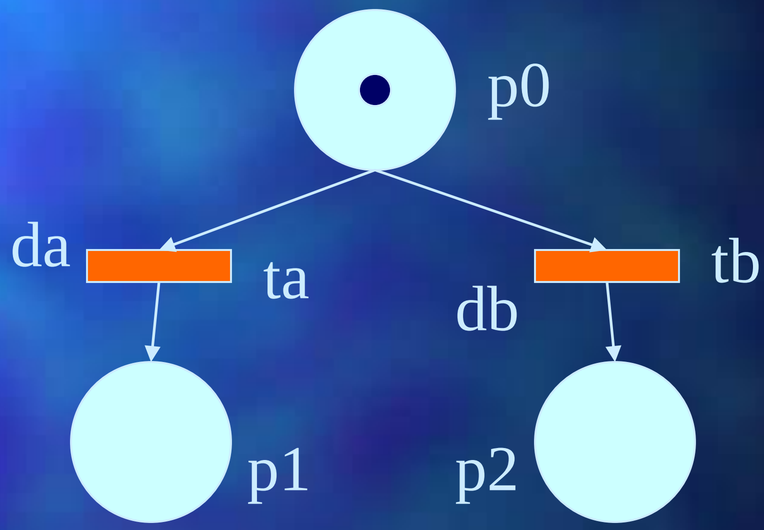
    - *Race* (corrida): (*delay*)
      - Transições habilitadas com menor *delay* são disparadas

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Quando uma das transições conflitantes é desabilitada pelo disparo da outra, o que acontece com o *timer* da que ficou desabilitada quando a mesma tornar-se habilitada outra vez?

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Como fica a memorização do tempo de habilitação anterior?
- *Continue*
  - O *timer* associado à transição mantem o valor atual e quando a transição se tornar novamente habilitada o valor do *timer* iniciará daquele valor.
- *Restart*
  - Quando a transição for novamente habilitada o *timer* será re-iniciado.



Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - O que acontece com o *timer* das transições habilitadas após o disparo de uma transição?
    - Todas as transições. Não somente as transições conflitantes.

• **Algumas políticas de memória podem ser construídas**

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Resampling*
    - Após cada disparo os *timers* de TODAS as transições são re-iniciado (*restart*)
    - Não há memória
    - Após descartar todos os *timers*, os valores iniciais são associados a todas as transições que se tornarem habilitadas na nova marcação.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:

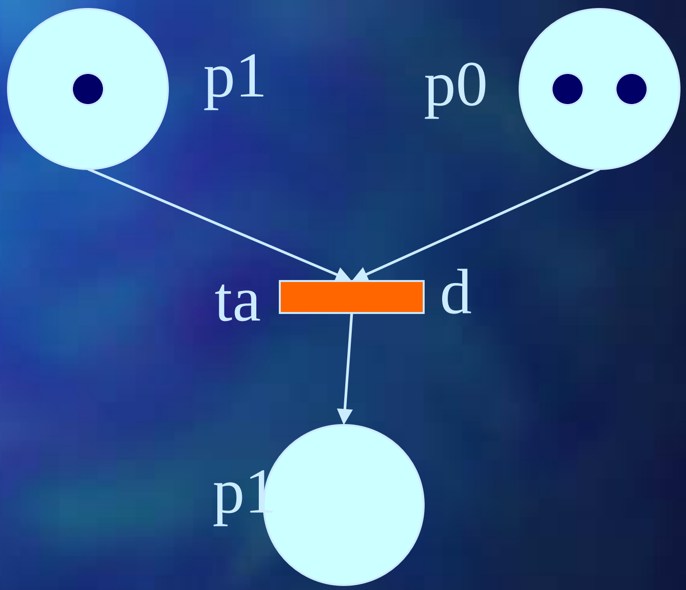
  – *Enabling Memory*
    - Após cada disparo os *timers* das transições que ficaram desabilitadas são re-iniciados (*restart*)
    - As transições que permaneceram habilitadas com o disparo matêem seus valores presentes(*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Age Memory*
    - Após cada disparo os *timers* de todas as transições são mantidos em seus valores presentes (*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Grau de Habilitação (*Enabling Degree)*
    - É o número de vezes que uma determinada transição pode ser disparada, numa determinada marcação, antes de se torna desabilitada.
    - Quando o grau de habilitação é maior que um, atenção especial à semântica de temporização deve ser considerada.

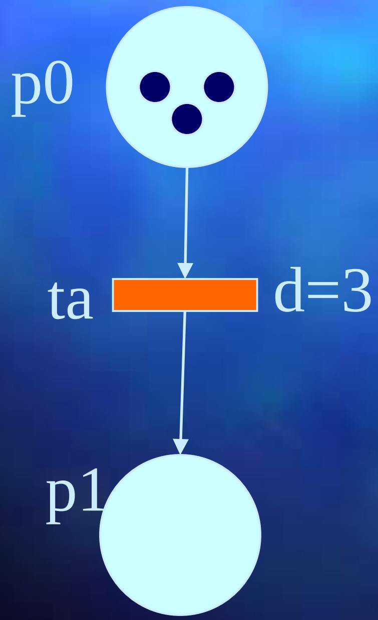


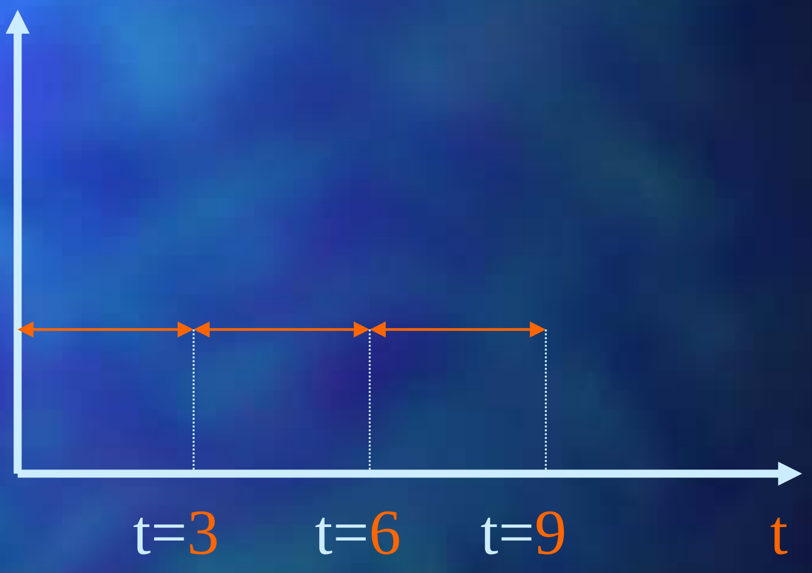
Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Semântica de Temporização
    - *Single-server firing semantics*
    - *Infinite-server firing semantics*
    - *Multiple-server firing semantics*
      - K é o máximo grau de paralelismo. Quando $k \rightarrow \infty$, *Multiple-server firing semantics* é igual a *infinite-server firing semantics.*

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

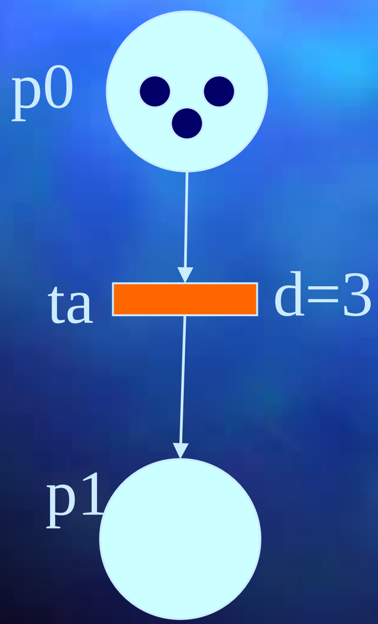
- Conceitos Básicos:
  - *Single-server firing semantics*

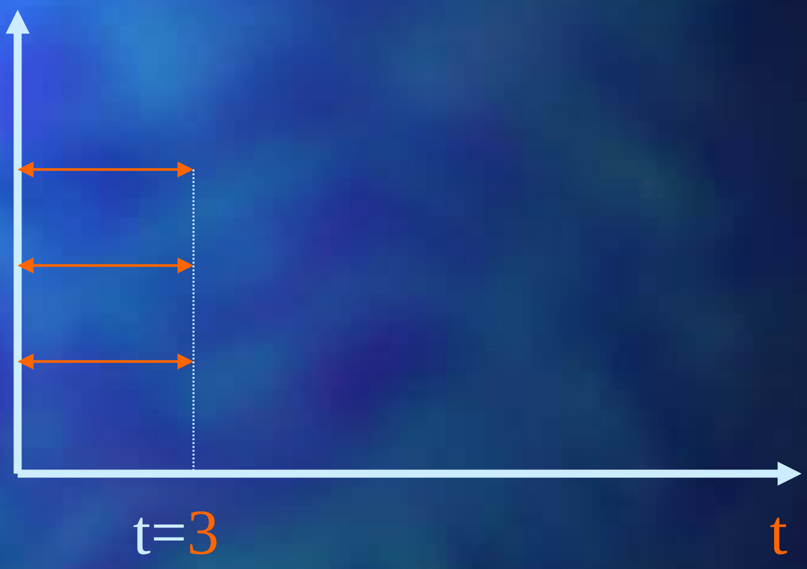




Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

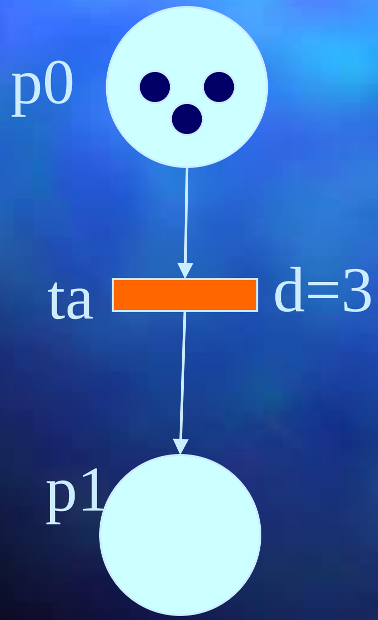
- Conceitos Básicos:
  - *Infinite-server firing semantics*

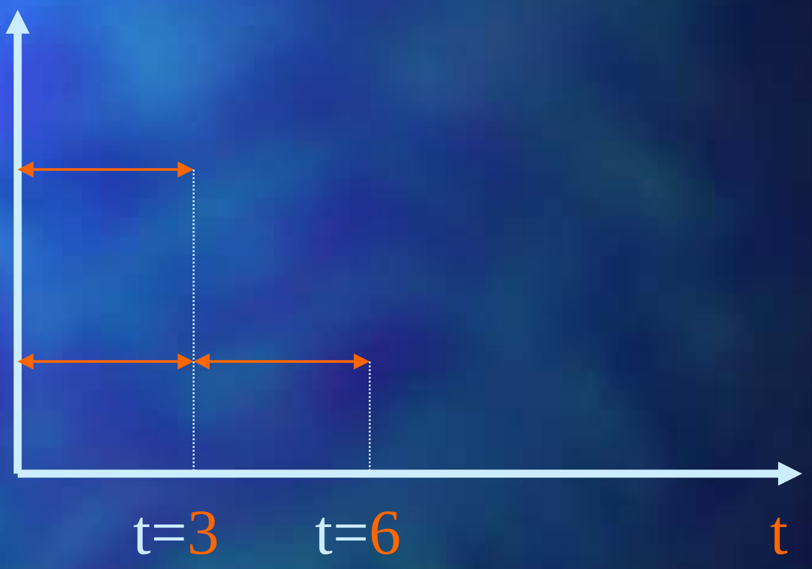




Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Multiple-server firing semantics k=2*





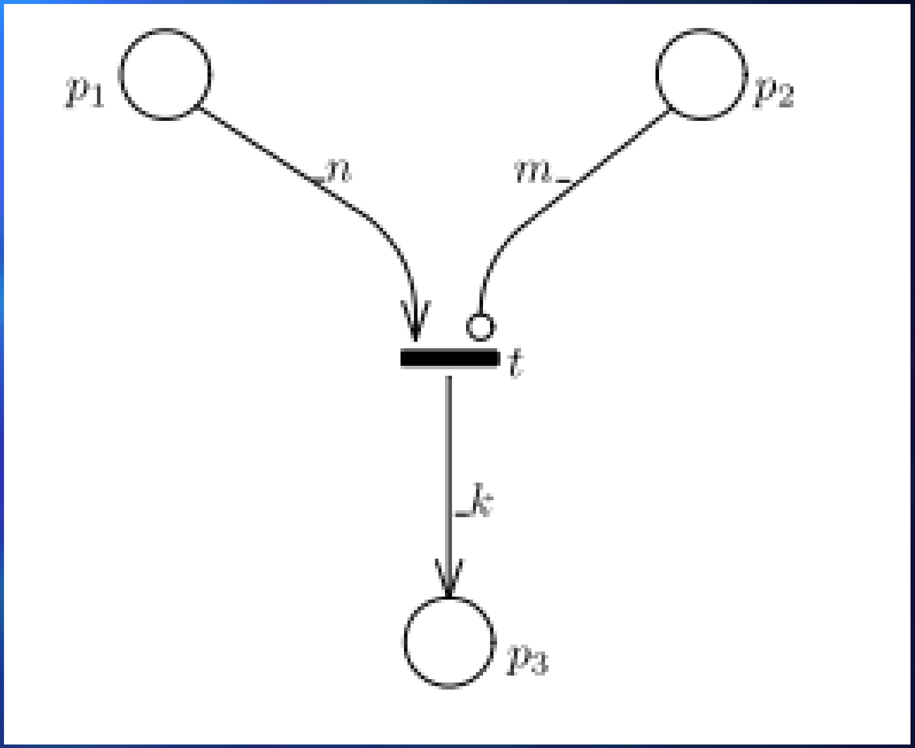
Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

- Avaliação de Desempenho
  - Avaliação Determinísica
    - Medição
      - Sistema Real
      - *Benchmarks*
    - Prototipação
    - Simulação
    - Métodos Analíticos
  - Modelagem Estocástica
    - Simulação de Eventos Discretos
    - Métodos Analíticos

Modelagem

Redes com Arco Inibidor

- Definição:
  $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$



P,T,I,O definidos como usualmente.

$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

M_0- Marcação inicial –
$M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes com Prioridade

- Definição:

$PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

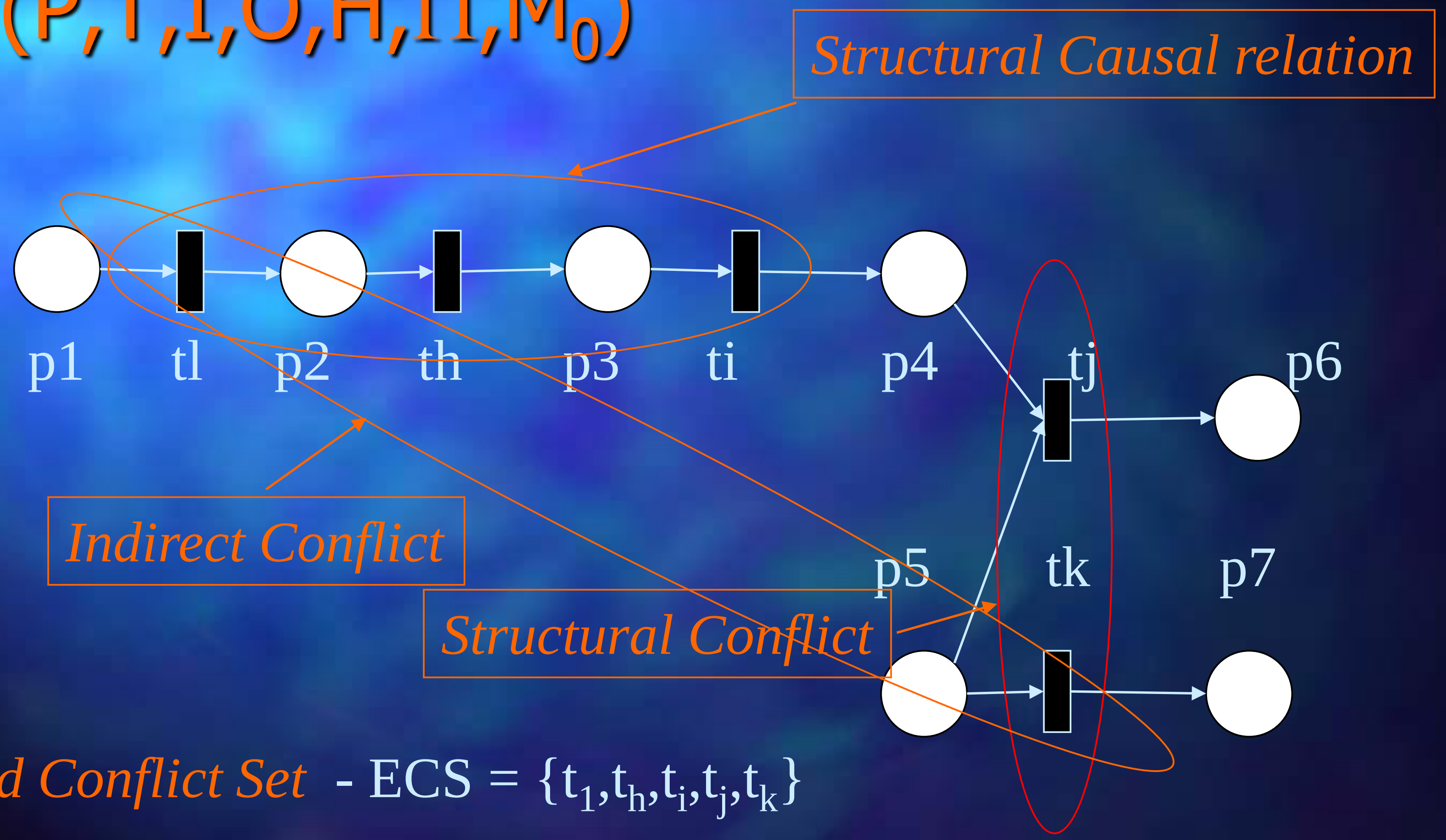
$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$\Pi : T \rightarrow \aleph$ é uma função que mapeia às transições níveis de prioridade.

M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes com Prioridade

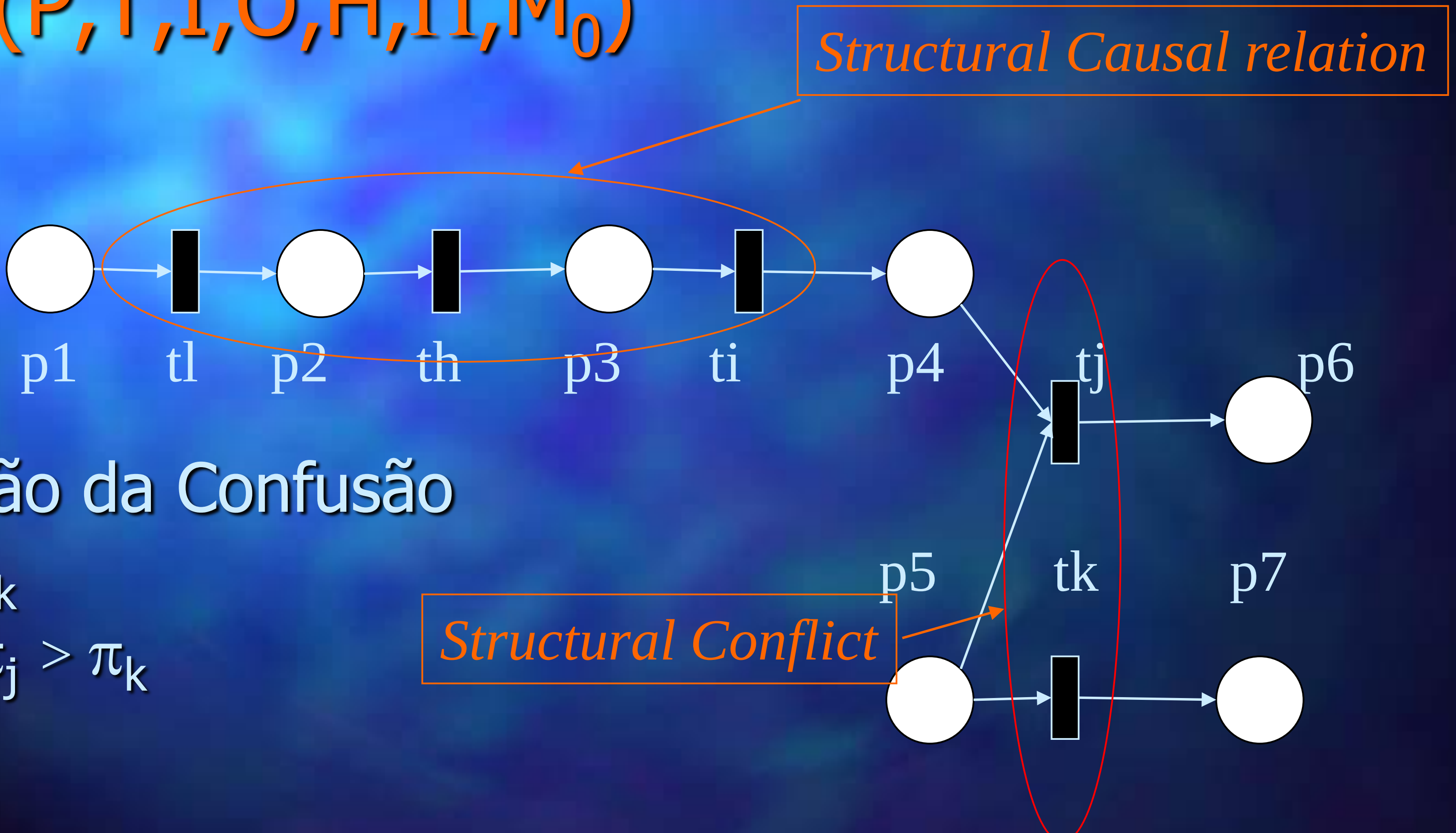
- $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$



Extended Conflict Set - ECS = $\{t_1,t_h,t_i,t_j,t_k\}$

Redes com Prioridade

- $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$



Remoção da Confusão

- $\pi_l = \pi_k$
- $\pi_h, \pi_i, \pi_j > \pi_k$

Redes Estocásticas

$$SPN = (P, T, I, O, H, \Pi, G, M_0, Atts)$$

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ is the set of places,
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ is the set of transitions,
$I \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking-dependent multiplicities of input arcs
$O \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking dependent multiplicities of output arcs.
$H \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking-dependent inhibitor arcs.

Redes Estocásticas

$$SPN = (P, T, I, O, H, \Pi, G, M_0, Atts)$$

$\Pi \in \mathbb{N}^m$ is the priority vector

$G \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \{true, false\})^m$ is the guard vector

$M_0 \in \mathbb{N}^n$ is the initial marking vector

$Atts = (Dist, W, Markdep, Policy, Concurrency)^m$

$Dist \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathcal{F}$ is a firing probability distribution

$W : T \rightarrow \mathbb{R}$ *is a function that assigns weight to imediate transitions and delay to time timed transitions*

$Markdep \in \{constant, enabdep\}$

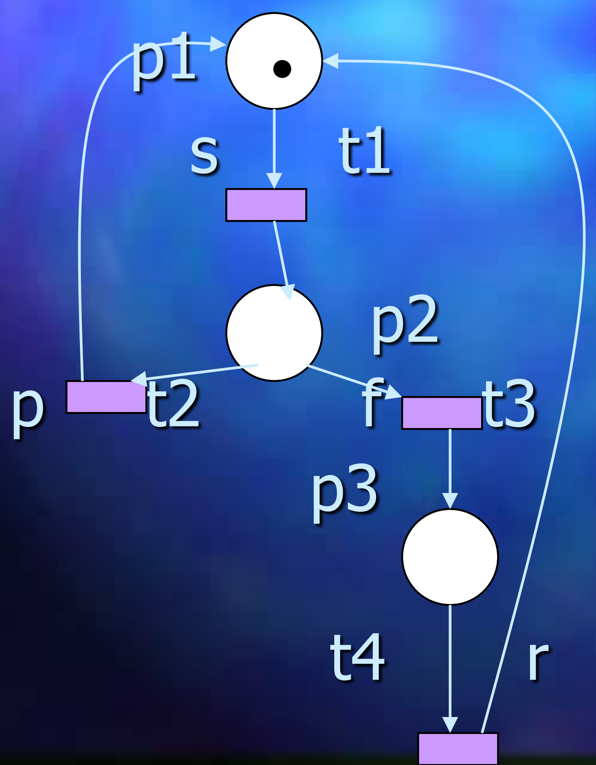
$Policy \in \{prd, prs\}$ is the preemption policy

$Concurrency \in \{ss, is\}$

Redes Estocásticas

- Definição:

$SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$



P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

$I: P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,

$O : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições

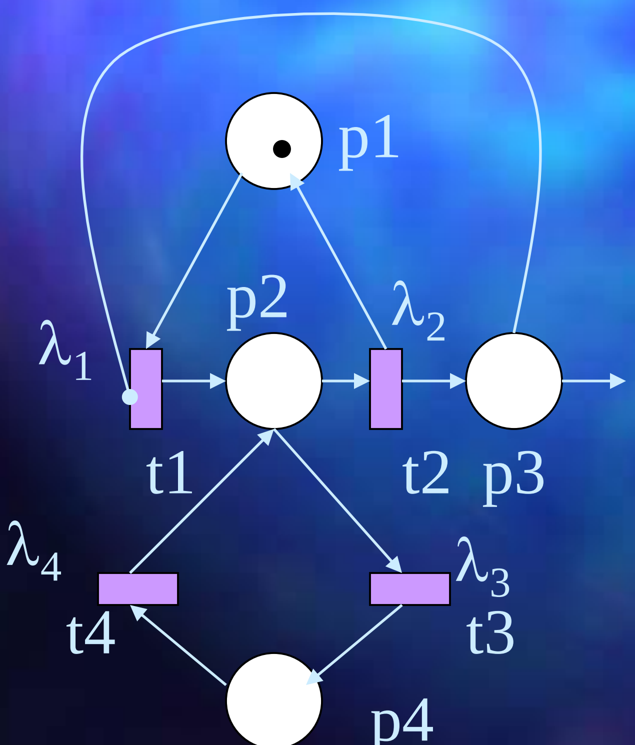
$W : T \rightarrow \Re^+$ (ou $W : T \times M \rightarrow \Re^+$) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes Estocásticas

- Definição:

  $SPN=(P,T,I,O,H,W,M_0)$



P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

I: $P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,

O : $P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições

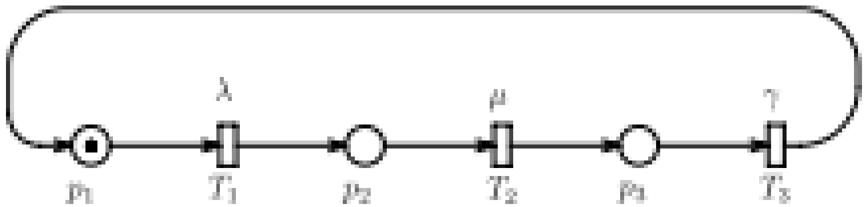
H : $P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

W : $T \rightarrow \Re^+$ (ou W : $T \times M \rightarrow \Re^+$) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

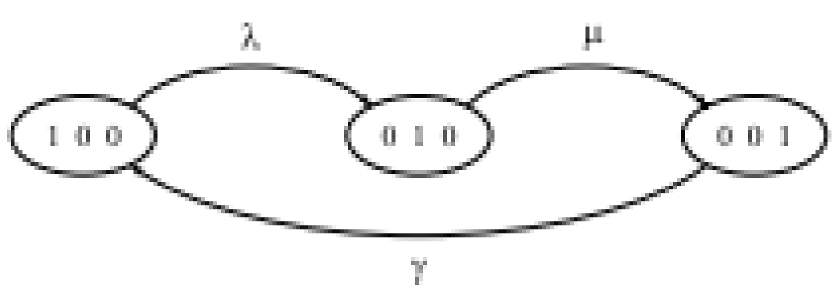
M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes Estocásticas

Rede Estocástica



Grafo de Marcações / CTMC



Redes Estocásticas

Semântica de Disparo de Transição

- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
  - Regras de habilitação

    $M[t_j >$, $M(pi) \geq I(pi, t_j)$

    $\forall$ pi $\in P$

- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)

- *Enabling memory, resampling, age memory*

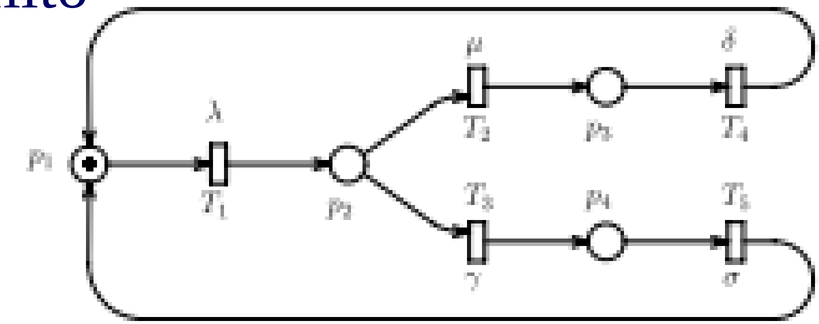
- Regras de disparo

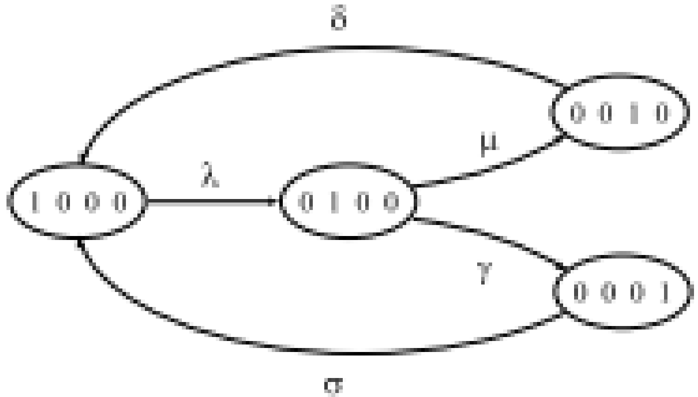
  Se $M[t_j > M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - I(pi, t_j)+O(pi, t_j), \ \forall$ pi $\in P$

Redes Estocásticas

Conflito



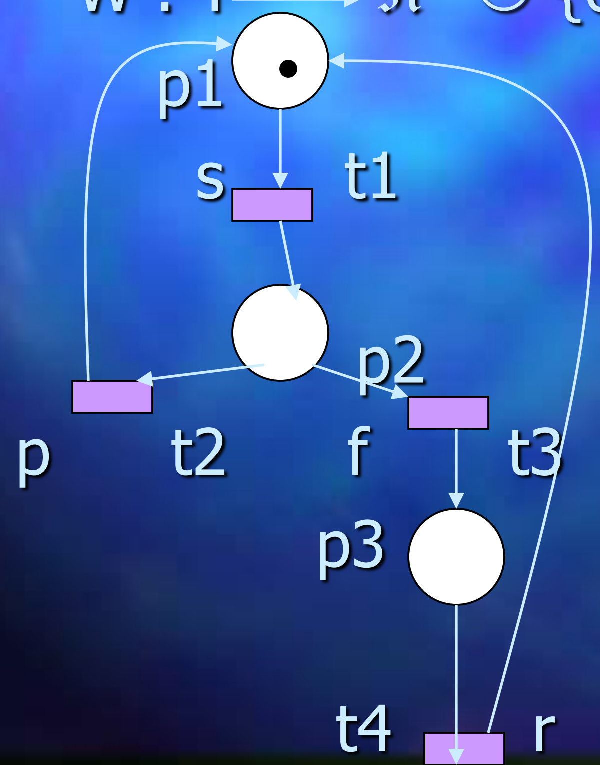


Redes Estocásticas

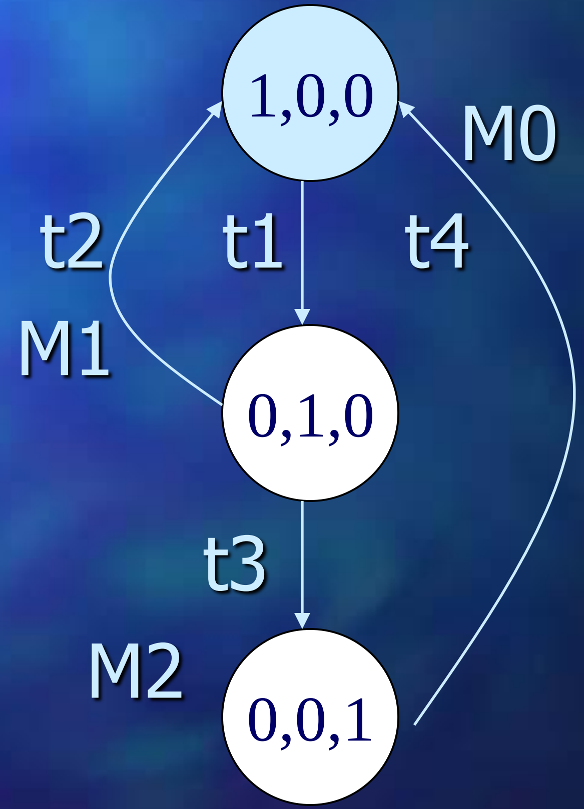
- Definição:

  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)

  $W : T \rightarrow \Re^+ \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações

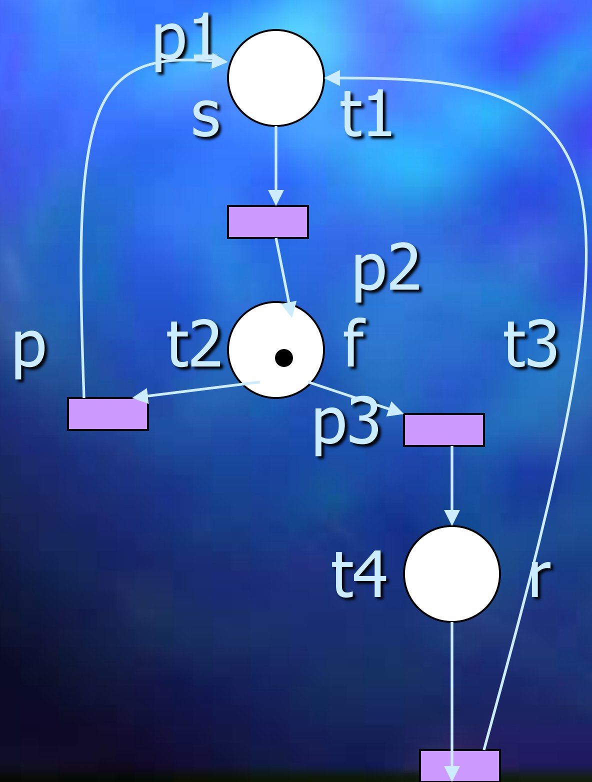


Redes Estocásticas

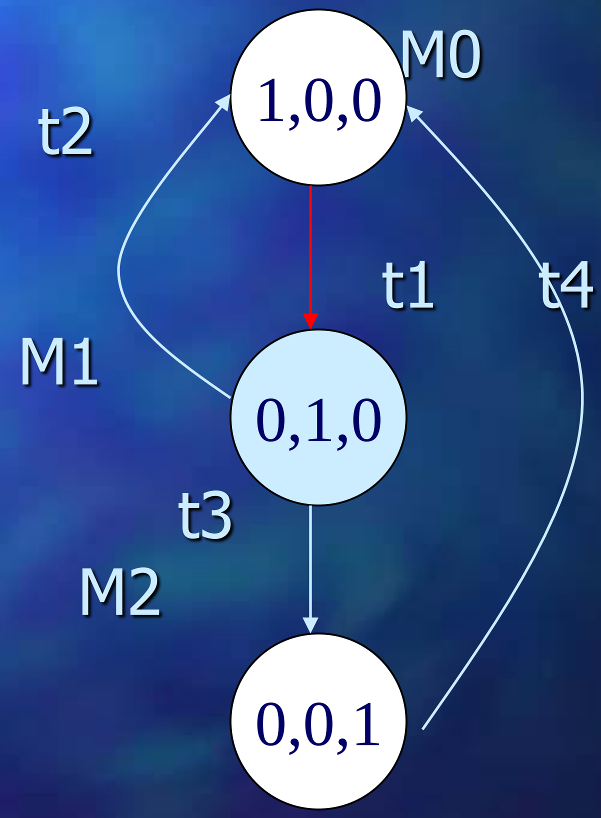
- Definição:

  $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$

  $W : T \longrightarrow \Re^{+} \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações

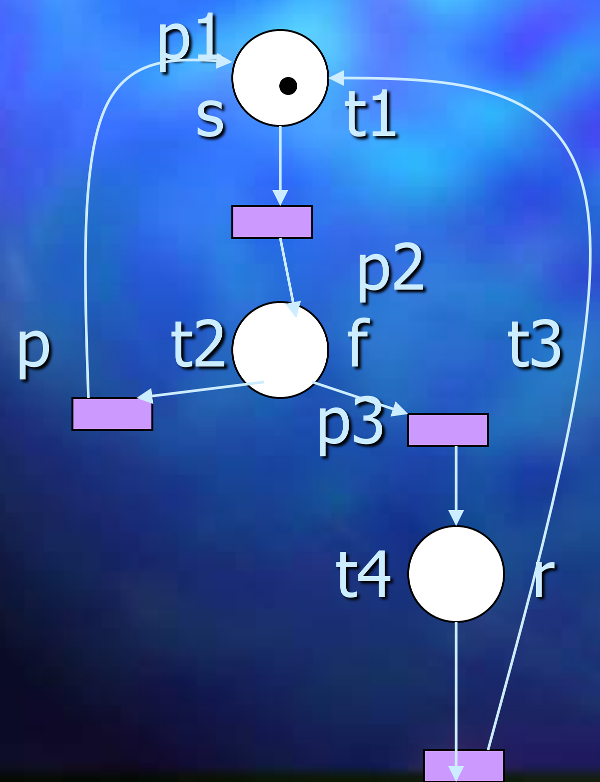


Redes Estocásticas

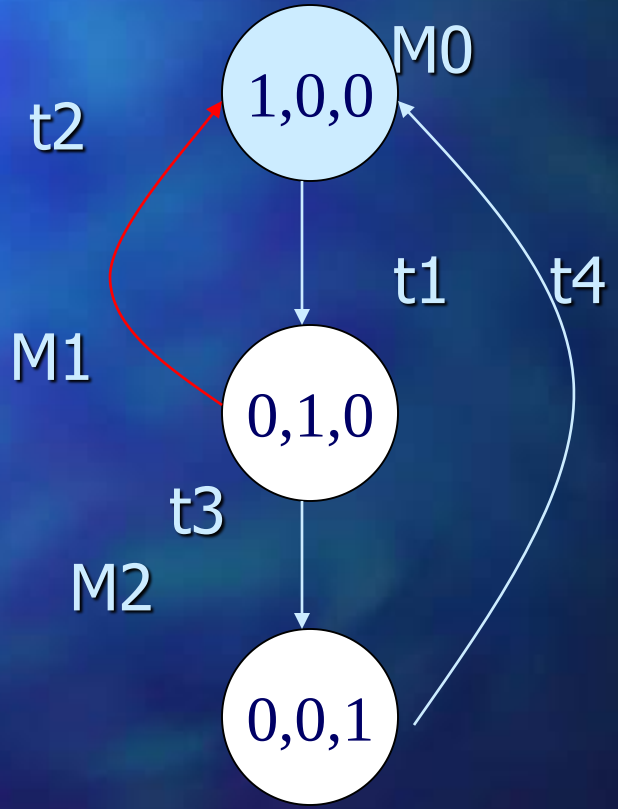
- Definição:

  $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$

  $W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações

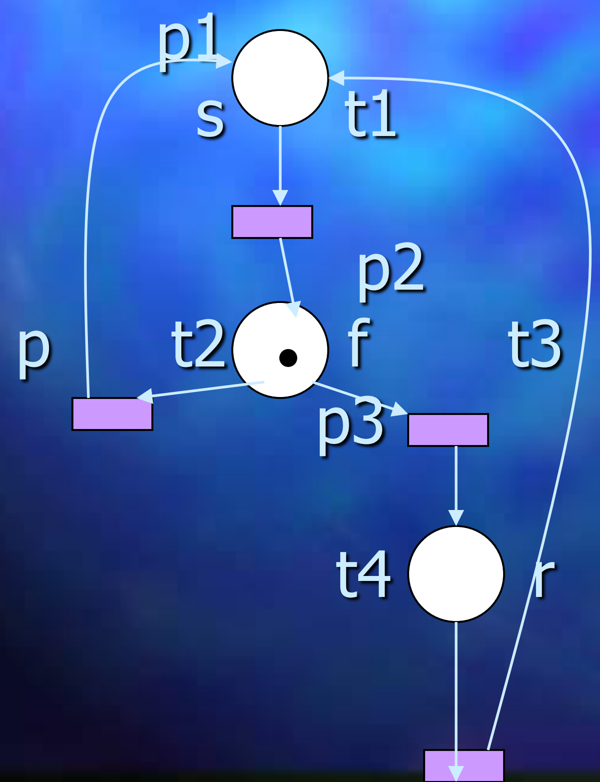


Redes Estocásticas

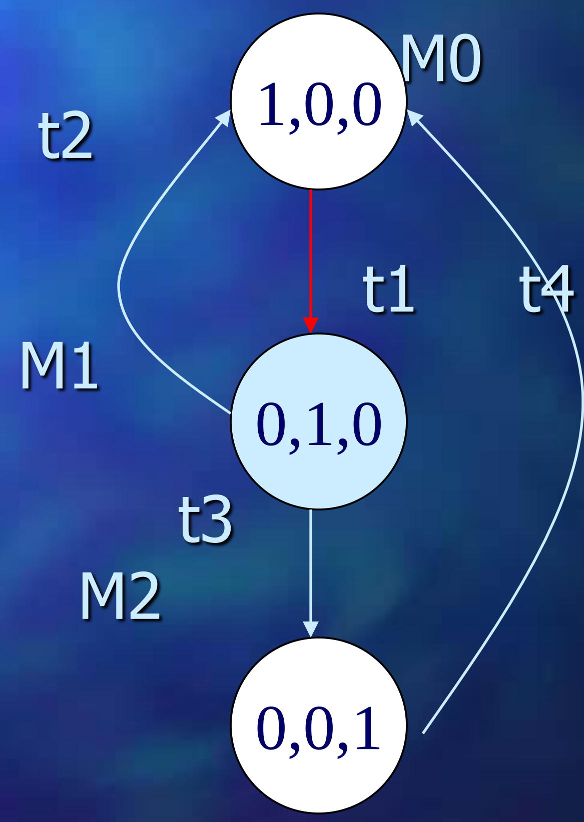
- Definição:

  $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$

  $W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações

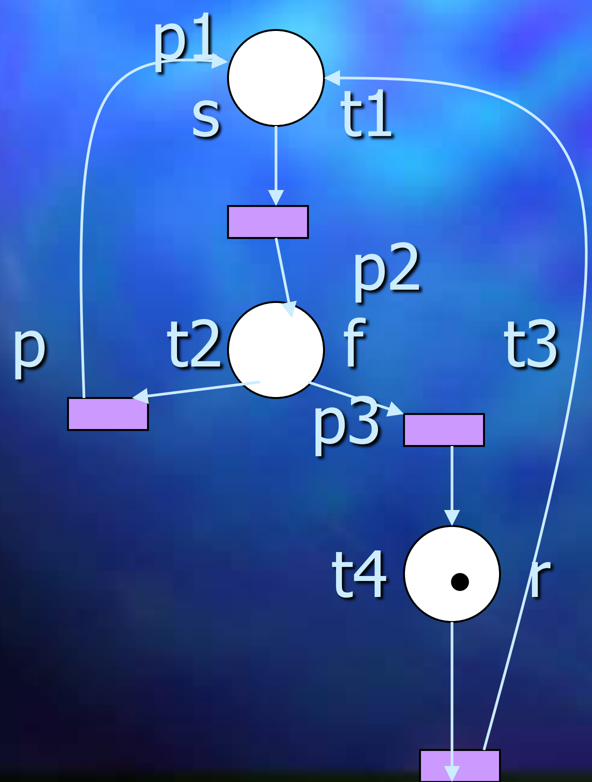


Redes Estocásticas

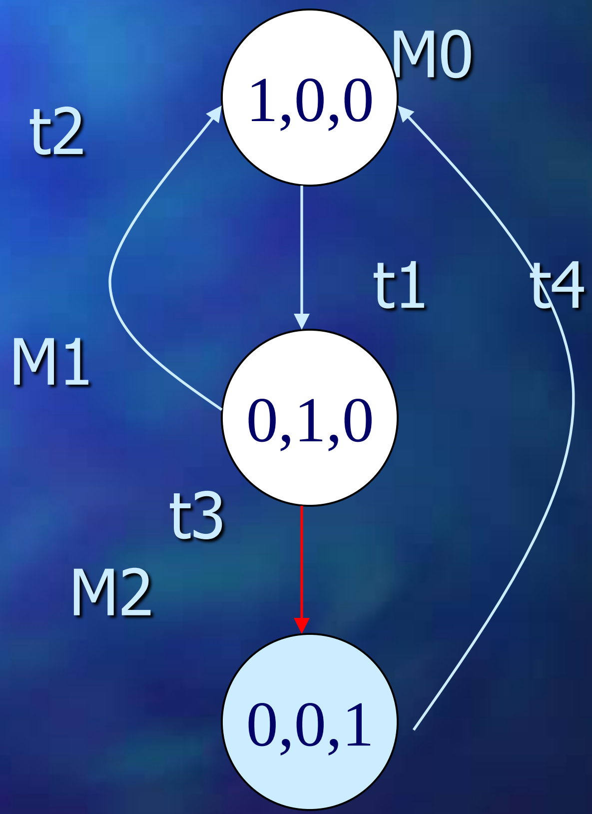
- Definição:

SPN=(P,T,I,O,W,M_0)

$W : T \longrightarrow \Re^{+} \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações

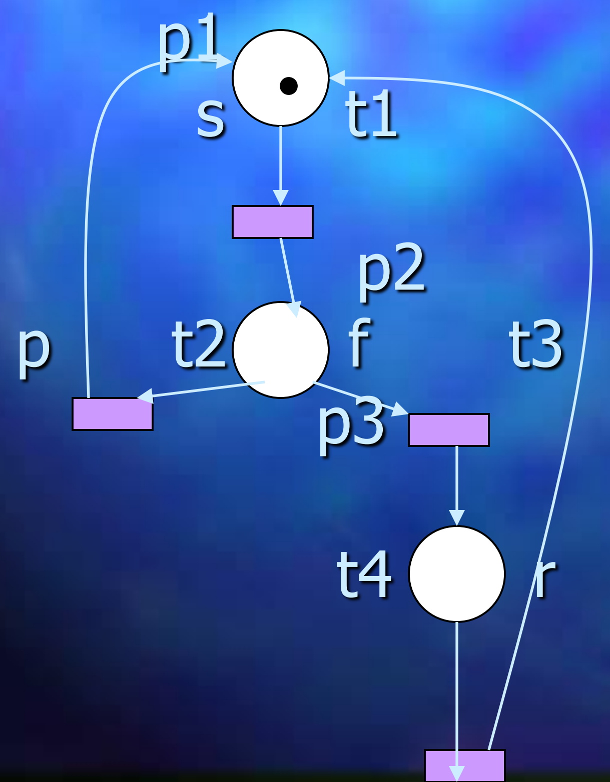


Redes Estocásticas

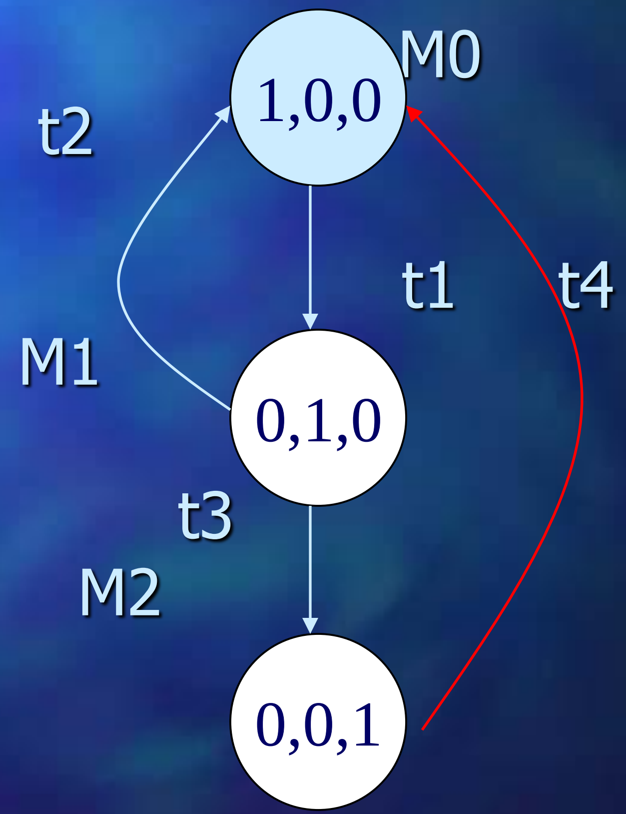
- Definição:

  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)

  $W : T \longrightarrow \Re^{+} \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações

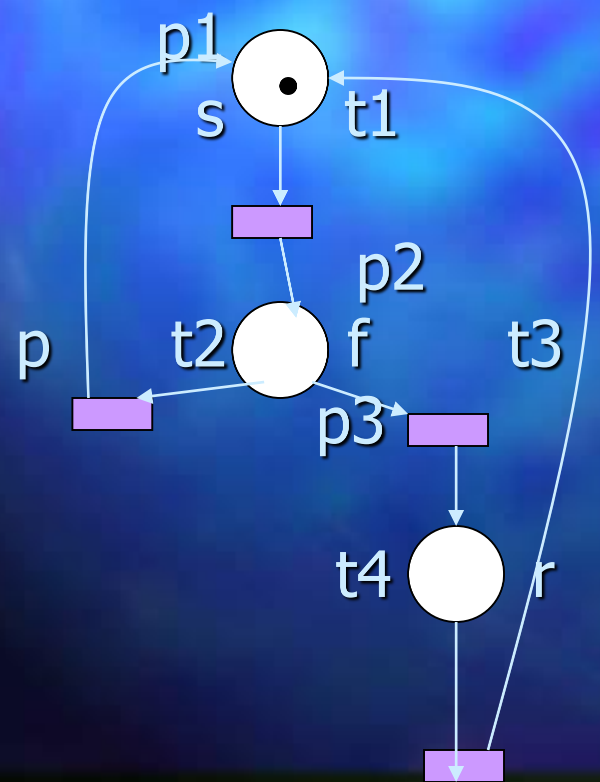


Redes Estocásticas

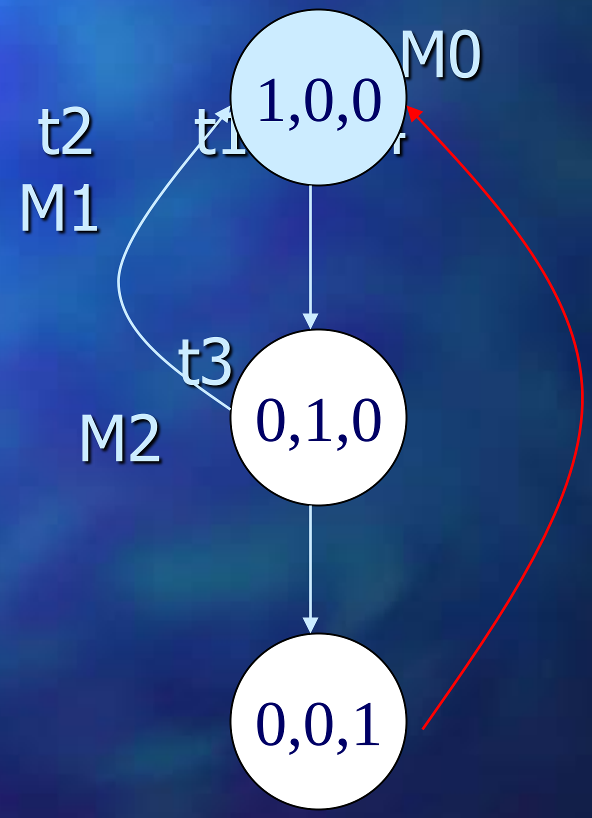
- Definição:

SPN=(P,T,I,O,W,M_0)

$W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$

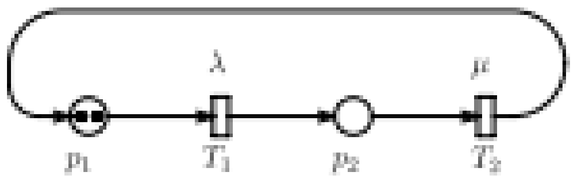


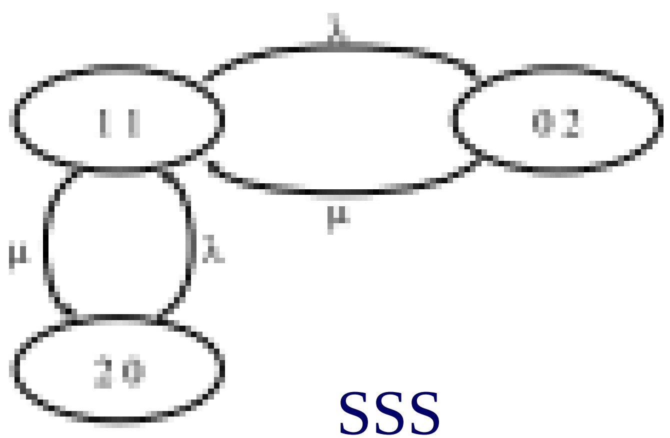
- Grafo de Marcações



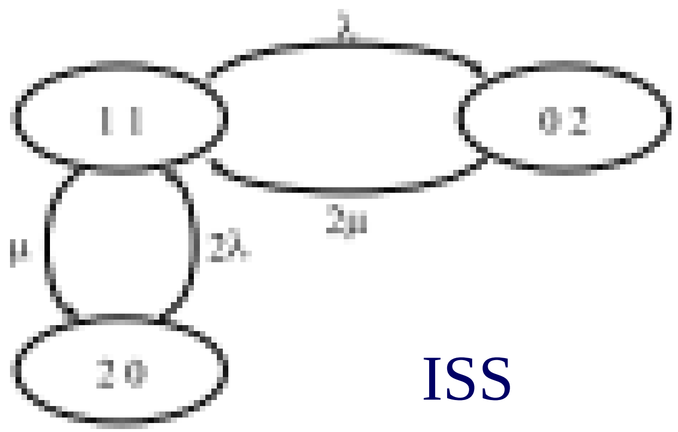
Redes Estocásticas

Semântica de Temporização





SSS



ISS

Redes Estocásticas

- Em geral, a CTMC associada a uma SPN é obtida da seguinte maneira:
  - O espaço de estados $S = \{s_i\}$ corresponde ao *reachability set* $RS(N,M_0) = \{M_i\}$ da rede marcada N.
  - As *transition rates* de cada estado s_i (corresponde a marcação M_i) para cada estado s_j (M_j) são obtidas pela soma de todas as *firing rates* associadas às transições que estão habilitadas em M_i e cujo disparo levam a M_j.

Redes Estocásticas

- Assumindo-se que todas as transições operam em *Single Server Semantics* (SS) e taxas (*rates*) independentes da marcação, tem-se:
- $q_{ij} = \begin{cases} \sum_{tk \in ej(Mi)} \omega_k & i \neq j \\ -\, q_i & i = j \end{cases}$

onde $Q = [q_{ij}]$ gerador infinitesimal (matriz de taxas)

$q_i = \sum_{tk \in e(Mi)} \omega_k$

ω_k é a taxa de disparo de t_k.

$e_j(M_i) = \{t_k \mid t_k \in e(M_i) \wedge M_i[t_k > M_j\}$ é o conjunto de transições que estão hablitadas em M_i e cujo disparo levam a M_j.

$e(M_i)$ conjunto de transições habilitadas em M_i.

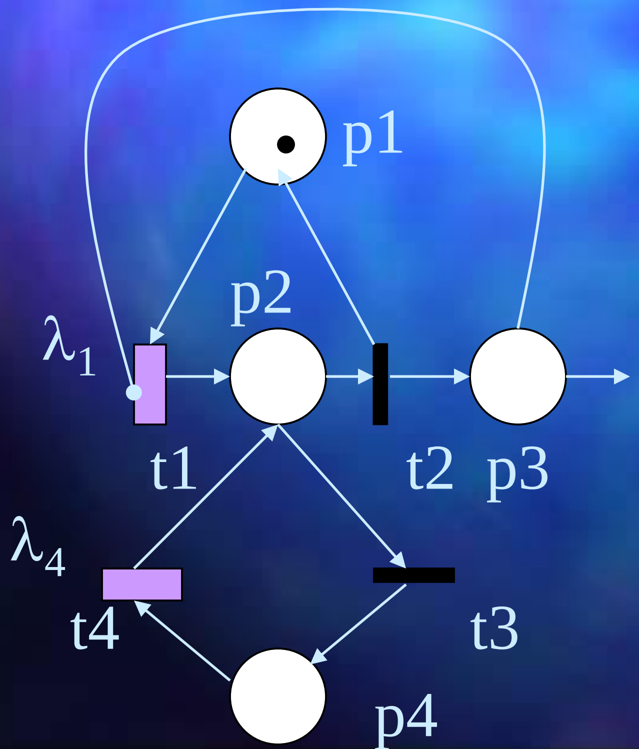
Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Definição:

$GSPN=(P,T,I,O,H,\Pi,W,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

$H : P\times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores



$\Pi : T \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ for temporizada} \\ \aleph^+ & \text{se } t \text{ for imediata} \end{cases}$

(Prioridade)

$W : T \rightarrow \Re^+$ (ou $W : T\times M \rightarrow \Re^+$) é

1. uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições temporizadas e
2. pesos usados na computação das probabilidades de disparo das transições imediatas

M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Semântica de Disparo de Transição

- Regras de habilitação

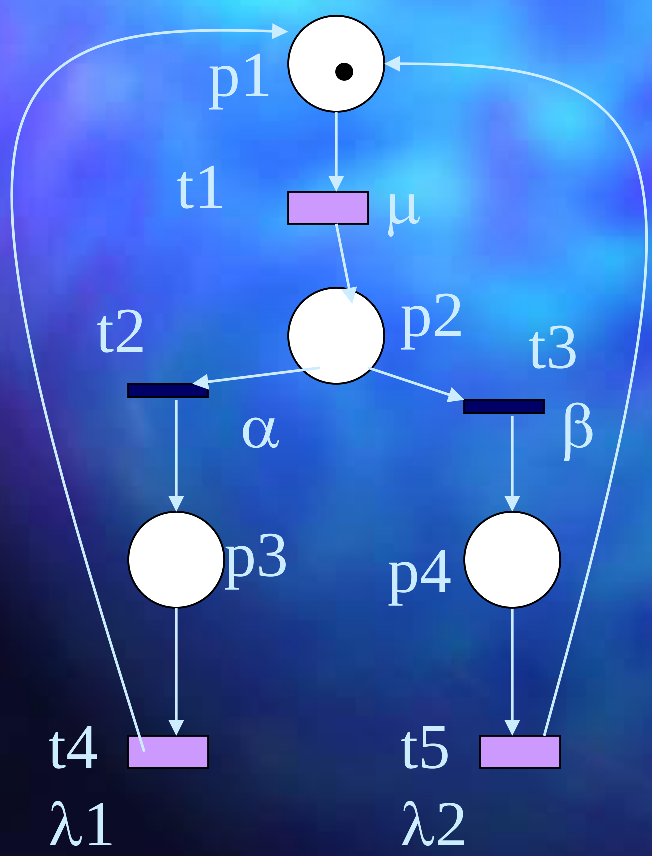
  $M[t_j >$, $M(pi) >= I(pi, t_j)$ e $M(pi) < H(pi, t_j)$

  $\forall$ pi $\in P$
- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- Transições imediatas disparam instantaneamente com prioridades sobre as temporizadas
- Diferentes níveis de prioridade podem ser associados às transições imediatas.
- Transições imediatas com mesmo nível de prioridade associada disparam de acordo com o peso associado a cada uma.
- *Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo

  Se $M[t_j > M'$

  $M'(pi) = M0(pi) - I(pi, t_j) + O(pi, t_j), \ \forall$ pi $\in P$

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



Reachability Set

RS = VS ∪ TS

VS ∩ TS = ∅

VS – *Vanishing set:*

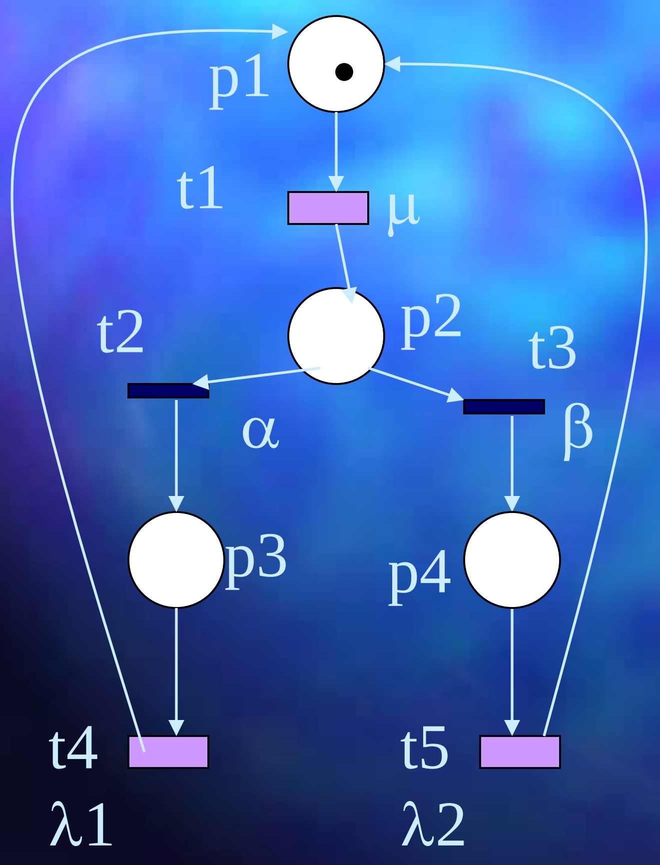
Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

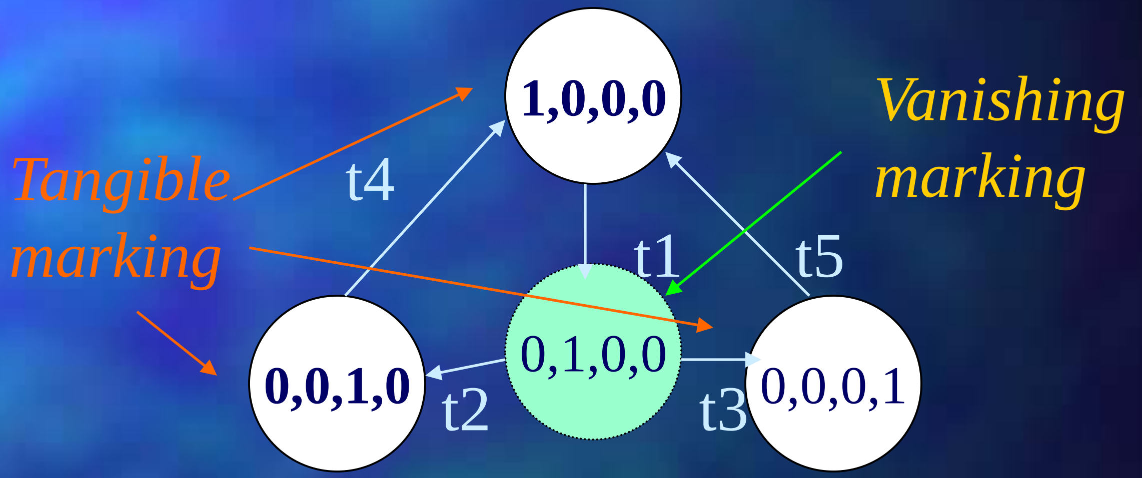
TS – *Tangible set:*

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

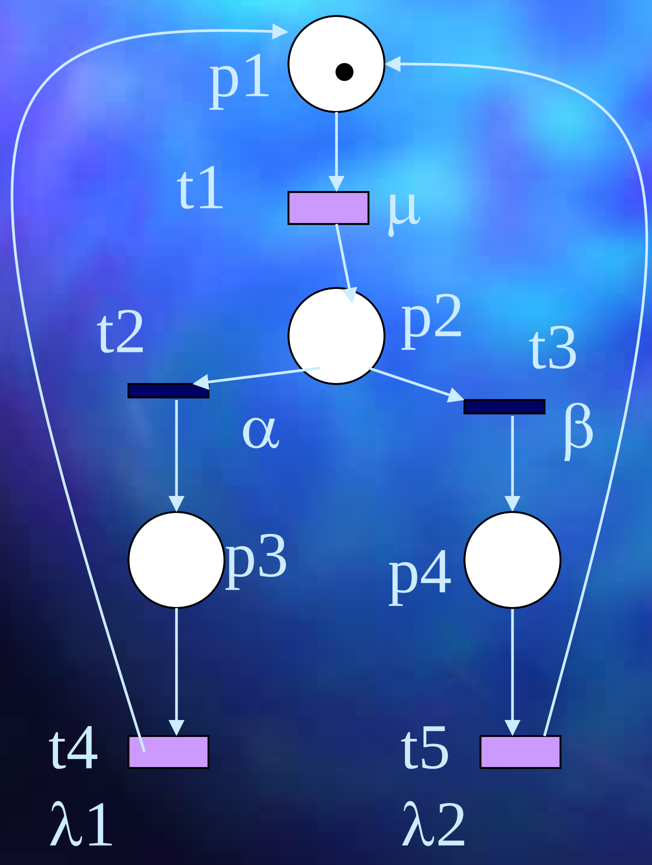
Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações





Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



$P\{t_k|m_j\} = \omega_k/q_j$

$q_j = \sum_{tk \in e(Mi)} \omega_k$

ω_k é a taxa de disparo de t_k.

$e(M_j)$ conjunto de transições habilitadas em M_j.

Quando a marcação é *vanishing,* ω_k é um peso (transição imediata).

Quando a marcação é *tangible,* ω_k é a taxa.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

- Assumindo a ausência de confusão, o cálculo do ECS consiste em particionar as transições imediatas em conjuntos os quais as transição de cada conjunto possam estar em conflito.
- Contudo, transições de diferentes ECS são concorrente.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

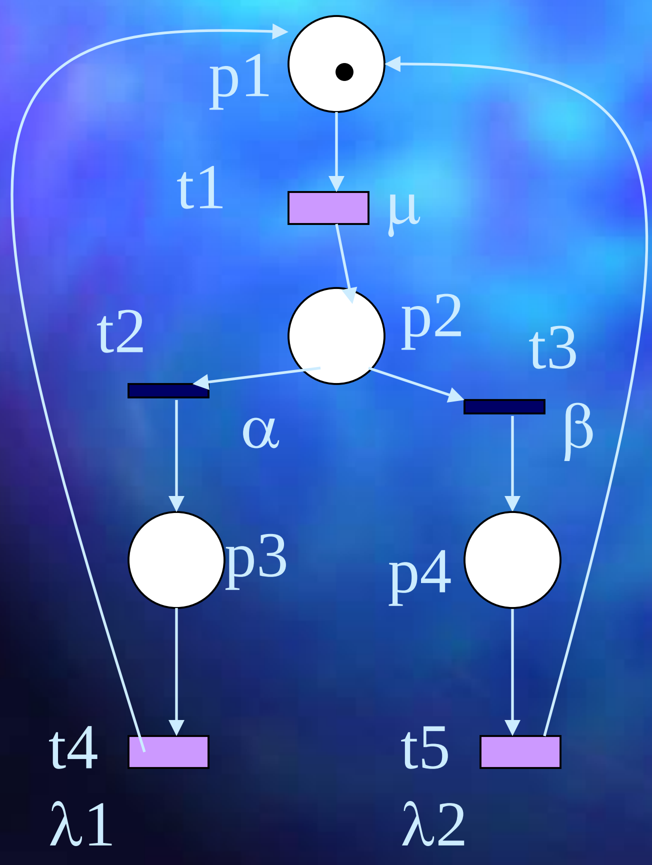
Quando transições de um único ECS são as únicas imediatas

$P\{t_k|m_i\} = \omega_k/w_k(m_i)$

$w_k(m_i) = \sum_{tj \in [ECS(tk) \wedge e(Mi)]} \omega_j$

Os pesos podem ser diferentes em diferentes marcações, mas a relação entre estes pesos é constante (sem confusão)

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



Reachability Set

$RS = VS \cup TS$

$VS \cap TS = \emptyset$

VS – *Vanishing set:*

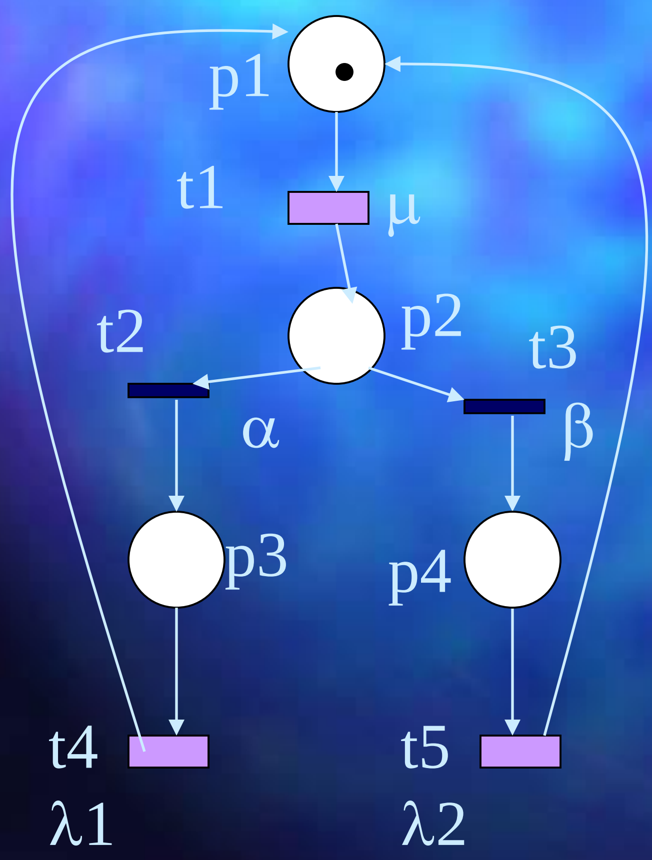
Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

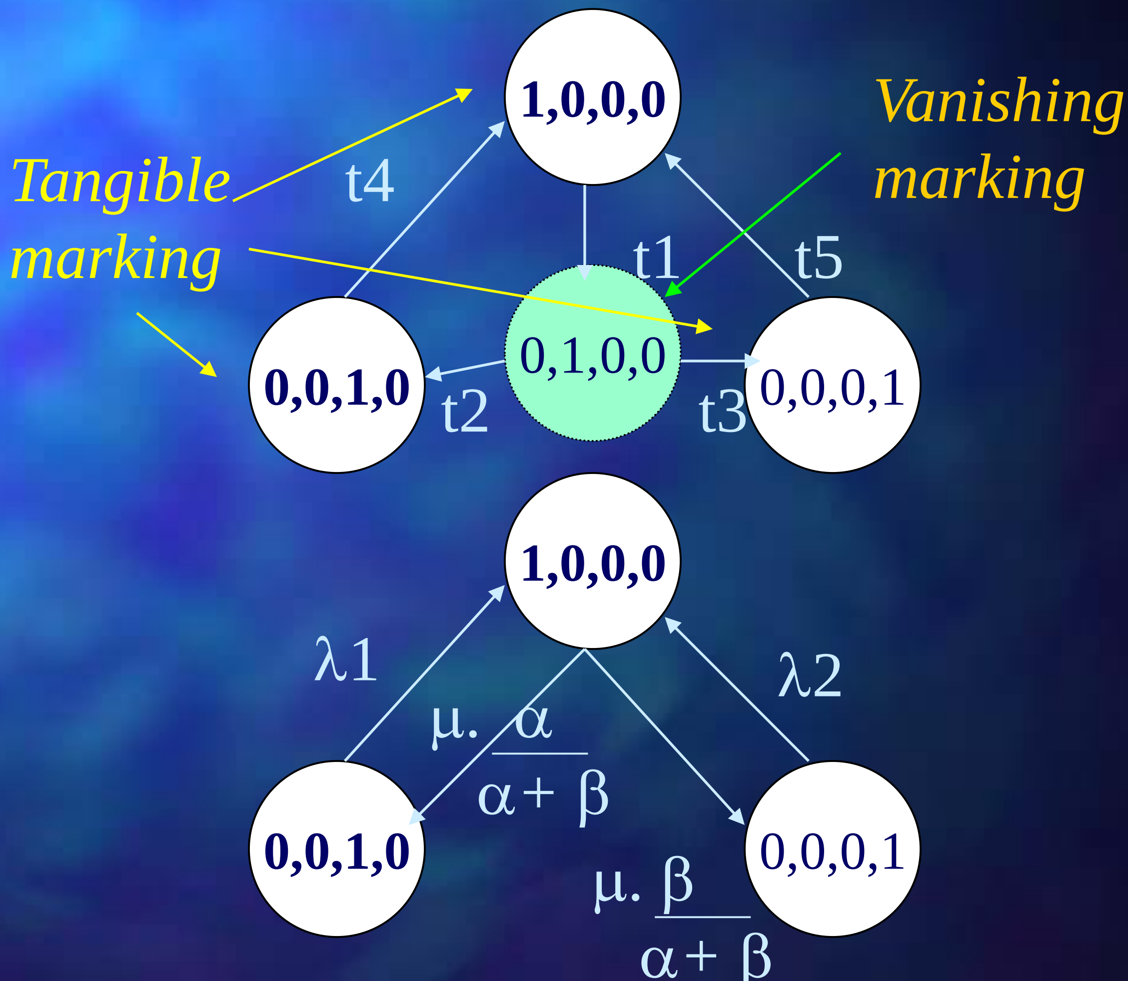
TS – *Tangible set:*

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações





Redes Estocásticas

- Para garantir a existência de probabilidade estacionária, a rede deve ser:
  - limitada *(bounded)*
  - reversível e
  - livre de bloqueio *(deadlock-free)*

$\Pi Q = 0, \sum_{M_i \in RS(N)} \pi_i = 1$

Probabilidade estacionária de uma marcação M_i

$(\pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_n)\ Q = (0, \ldots, 0, \ldots, 0)$

$\sum_1^n \pi_i = 1$

Redes Estocásticas

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \text{ , } \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$$

Redes Estocásticas

- Dada $M_j \in TS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k (t_k está habilitada em M_j) em M_j é:

  $p(t_k,M_j)= \lambda_k/\lambda_{j,}$, $\lambda_j= \Sigma_{t\in Tj}\, \lambda_t$

  $T_j = \{t \mid M_j\, [t>\}$

  λ_t é a taxa associada a transição t através da W

Redes Estocásticas

- Dadas $M_i \in VS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k em M_i é:

$$p(t_k,M_i)= \omega_k/\omega_k(M_i),$$

$$\omega_k(M_i)= \Sigma_{tj\in\{ECS(tk) \wedge Mi\ [tj>\}}\ \omega_j$$

ECS(tk) – *Extended Conflict Set*

$\omega_k(M_i)$ o peso associado à transição t_k na marcação M_i.

Caso haja mais de uma transição imediata, de diferentes ECS, habilitadas em uma marcação M, não importa a ordem de disparo, desde que a rede seja livre de confusão.

Redes Estocásticas

- Tempo de permanência numa marcação *(sojourn time)*

$$tm_i = 1/\lambda_j$$

$\lambda_j = \Sigma_{t \in Tj}\, \lambda_t$

$T_j = \{t \mid M_j\, [t>\}$

λ_t é a taxa associada a transição t através da W

Redes Estocásticas

- Probabilidade que um lugar p_j tenha k marcas

$$p(pj,k) = \sum_{i \in S1} p_i$$

$$S_1 = \{\ i \in \{1,2,..,S\}\ |\ M_i(p_j)=k\}$$

- Número esperado de marcas no lugar p_j

$$Em(p_j) = \sum_{x=1}^{K} x\ .p(pj,x)$$

K é o número máximo de marcas que o lugar pj pode conter

Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição temporizada

$$TR(t_j) = \sum_{i \in S2} p_i \,.\, \lambda_j$$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j> \}$

- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- λ_j é a taxa associada à transição t_j

Redes Estocásticas

- Tempo médio entre disparos de uma transição

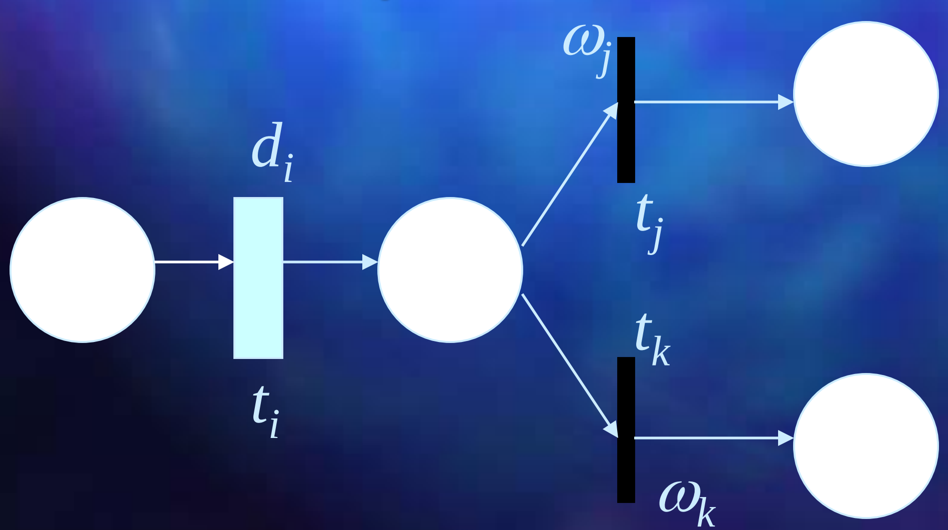
$T = 1/TR(t_j) = 1/(\sum_{i \in S2} p_i \,.\, \lambda_j)$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- λ_j é a taxa associada à transição t_j

Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição imediata
  - Pode ser calculada de uma transição exponencial e a estrutura do modelo GSPN.



$TR(t_j) = TR(t_i) \times (\omega_j / \omega_j + \omega_j)$

tj e tk são as únicas transições de um ECS.

Redes Estocásticas

- *Littles's law*

$E[X] = \lambda E[s]$ (ergódico)

$E[X]$ - tamanho médio da fila.

$E[s]$ – *response time* do sistema.

λ - taxa de chegada

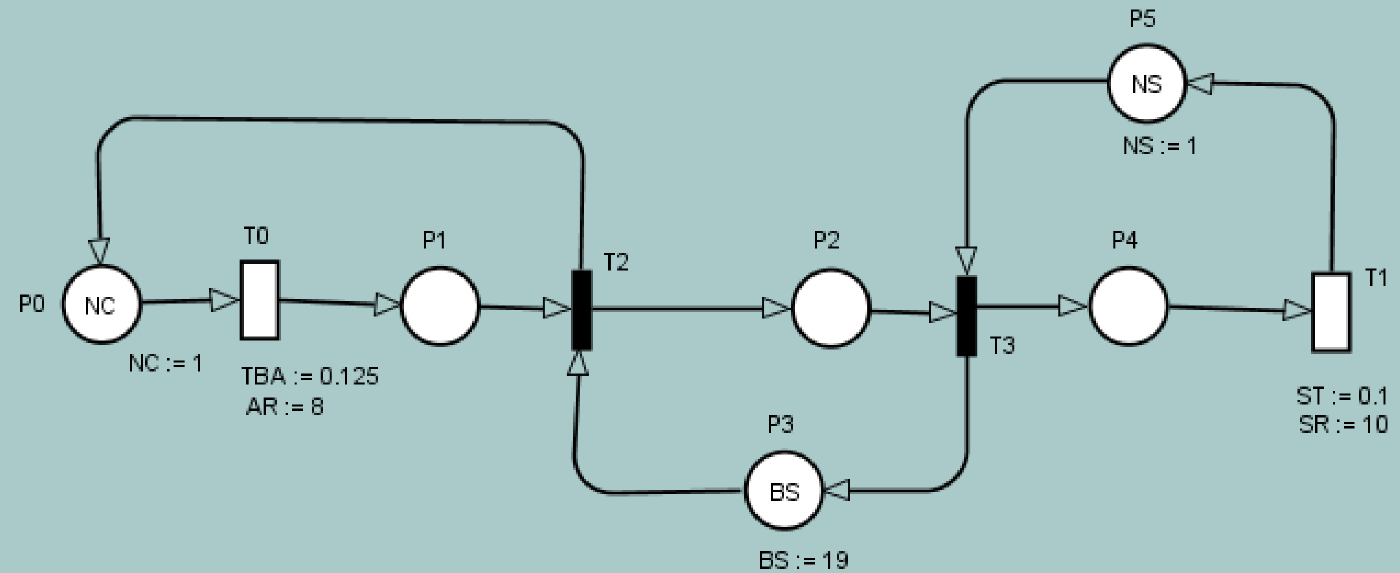
Redes Estocásticas

- *Tempo médio de espera em um lugar*
  - $\text{Wait}(pi) = \dfrac{Em(p_i)}{\sum_{tj \in I(pi)} TR(t_j)} = \dfrac{Em(p_i)}{\sum_{tj \in O(pi)} TR(t_j)}$
  - $Em(p_i)$ é o número médio de marcas no lugar p_i.
  - $TR(t_j)$ *throughput* da transição t_j.

Redes Estocásticas

Representação explícita do descarte

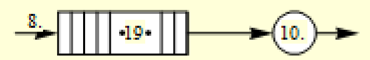
MM1K



Utilization = P{#P5=0}
Throughput = P{#P4>0}*(1/ST)
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P4}
MST = (E{#P2}+E{#P4})*TBA
MQT = E{#P2}*TBA
DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}
DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}*AR

Utilization = 0.798513290494
Throughput = 7.985132904942
MQS = 3.036090276985
MSS = 3.834603567479
MST = 0.479325445935
MQT = 0.379511284623
DiscardProb = 0.001858386882
DiscardRate = 0.014867095058

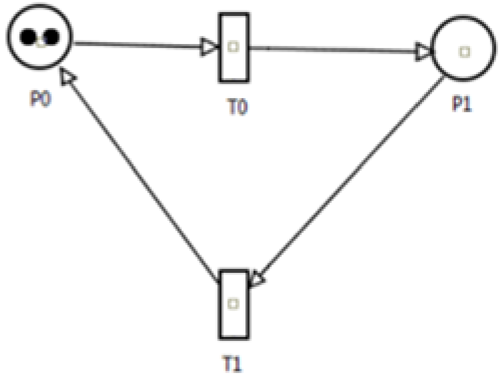
```
λ = 8.; μ = 10.; n = 1; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```



Basic Properties	
QueueNotation	M/M/1/20
ArrivalRate	8.
ServiceRate	10.
UtilizationFactor	0.798138
Throughput	7.98138
ServiceChannels	1
SystemCapacity	20
InitialState	0
Performance Measures	
MeanSystemSize	3.80451
MeanSystemTime	0.476673
MeanQueueSize	3.00637
MeanQueueTime	0.376673

Redes Estocásticas

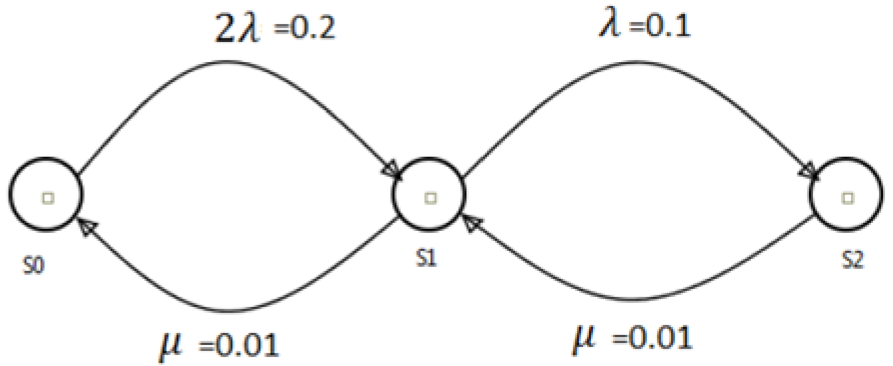
Throughput de transições *K-server semantics*



$$Throughput(T_0) = \pi(s_0) \times 2\lambda + \pi(s_1) \times \lambda$$
$$Throughput(T_0) = P\{m(P_0) = 2\} \times 2\lambda + P\{m(P_0) = 1\} \times \lambda$$
$$Throughput(T_0) = P\{EnablingDegree(T_0) = 2\} \times 2\lambda + P\{EnablingDegree(T_0) = 1\} \times \lambda$$

$$TP(T_0) = P\{\#P0 = 2\} \times 0.2 + P\{\#P0 = 1\} \times 0.1 = = 0.009954751$$

Directly from the CTMC:

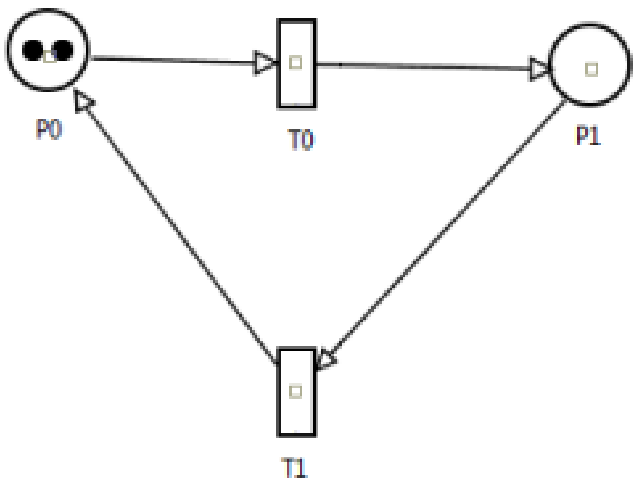


$\pi(s2)$=0.9049773755656109
$\pi(s1)$=0.09049773755656108
$\pi(s0)$=0.004524886877828055

$$Throughput(T_0) = \pi(s_0) \times 2\lambda + \pi(s_1) \times \lambda = 0.009954751$$

Redes Estocásticas

Throughput de transições *K-server semantics*



$$TP(T0) = E\{\#P0\} \times \lambda$$

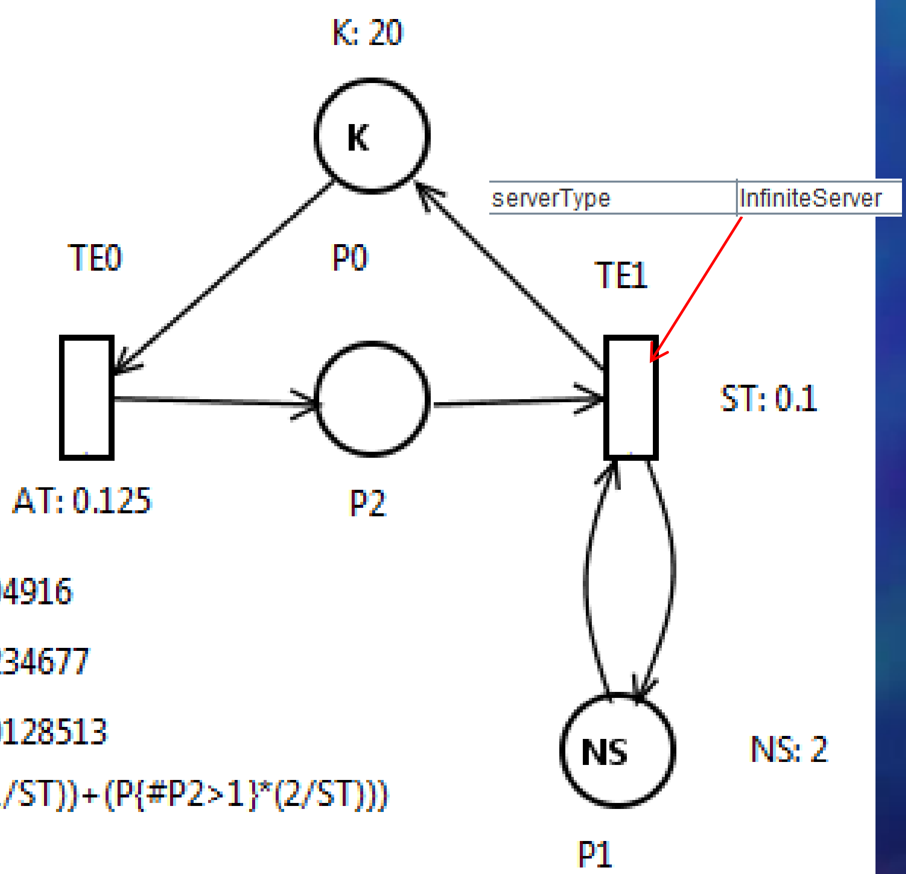
VALOR ESPERADO DO LUGAR DE ENTRADA DO T_0.

$$Throughput(T_0) = \sum_{i=1}^{n} P\{EnablingDegree(T_0) = i\} \times i\lambda$$

Where n is the highest enabling degree of T_0.

Redes Estocásticas

MM2K



TP: 7.999999924604916

ASS: 0.952380822234677

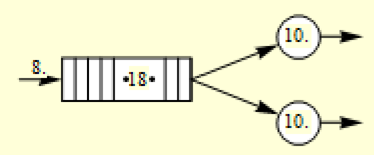
RT: 0.11904760390128513

TP: ((P{#P2=1}*(1/ST))+(P{#P2>1}*(2/ST)))

ASS: E{#P2}

RT: ((E{#P2})/((P{#P2=1}*(1/ST))+(P{#P2>1}*(2/ST))))

```
λ = 8.; μ = 10.; n = 2; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```

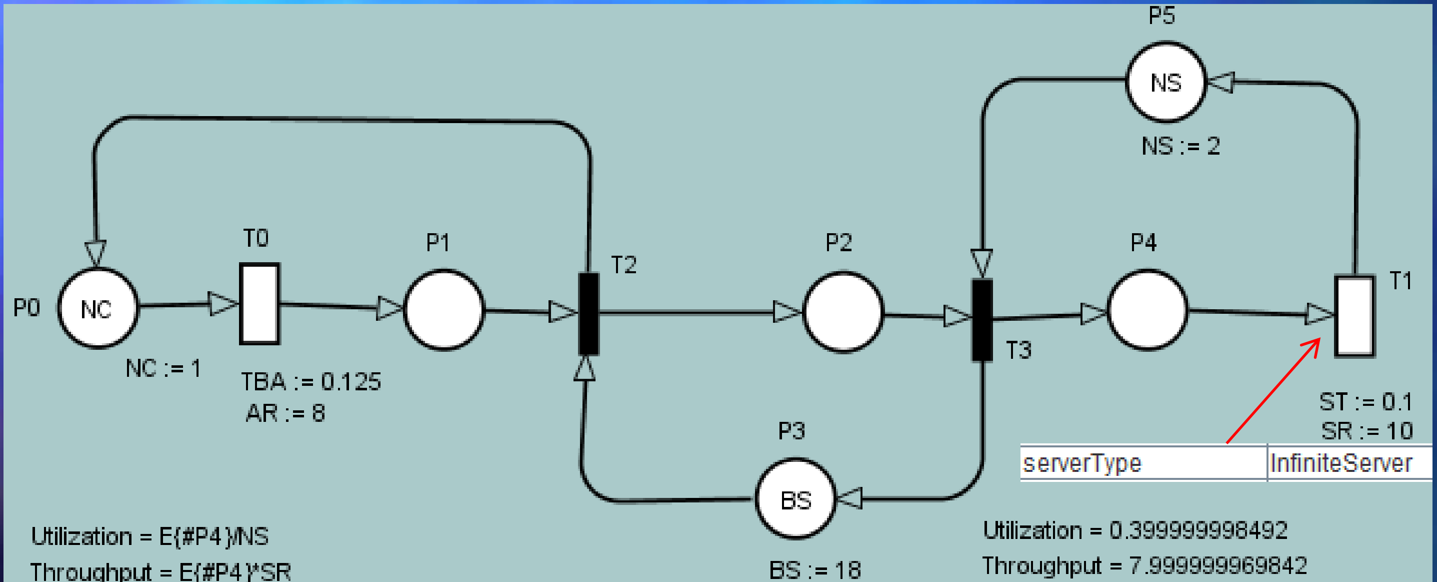


Basic Properties	
QueueNotation	M/M/2/20
ArrivalRate	8.
ServiceRate	10.
UtilizationFactor	0.4
Throughput	8.
ServiceChannels	2
SystemCapacity	20
InitialState	0
Performance Measures	
MeanSystemSize	0.952381
MeanSystemTime	0.119048
MeanQueueSize	0.152381
MeanQueueTime	0.0190476

Redes Estocásticas

Representação implícita do descarte

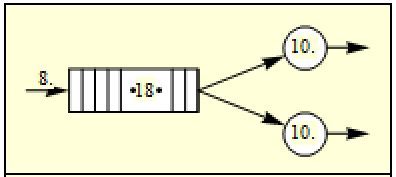
MM2K



Utilization = E{#P4}/NS
Throughput = E{#P4}*SR
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P4}
MST = (E{#P2}+E{#P4})*TBA
MQT = E{#P2}*TBA
DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}
DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}*AR

Utilization = 0.399999998492
Throughput = 7.999999969842
MQS = 0.152380897055
MSS = 0.95238089404
MST = 0.119047611755
MQT = 0.019047612132
DiscardProb = 3.77E-9
DiscardRate = 3.0158E-8

```
λ = 8.; μ = 10.; n = 2; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```

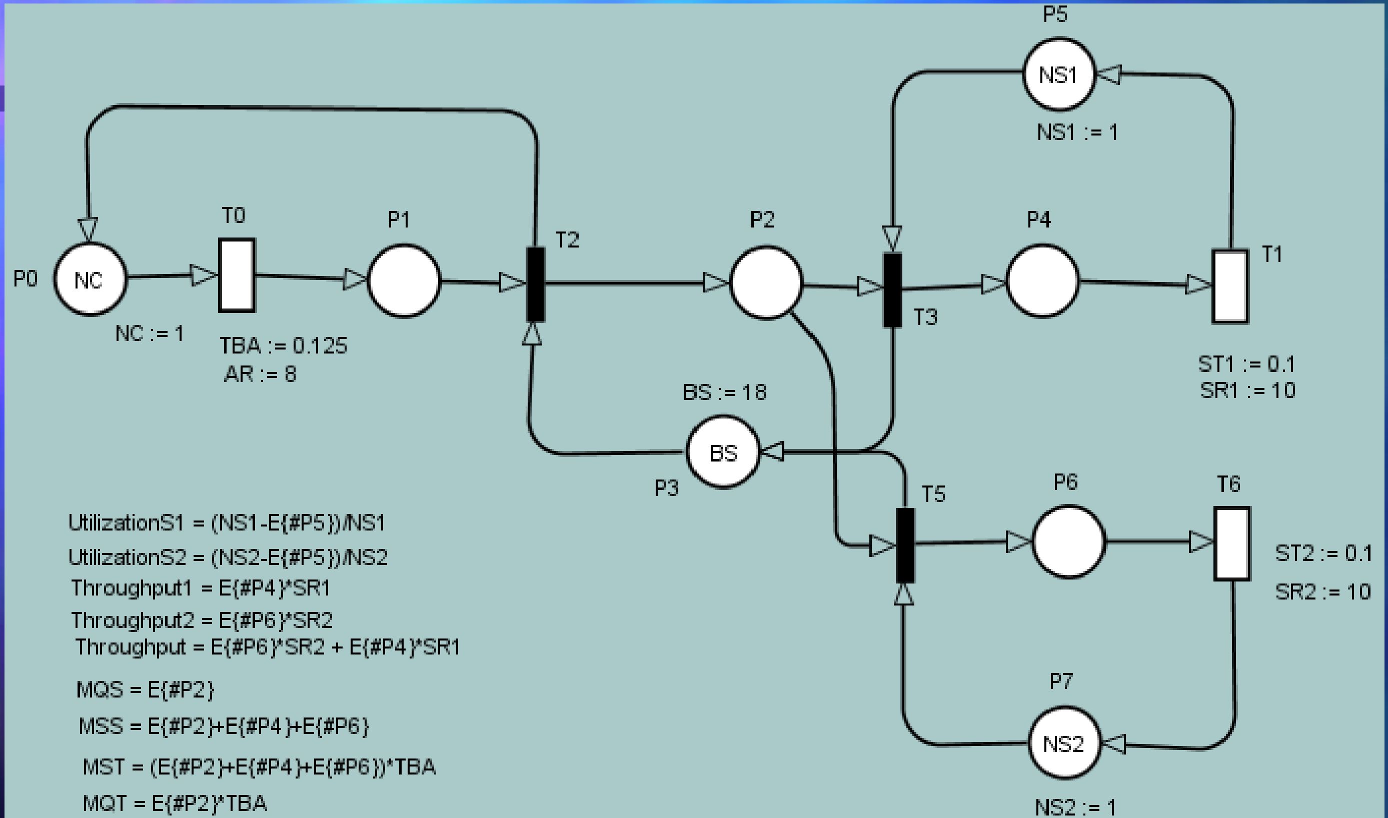


Basic Properties	
QueueNotation	M/M/2/20
ArrivalRate	8.
ServiceRate	10.
UtilizationFactor	0.4
Throughput	8.
ServiceChannels	2
SystemCapacity	20
InitialState	0
Performance Measures	
MeanSystemSize	0.952381
MeanSystemTime	0.119048
MeanQueueSize	0.152381
MeanQueueTime	0.0190476

Redes Estocásticas

MM2K

Equivalente ao anterior. Servidores representados individualmente



UtilizationS1 = (NS1-E{#P5})/NS1

UtilizationS2 = (NS2-E{#P5})/NS2

Throughput1 = E{#P4}*SR1

Throughput2 = E{#P6}*SR2

Throughput = E{#P6}*SR2 + E{#P4}*SR1

MQS = E{#P2}

MSS = E{#P2}+E{#P4}+E{#P6}

MST = (E{#P2}+E{#P4}+E{#P6})*TBA

MQT = E{#P2}*TBA

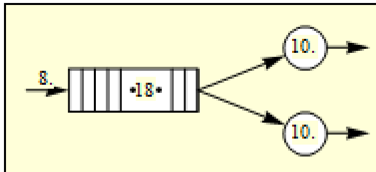
DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS1) AND (#P6=NS2)}

DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS1) AND (#P6=NS2)}*AR

UtilizationS1 = 0.376547231148
UtilizationS2 = 0.338762214854
Throughput1 = 3.765472311484
Throughput2 = 4.234527685679
Throughput = 7.999999997163

MQS = 0.103515664521
MSS = 0.818825110524
MST = 0.102353138815
MQT = 0.012939458065
DiscardProb = 3.55E-10
DiscardRate = 2.837E-9

```
λ = 8.; μ = 10.; n = 2; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```

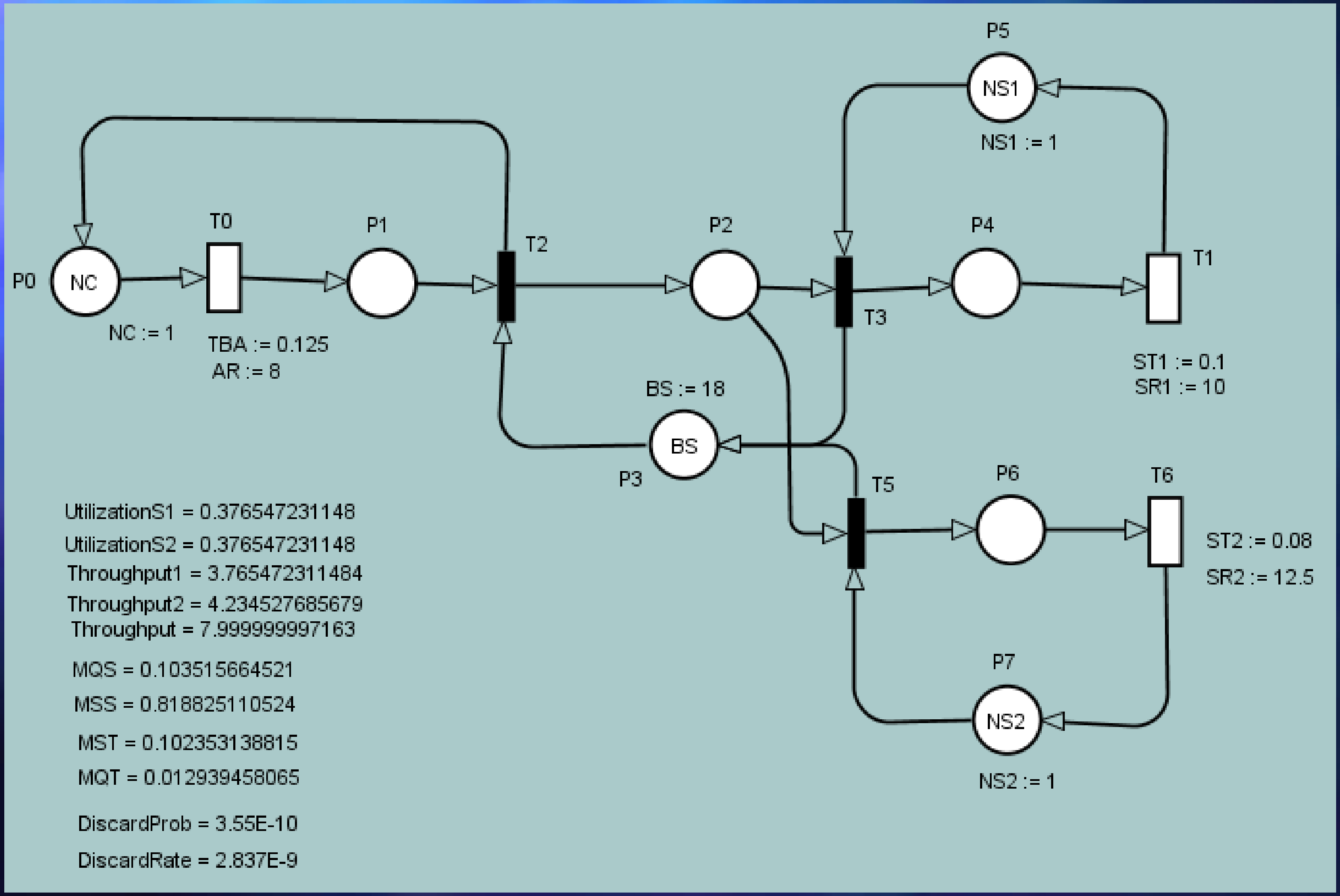


Basic Properties	
QueueNotation	M/M/2/20
ArrivalRate	8.
ServiceRate	10.
UtilizationFactor	0.4
Throughput	8.
ServiceChannels	2
SystemCapacity	20
InitialState	0
Performance Measures	
MeanSystemSize	0.952381
MeanSystemTime	0.119048
MeanQueueSize	0.152381
MeanQueueTime	0.0190476

Redes Estocásticas

MMn1n2K

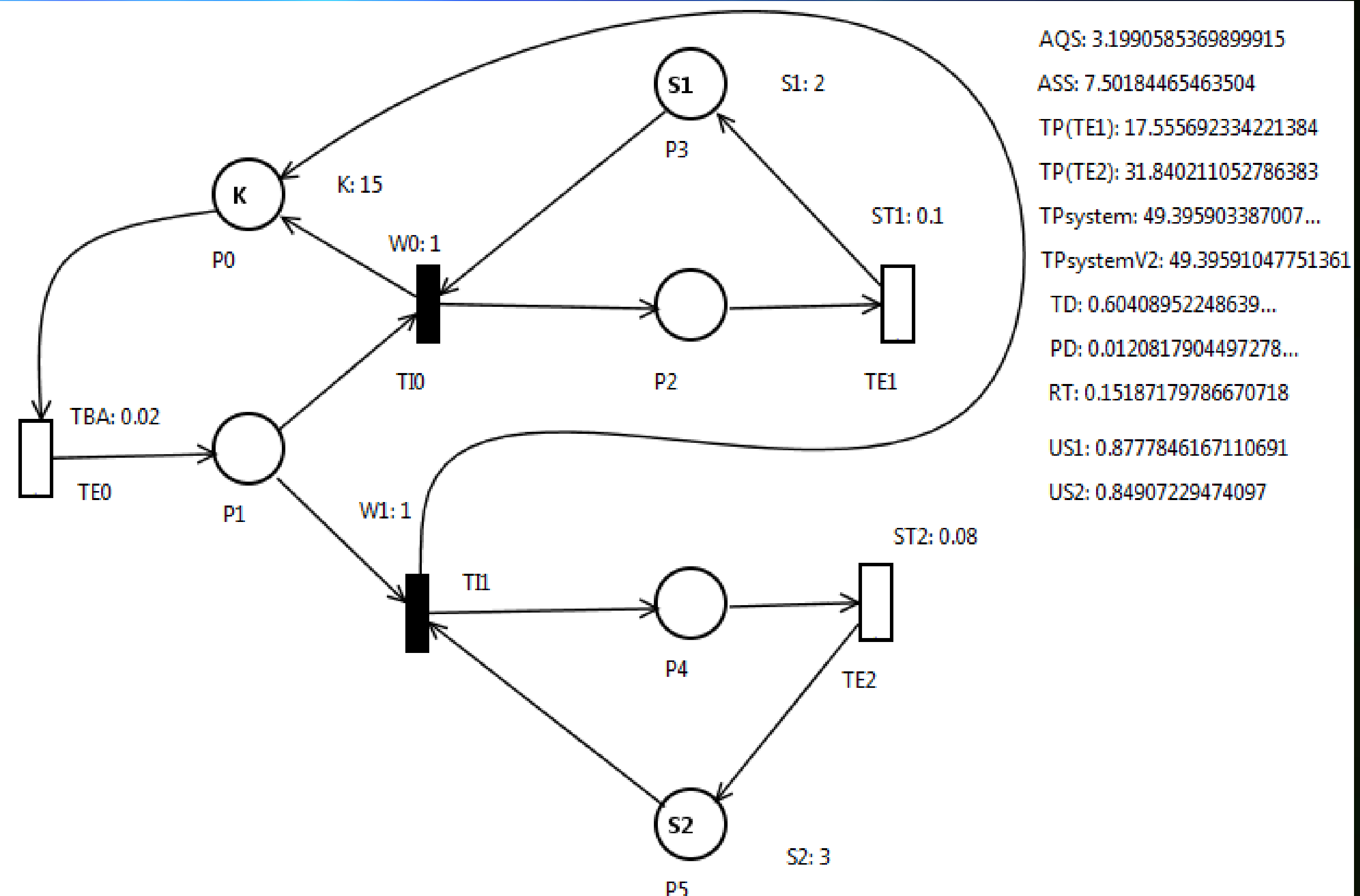
Servidores com caracterísitcas diferentes.



Redes Estocásticas

Servidores com caracterísitcas diferentes.

MMn1n2K_new




```
AQS         = "E{#P1}"
ASS         = "(E{#P1})+(E{#P2})+(E{#P4})"
TP(TE1)     = "((P{#P2=1}*(1/ST1))+(P{#P2>1}*(2/ST1)))"
TP(TE2)     = "((P{#P4=1}*(1/ST2))+ (P{#P4=2}*(2/ST2))+ (P{#P4>2}*(3/ST2)))"
TPsystem    = "(((P{#P2=1}*(1/ST1))+(P{#P2>1}*(2/ST1)))+((P{#P4=1}*(1/ST2))+ (P{#P4=2}*(2/ST2))+ (P{#P4>2}*(3/ST2))))"
RT          = "(((E{#P1})+(E{#P2})+(E{#P4}))/(((P{#P2=1}*(1/ST1))+(P{#P2>1}*(2/ST1)))+((P{#P4=1}*(1/ST2))+(P{#P4=2}*(2/ST2))+(P{#P4>2}*(3/ST2)))))"
TD          = "(P{(#P1+#P2+#P4)=20}*(1/TBA))"
TPsystemV2  = "((1/TBA)-(P{(#P1+#P2+#P4)=20}*(1/TBA)))"
US1         = "E{#P2}/S1"
US2         = "E{#P4}/S2"
PD          = "P{(#P1+#P2+#P4)=20}"
```

Redes Estocásticas

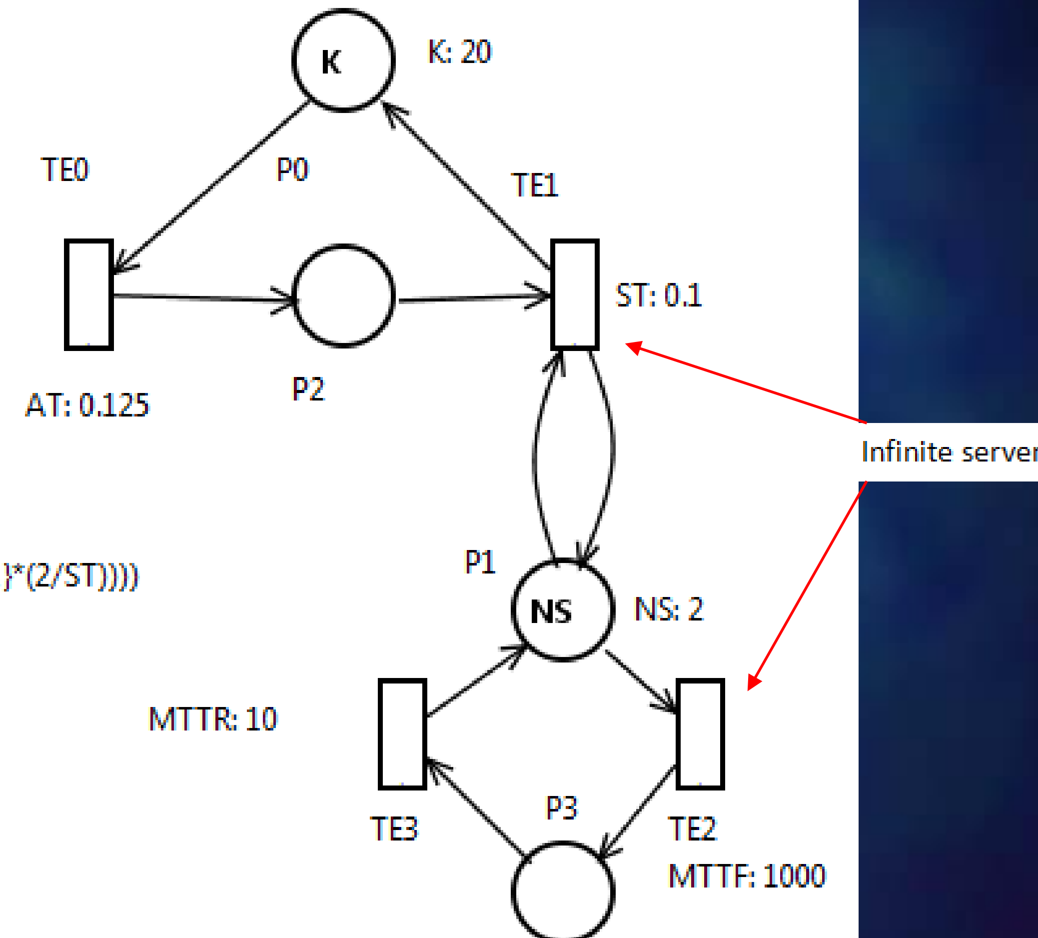
Fila com 2 servidores e com falha e reparo
versão com *k-server semantics*

TP: 8.11994814986422

ASS: 1.0044251248977627
RT: 0.12369846535467822
U: 0.2877569272583657

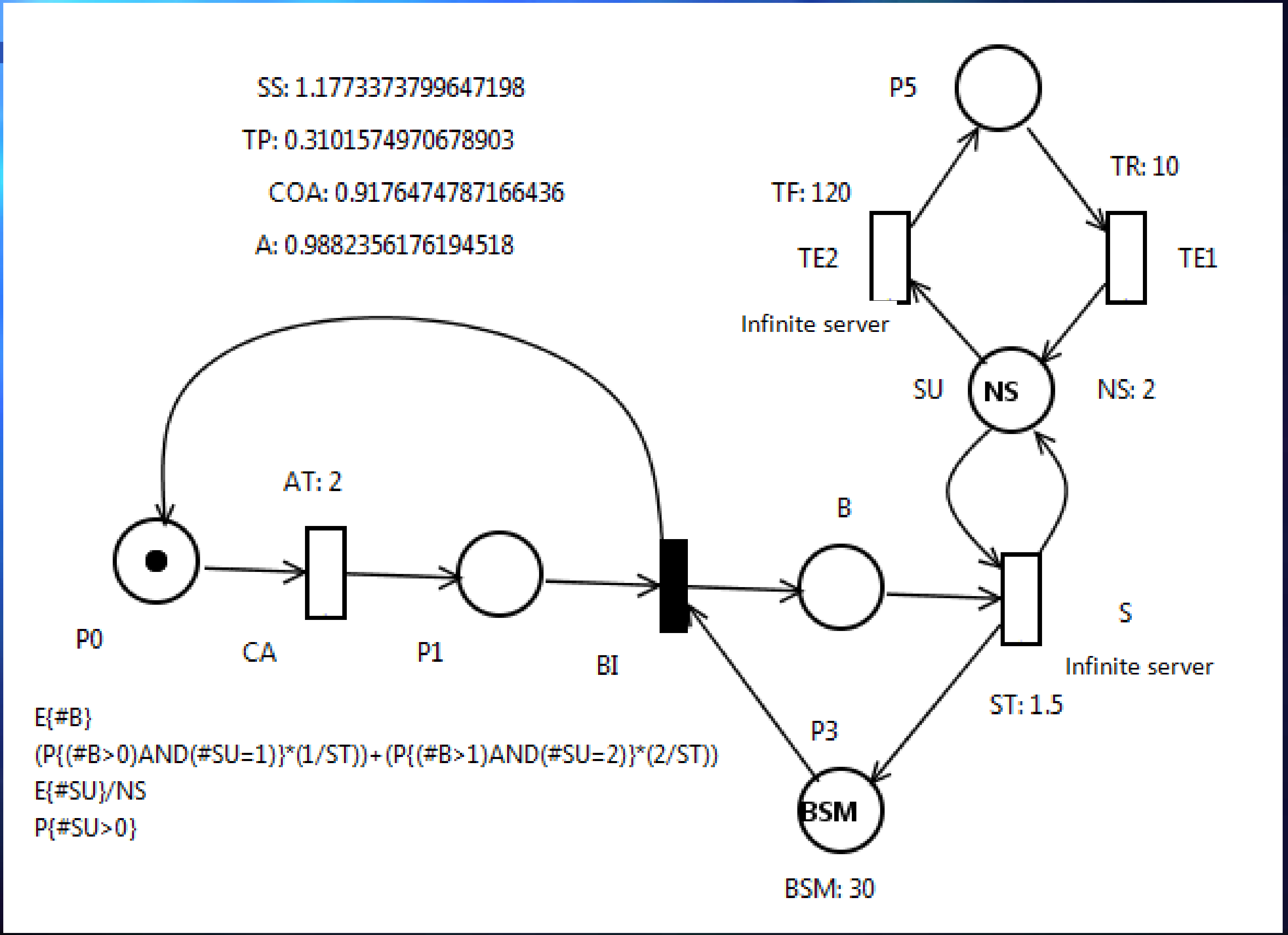
A: 0.9998005331051809
COA: 0.9899968900134359

TP: ((P{#P2=1}*(1/ST))+(P{#P2>1}*(2/ST)))
ASS: E{#P2}
RT: ((E{#P2})/((P{#P2=1}*(1/ST))+(P{#P2>1}*(2/ST))))
U: P{((#P2>0)AND(#P1>0))}/NS
A: P{#P1>0}
COA: (((P{#P1=2}*2)+(P{#P1=1}))/NS)



Redes Estocásticas

Fila com 2 atendentes e com tempo de repouso
versão com *k-server semantics*



Redes Estocásticas

Fila com 2 atendentes e com tempo de repouso

versão com *k-server semantics*

$SS = E\{\#B\}$

$TP = P\{\#B > 0\ AND\ \#SU = 1\} * (1/ST) + P\{\#B > 1\ AND\ \#SU = 2\} * (2/ST)$

$COA = E\{\#SU\}/NS$

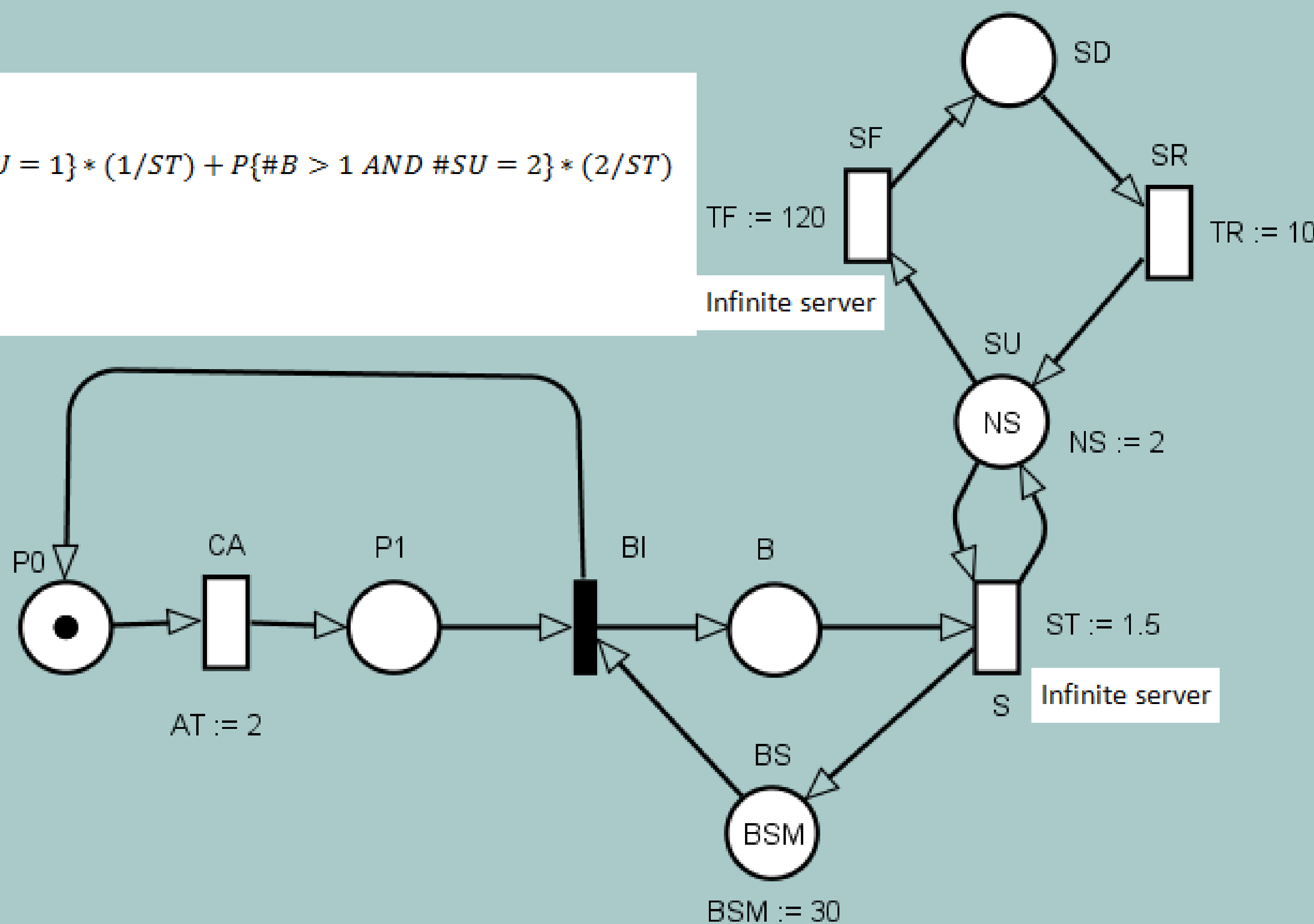
$A = P\{\#SU > 0\}$

SS = 1.1773716

TP = 0.3101585

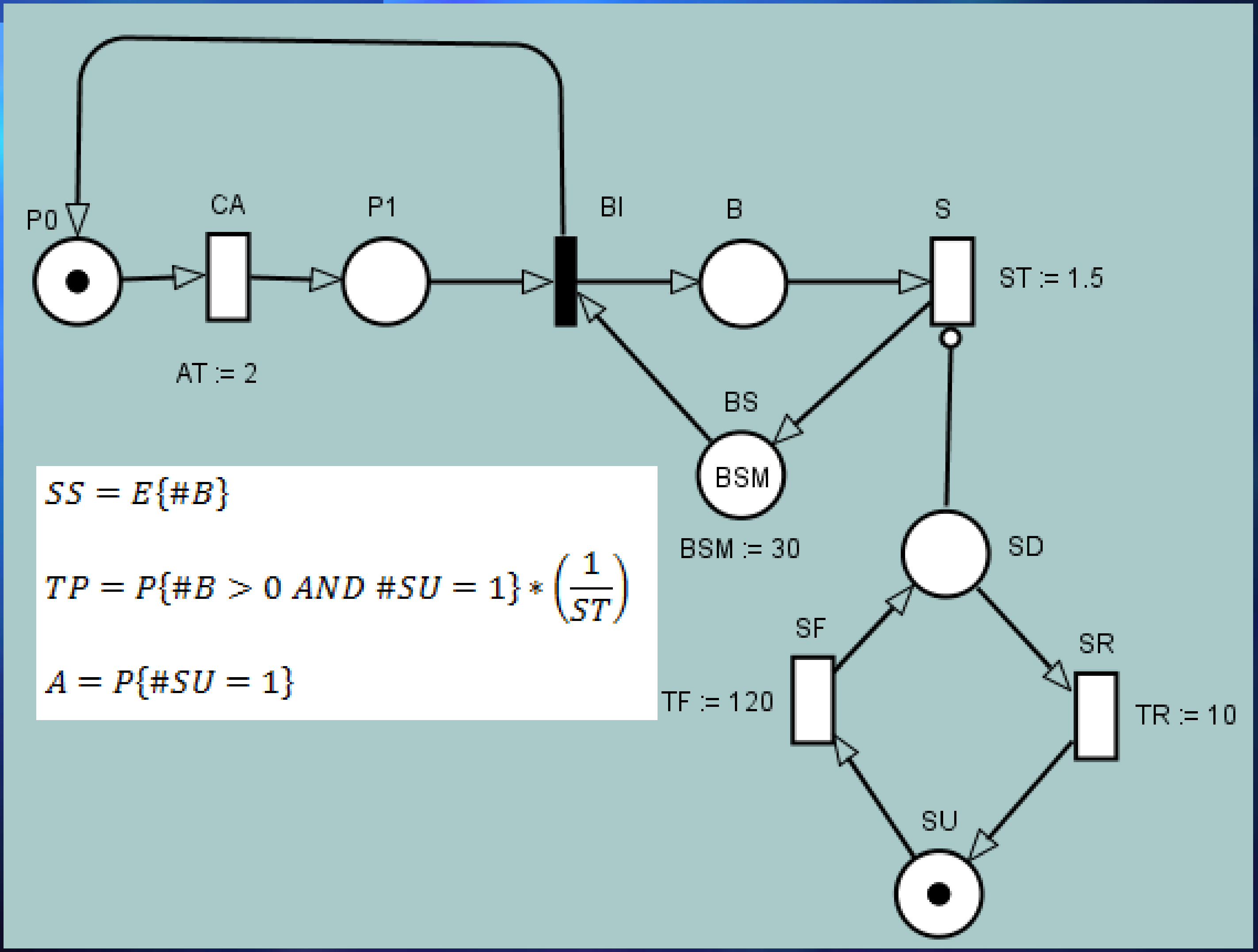
COA = 0.9176471

A = 0.9882353



Redes Estocásticas

Fila com 1 atendente e com tempo de repouso versão com *marking dependente delay*



$$SS = E\{\#B\}$$

$$TP = P\{\#B > 0 \ AND \ \#SU = 1\} * \left(\frac{1}{ST}\right)$$

$$A = P\{\#SU = 1\}$$

Redes Estocásticas

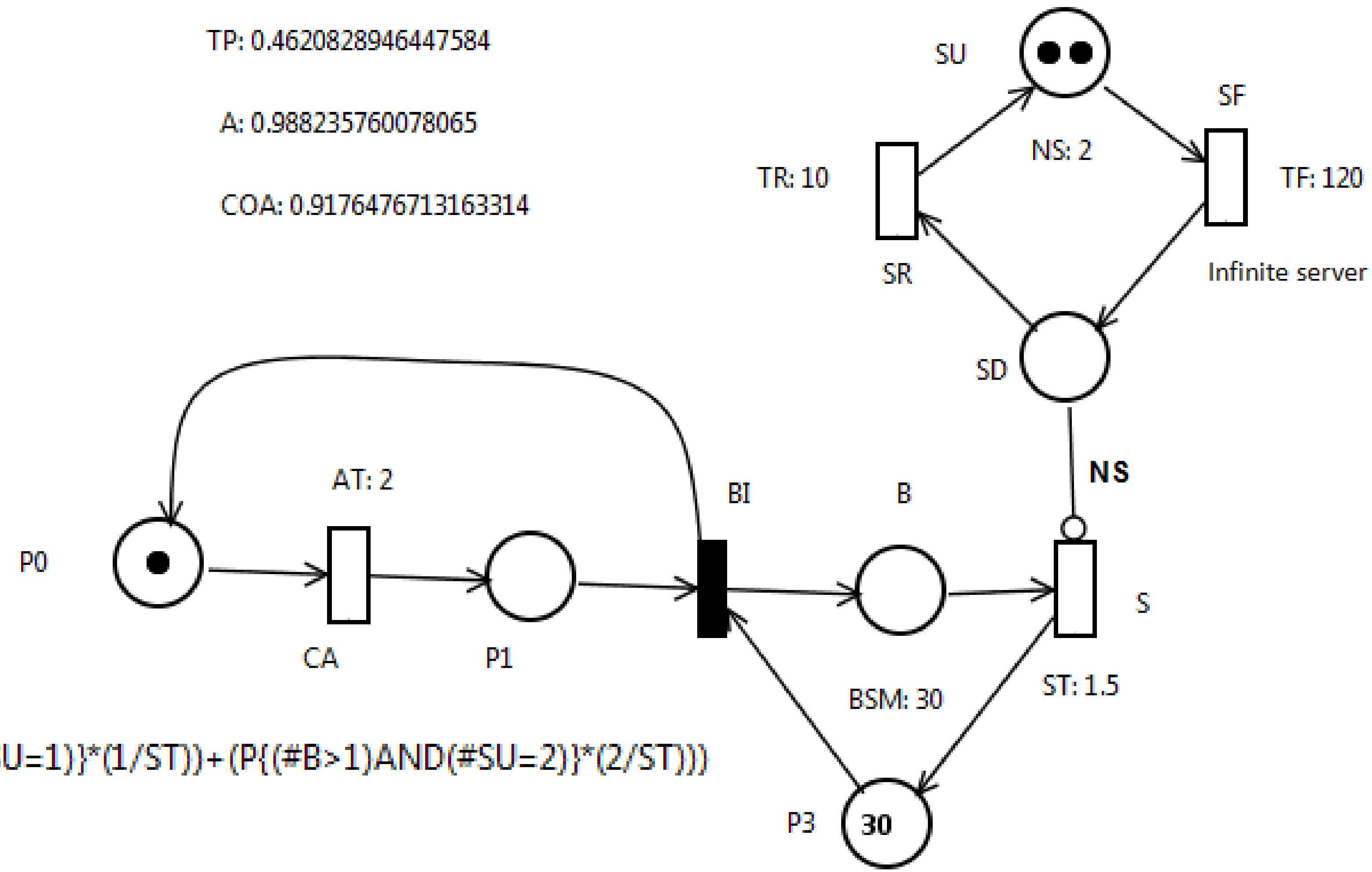
Fila com 2atendente e com tempo de repouso versão com *marking dependente delay*

ASS: 1.4423743859222655

TP: 0.4620828946447584

A: 0.988235760078065

COA: 0.9176476713163314



E{#B}

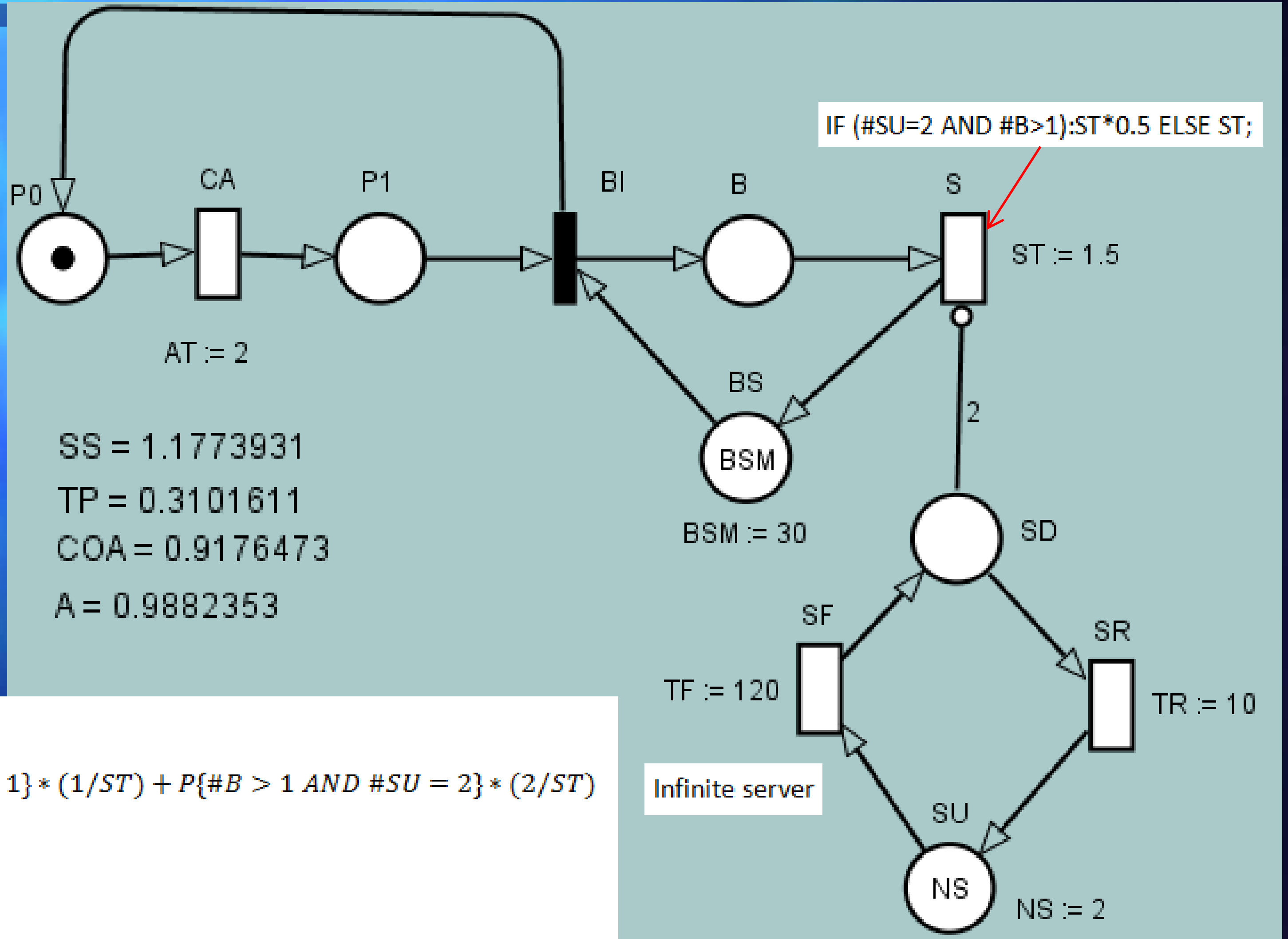
((P{(#B>0)AND(#SU=1)}*(1/ST))+(P{(#B>1)AND(#SU=2)}*(2/ST)))

E{#SU}/NS

P{#SU>0}

Redes Estocásticas

Fila com 2 atendentes e com tempo de repouso versão com *marking dependente delay*



$SS = E\{\#B\}$

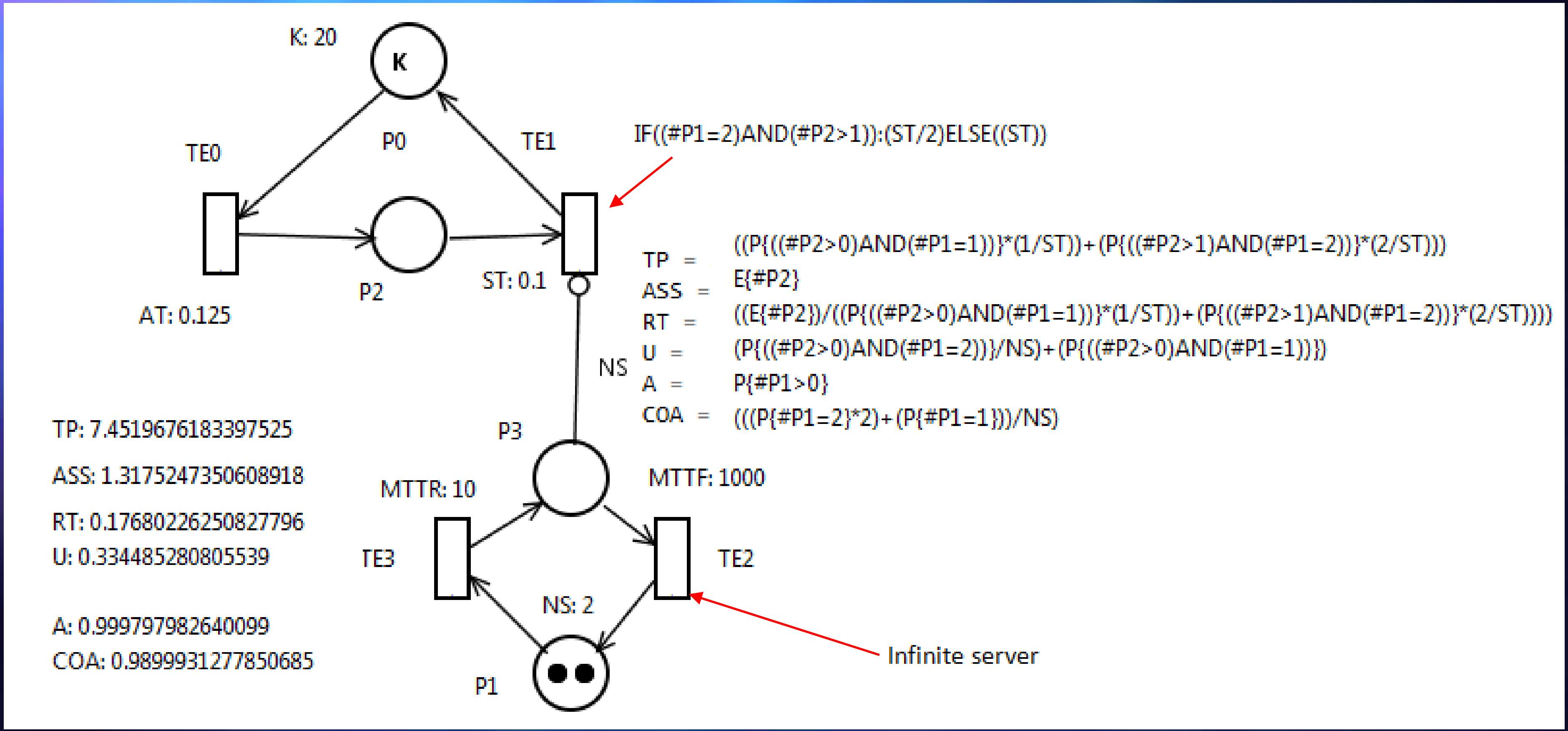
$TP = P\{\#B > 0\ AND\ \#SU = 1\} * (1/ST) + P\{\#B > 1\ AND\ \#SU = 2\} * (2/ST)$

$COA = E\{\#SU\}/NS$

$A = P\{\#SU > 0\}$

Redes Estocásticas

Fila com 2 servidores e com falha e reparo
versão com *marking dependente delay*



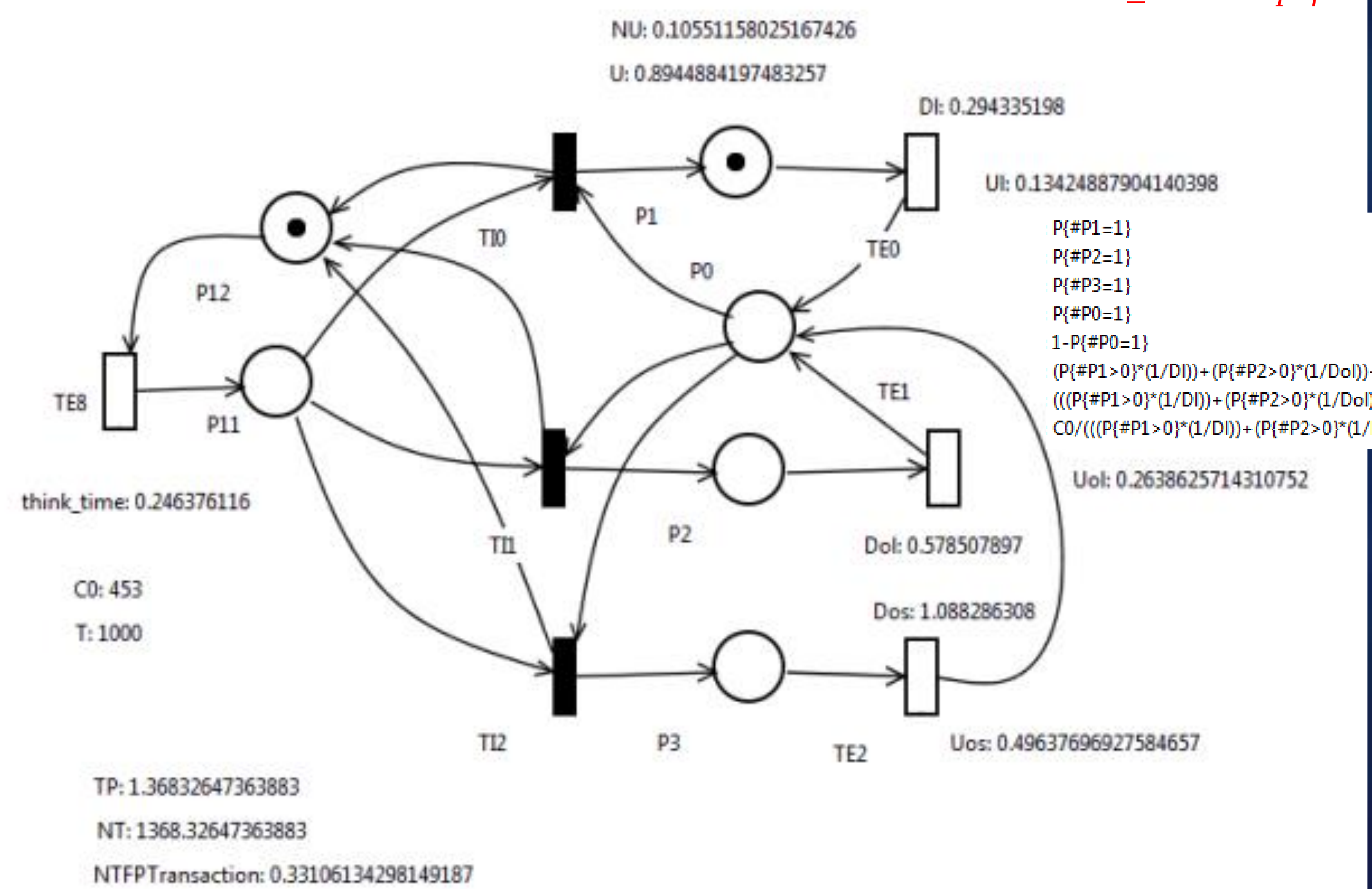
Excel

Redes Estocásticas

Assigning Time Demand to Transitions - Multiclass Processor Workload

SPN (Modeled using Mercury):

Also open the file Models_booknote.pdf



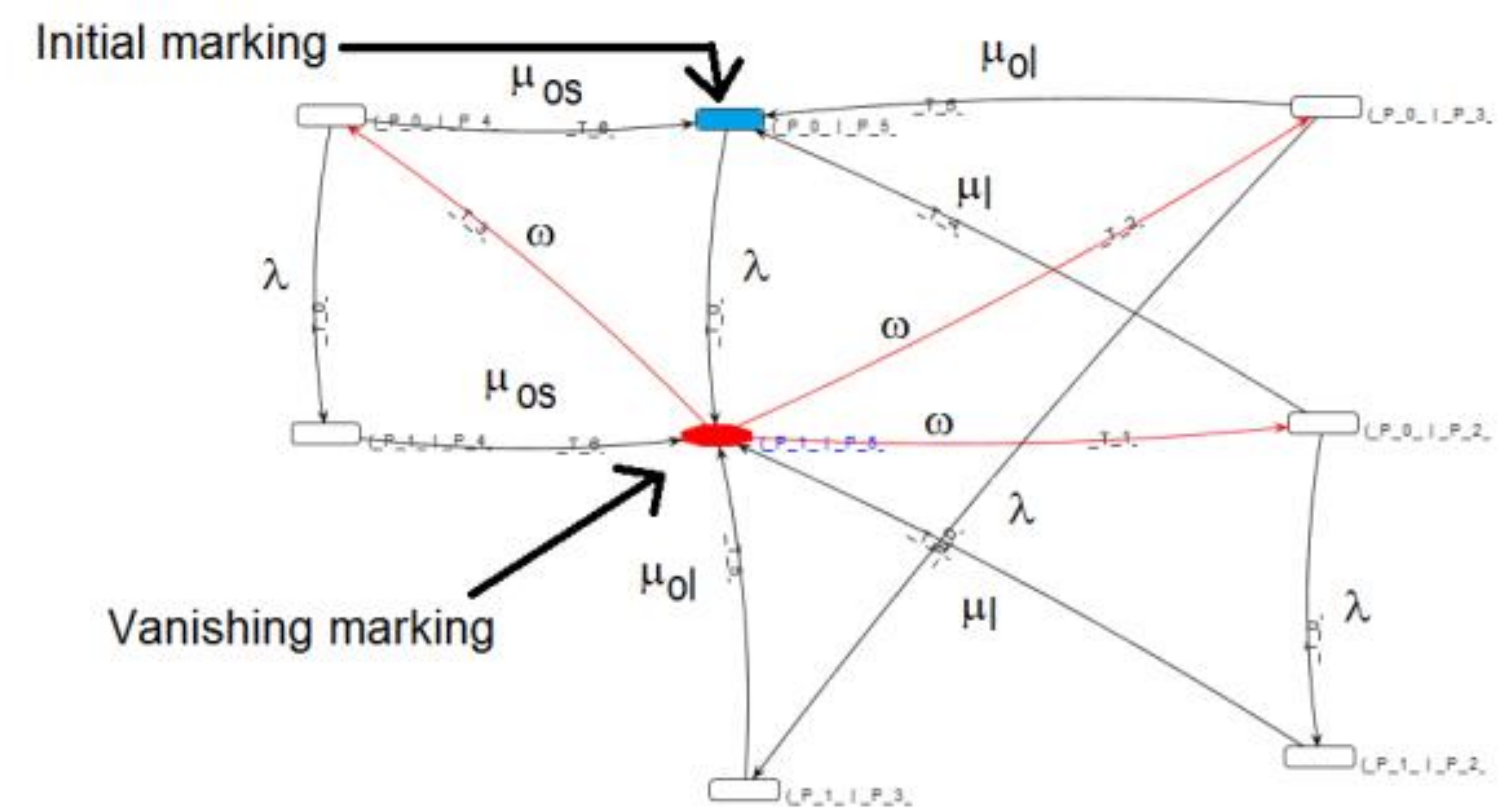
P{#P1=1}
P{#P2=1}
P{#P3=1}
P{#P0=1}
1-P{#P0=1}
(P{#P1>0}*(1/DI))+(P{#P2>0}*(1/Dol))+(P{#P3>0}*(1/Dos))
(((P{#P1>0}*(1/DI))+(P{#P2>0}*(1/Dol))+(P{#P3>0}*(1/Dos)))*T)
C0/(((P{#P1>0}*(1/DI))+(P{#P2>0}*(1/Dol))+(P{#P3>0}*(1/Dos)))*T)

Excel

Redes Estocásticas

Assigning Time Demand to Transitions - Multiclass Processor Workload

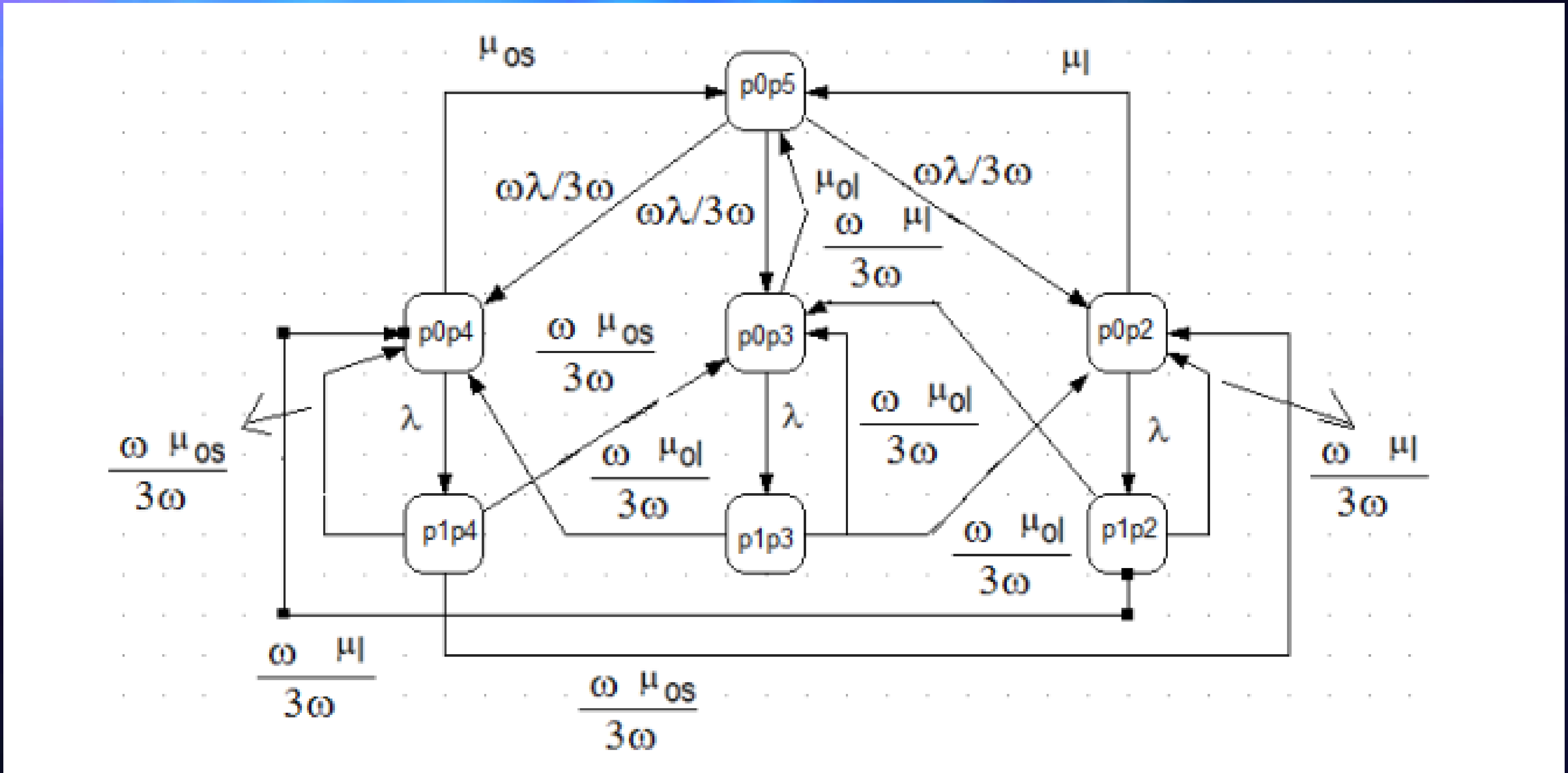
Reachability Graph (Generated using Charlie and Snoopy):



Excel

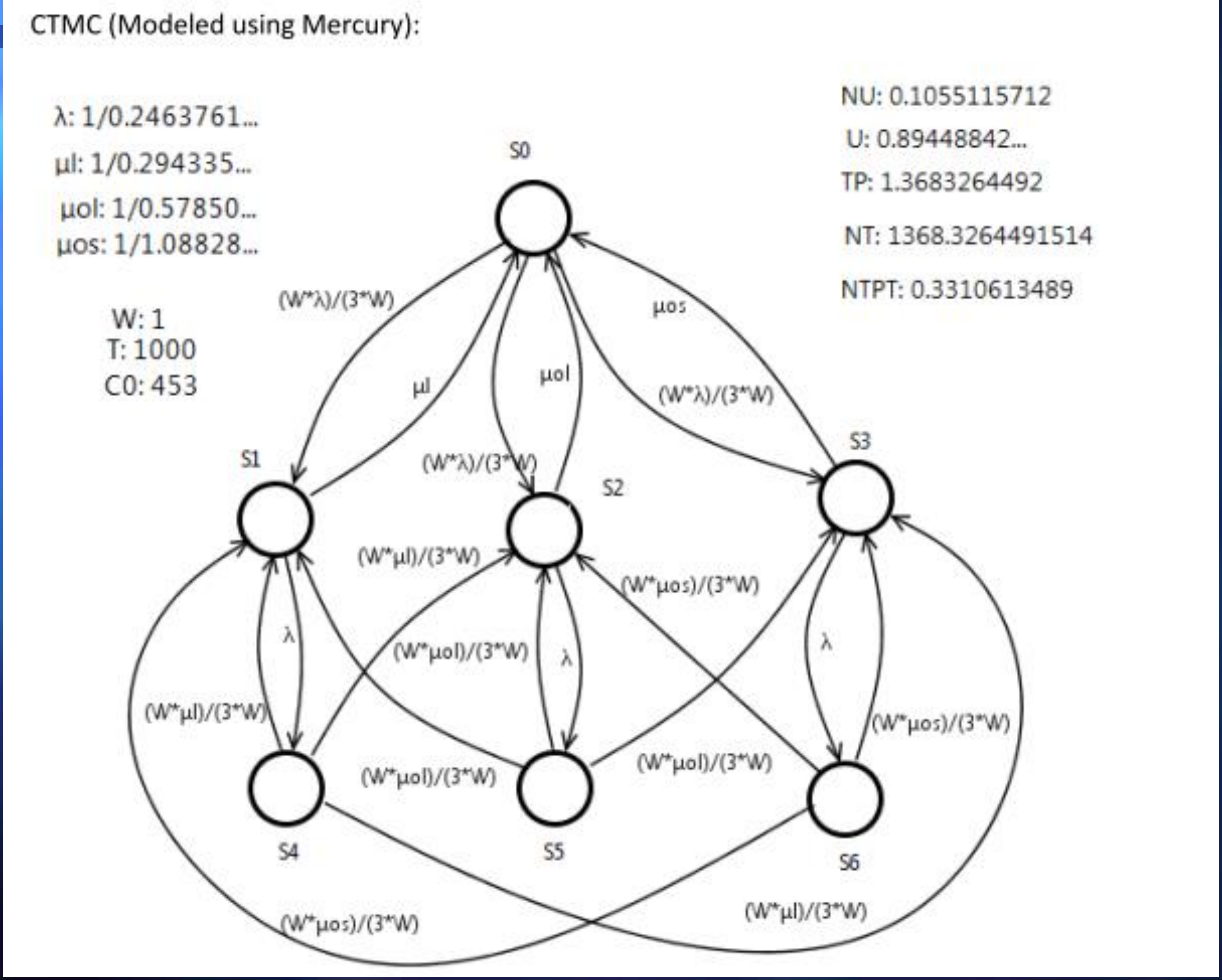
Redes Estocásticas

Assigning Time Demand to Transitions - Multiclass Processor Workload



Redes Estocásticas

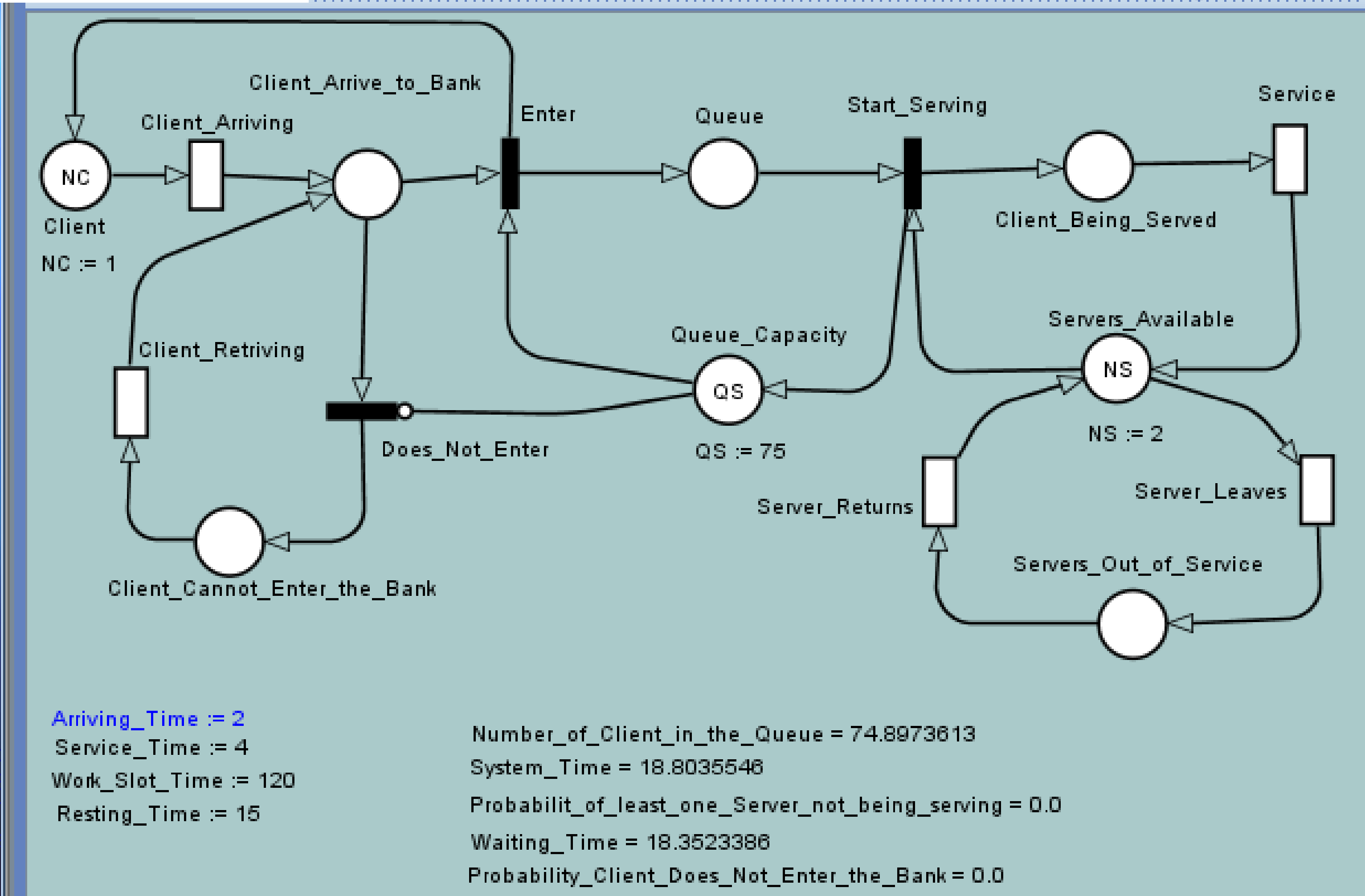
Assigning Time Demand to Transitions - Multiclass Processor Workload



Redes Estocásticas

- Exemplo – Banco

Todas as transições têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.



Redes Estocásticas

Análise Qualitativa

Structural Analysis Output

STRUCTURAL ANALYSIS ...

ECS: Does_Not_Enter Start_Serving
Warning: inner confusion between Start_Serving and Does_Not_Enter.
Warning: direct external (inhibitor-)confusion between Start_Serving and Does_N

The net contains 3 P-invariants.

Queue + Queue_Capacity = QS
Servers_Available + Servers_Out_of_Service + Client_Being_Served = NS
Client + Client_Arrive_to_Bank + Client_Cannot_Enter_the_Bank = NC

All places are covered by p-invariants.

EXTENDED CONFLICT SET

Priority immediate Transitions

1 Enter

1 Does_Not_Enter Start_Serving

Removing temporary files

Structural Analysis finished.

Estimate Statespace Output

Estimating statespace ...
Result of estimation (based on state equation with backtracking):
Statespace = 1368
Time passed with computation: 7.11 s
Removing temporary files

Estimate Statespace finished.

Traps Output

Removing temporary files
Calculation of Traps:
Time passed with computation: 0.14 s
No. of traps = 3
MARKING: 2 { Servers_Available Servers_Out_of_Service Client_Being_Served }
MARKING: 1 { Client Client_Arrive_to_Bank Client_Cannot_Enter_the_Bank }
MARKING: 75 { Queue Queue_Capacity }

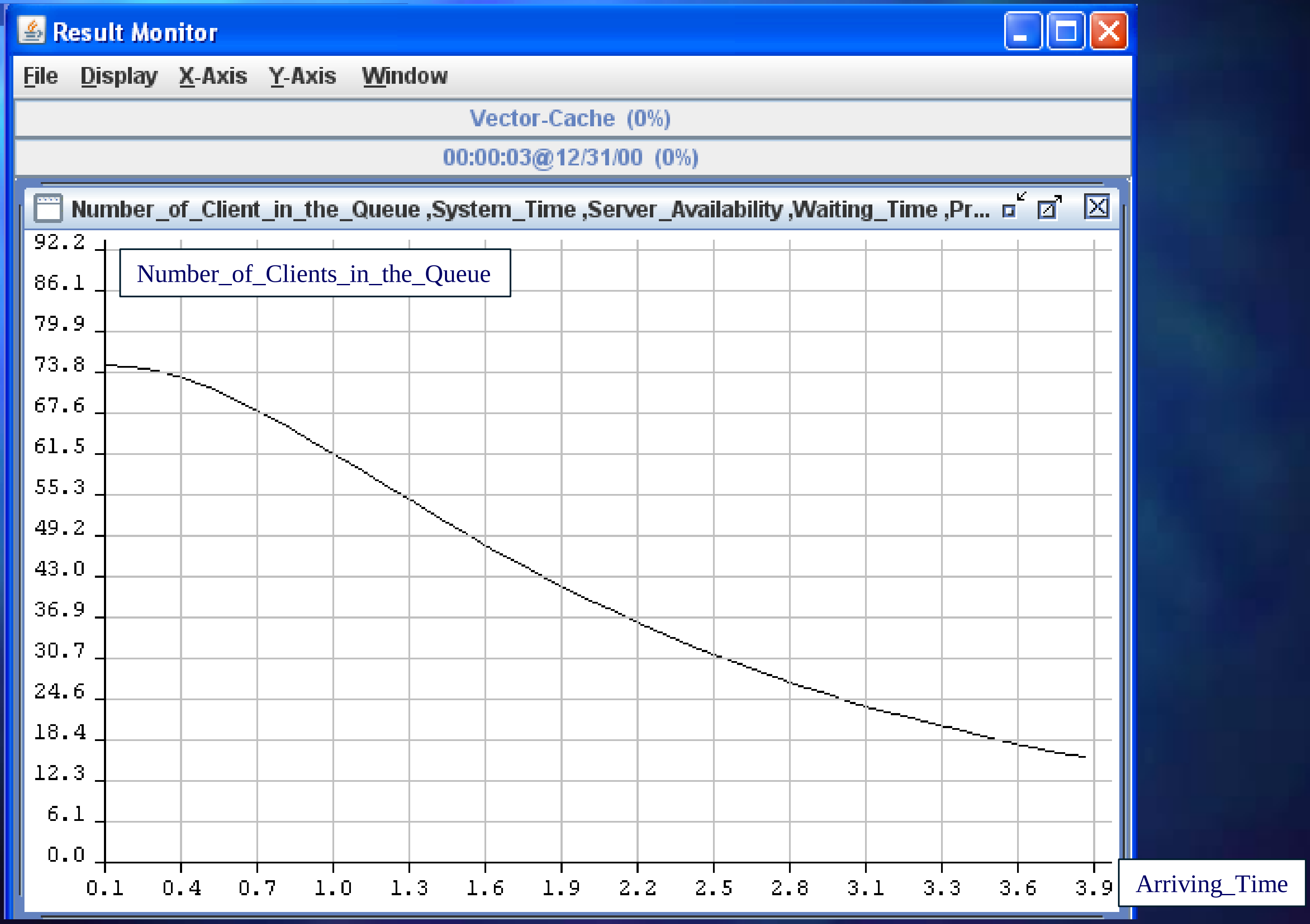
Traps finished.

Siphons Output

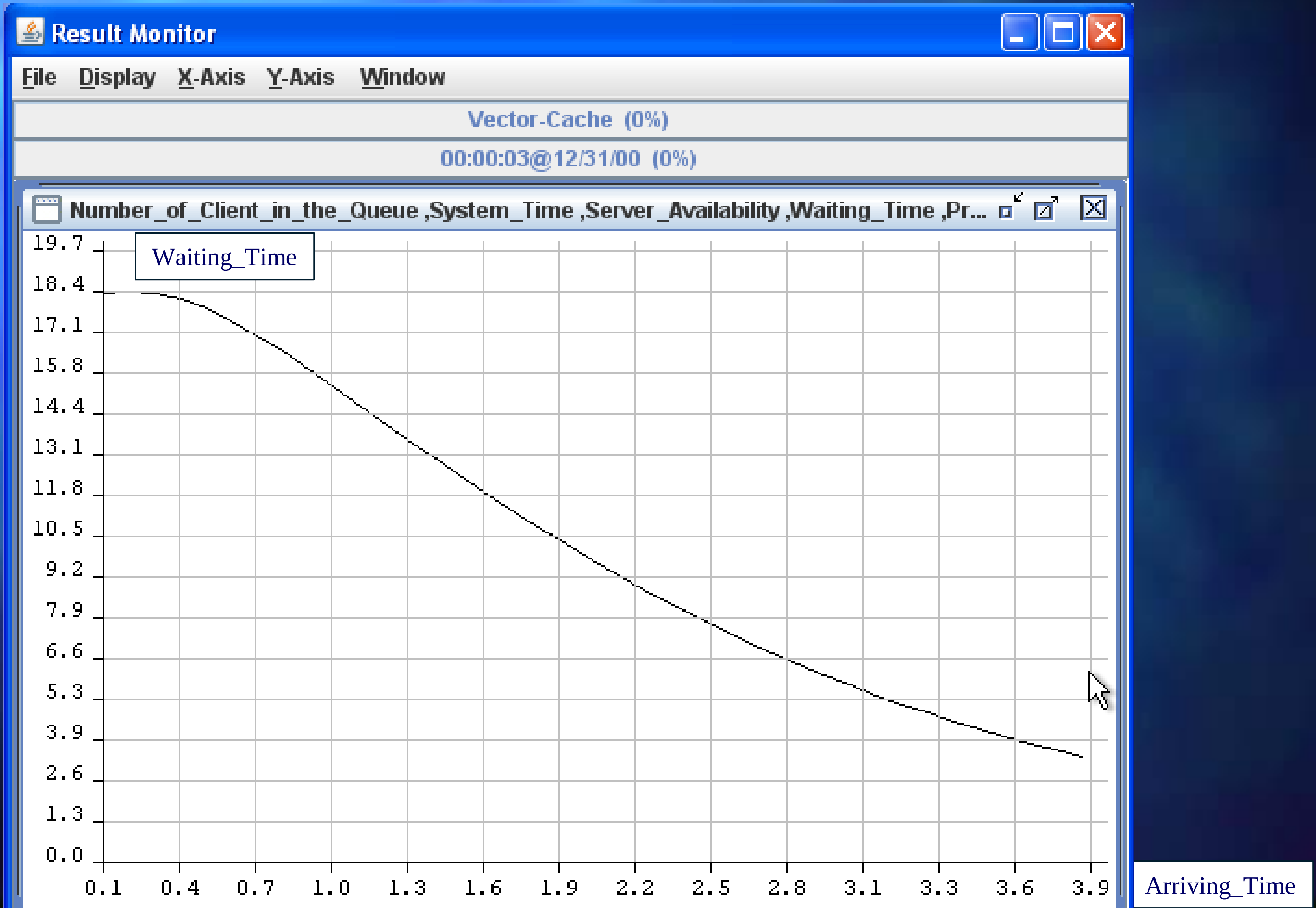
Removing temporary files
Calculation of Siphons:
Time passed with computation: 0.17 s
No. of siphons = 3
MARKING: 2 { Servers_Available Servers_Out_of_Service Client_Being_Served }
MARKING: 1 { Client Client_Arrive_to_Bank Client_Cannot_Enter_the_Bank }
MARKING: 75 { Queue Queue_Capacity }

Siphons finished.

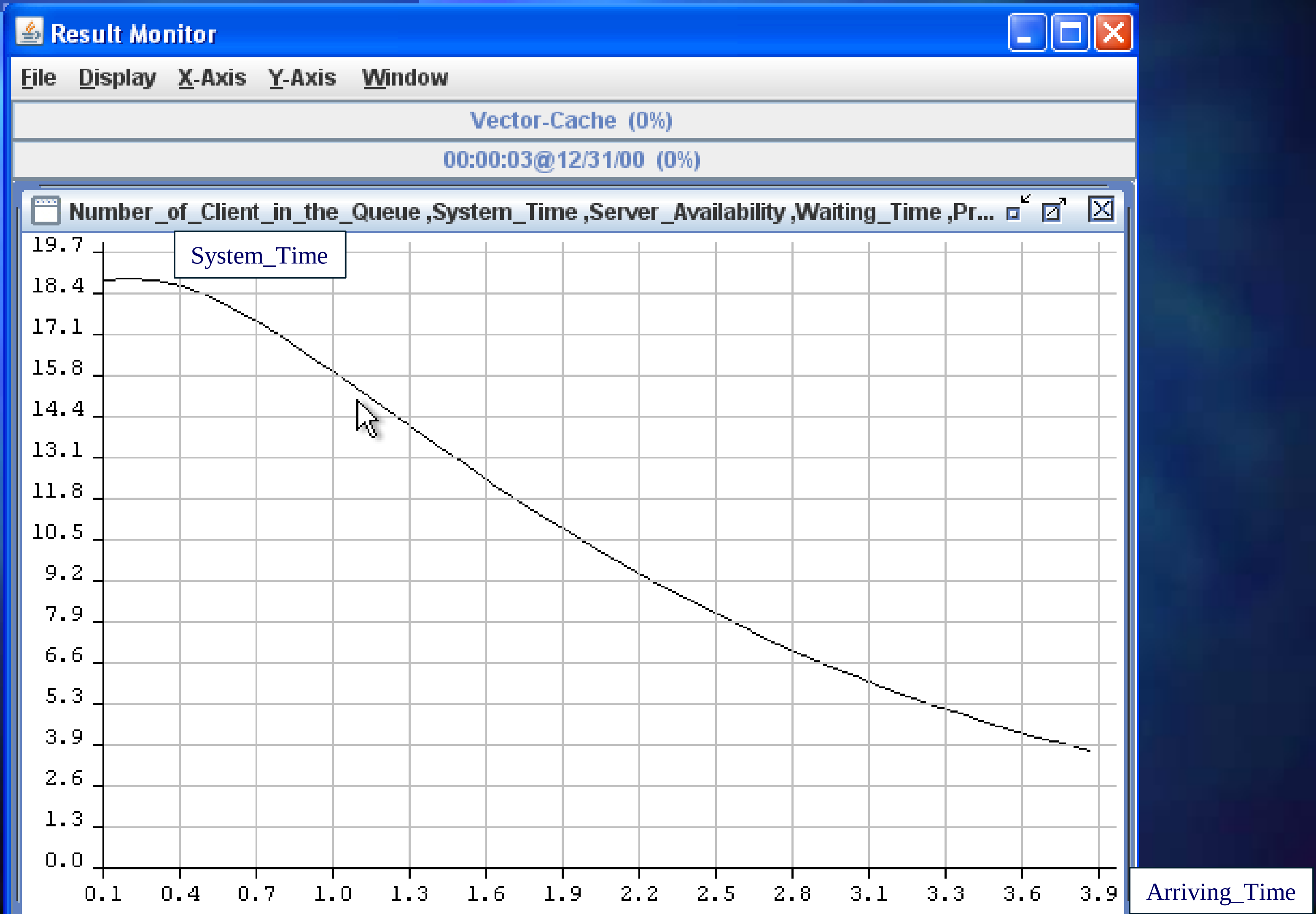
Redes Estocásticas



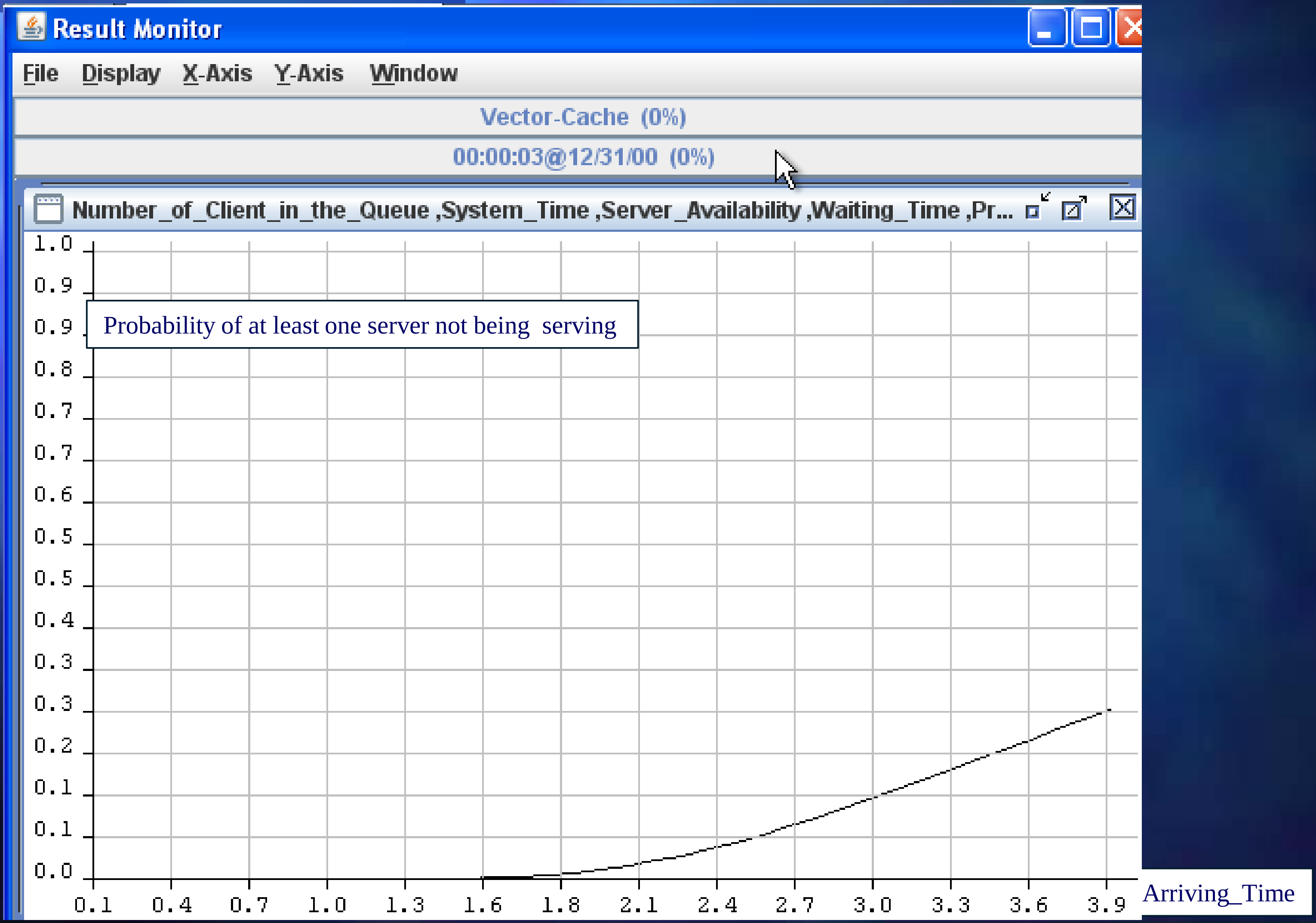
Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

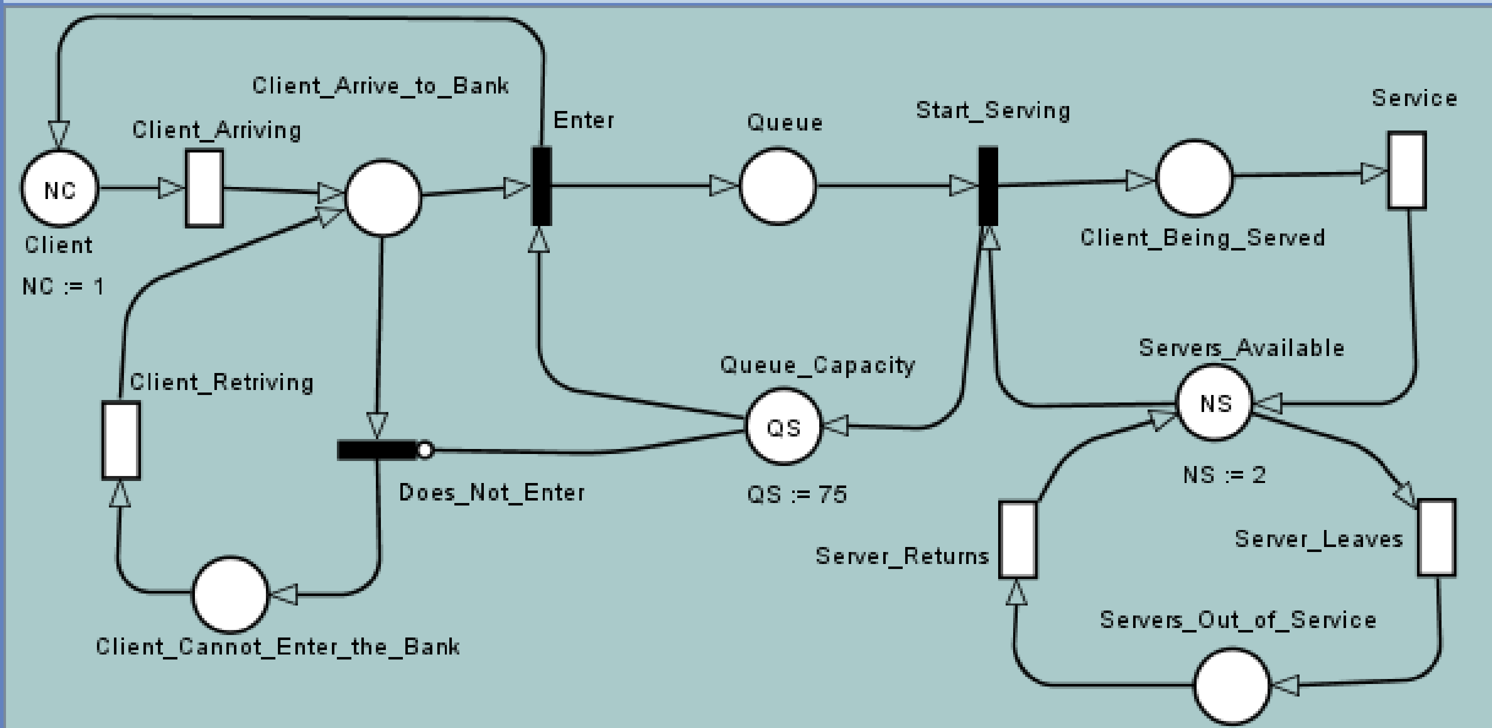


Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

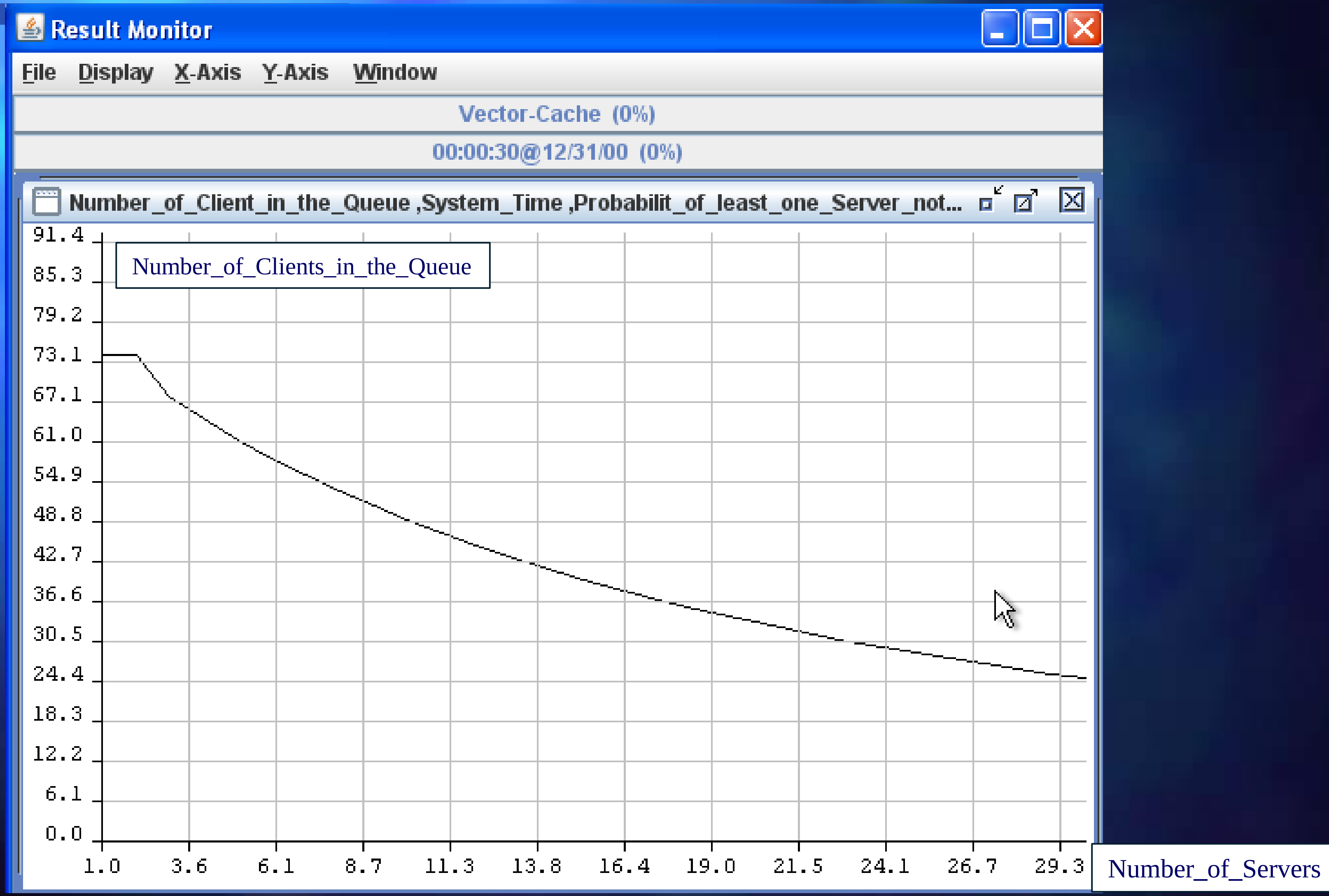
Bank1.xml **Todas as transisções têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.**



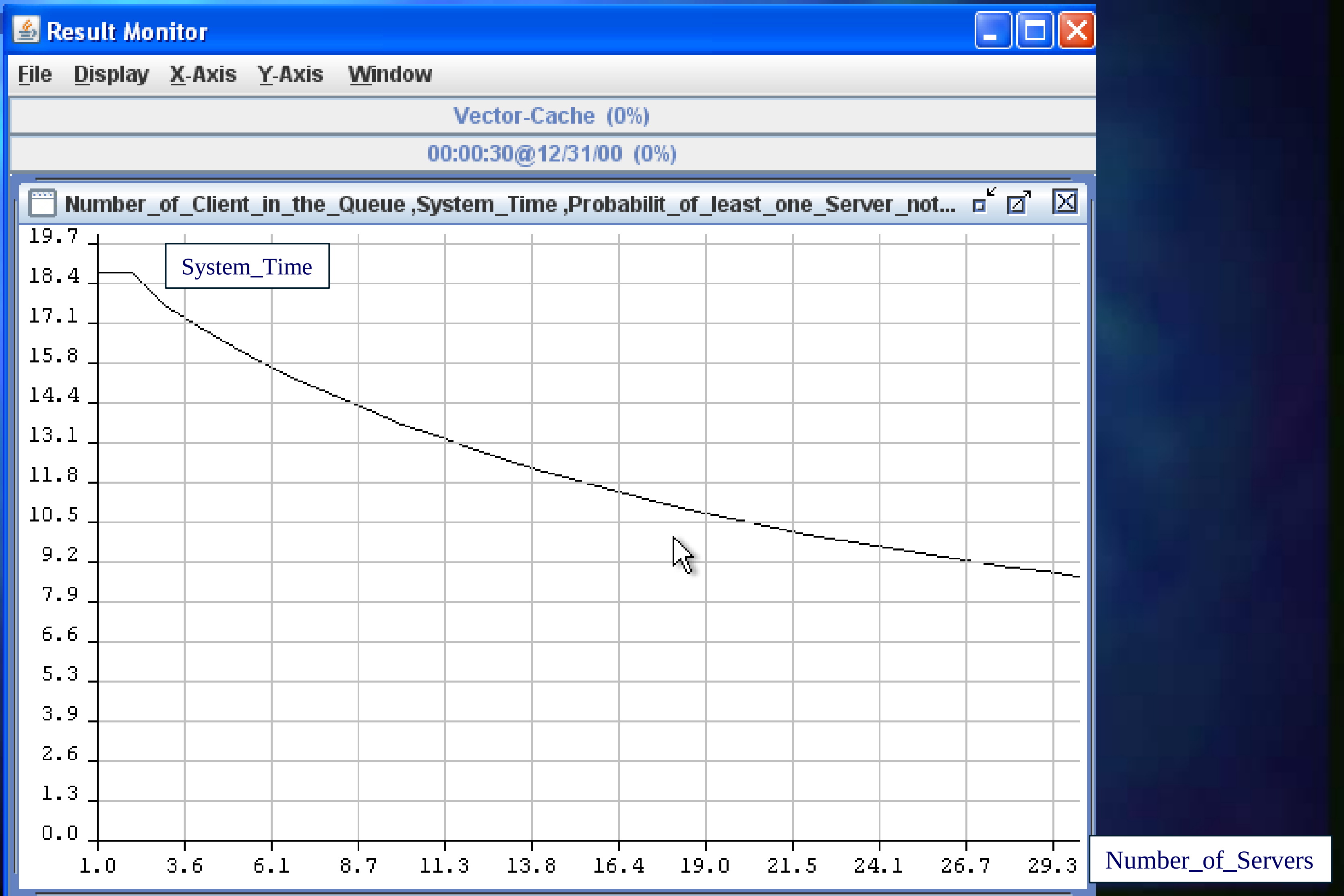
Arriving_Time := 0.5
Service_Time := 4
Work_Slot_Time := 120
Resting_Time := 15

Number_of_Client_in_the_Queue = 74.8973613
System_Time = 18.8035546
Probabilit_of_least_one_Server_not_being_serving = 0.0
Waiting_Time = 18.3523386
Probability_Client_Does_Not_Enter_the_Bank = 0.0

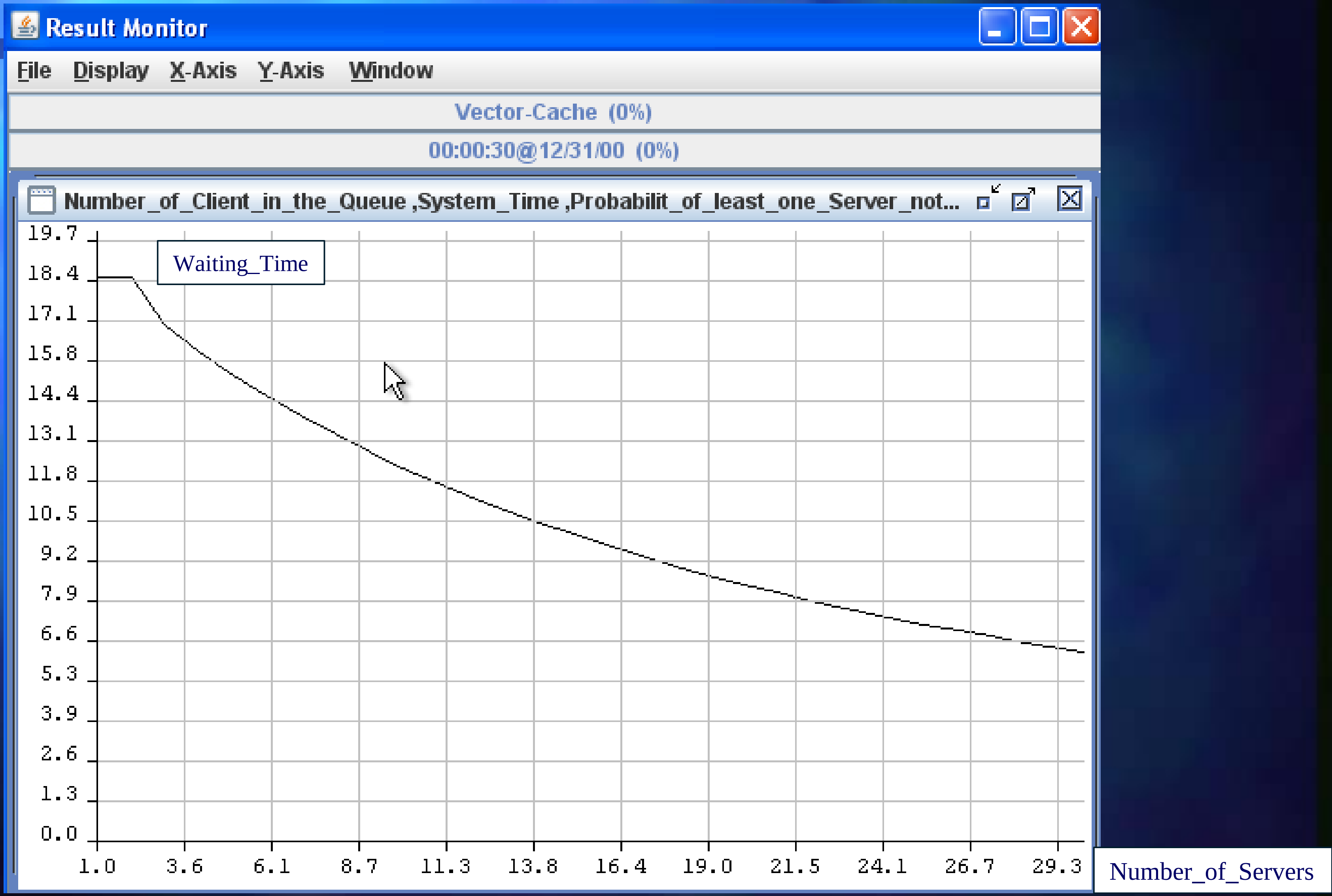
Redes Estocásticas



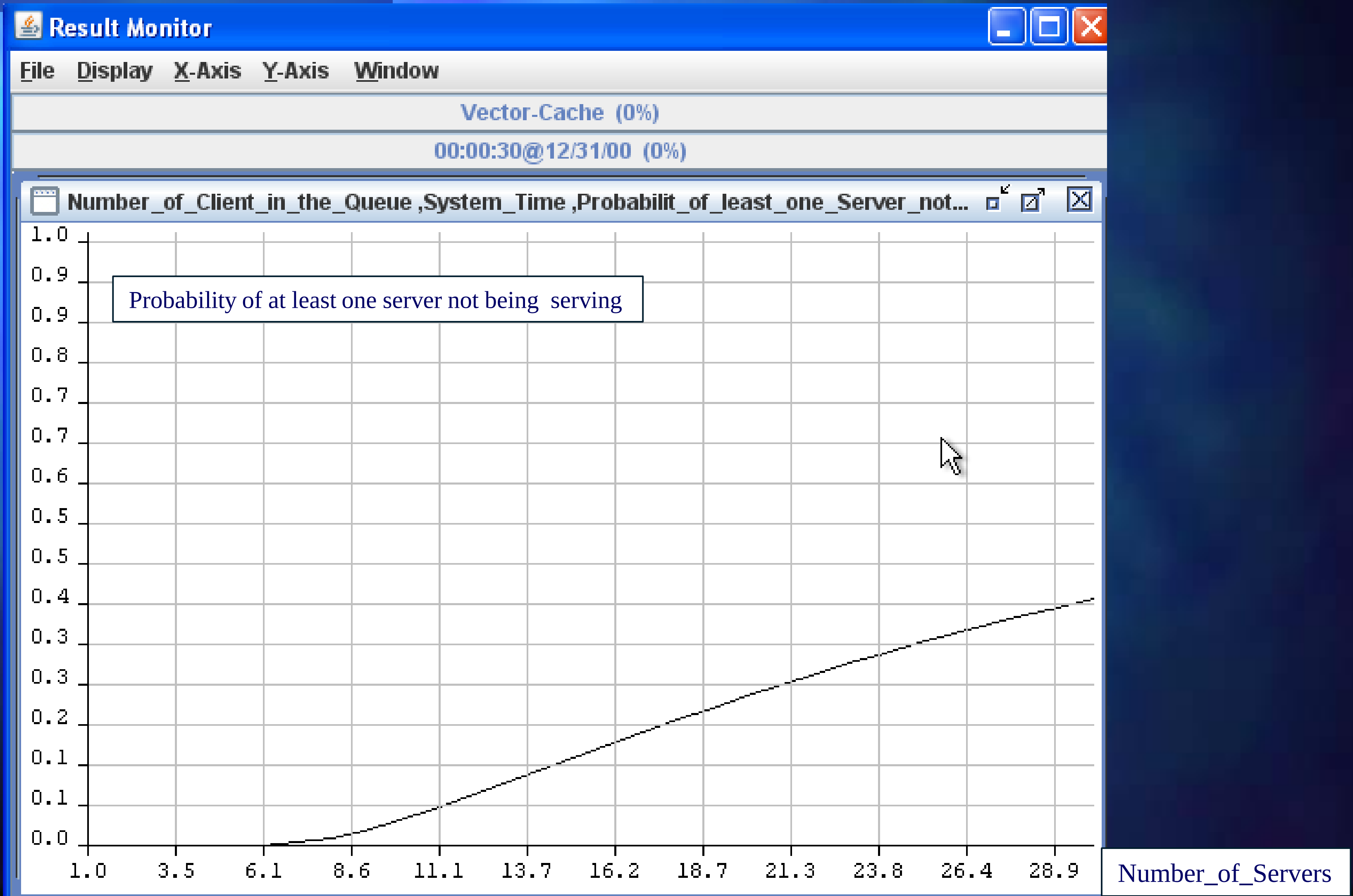
Redes Estocásticas



Redes Estocásticas



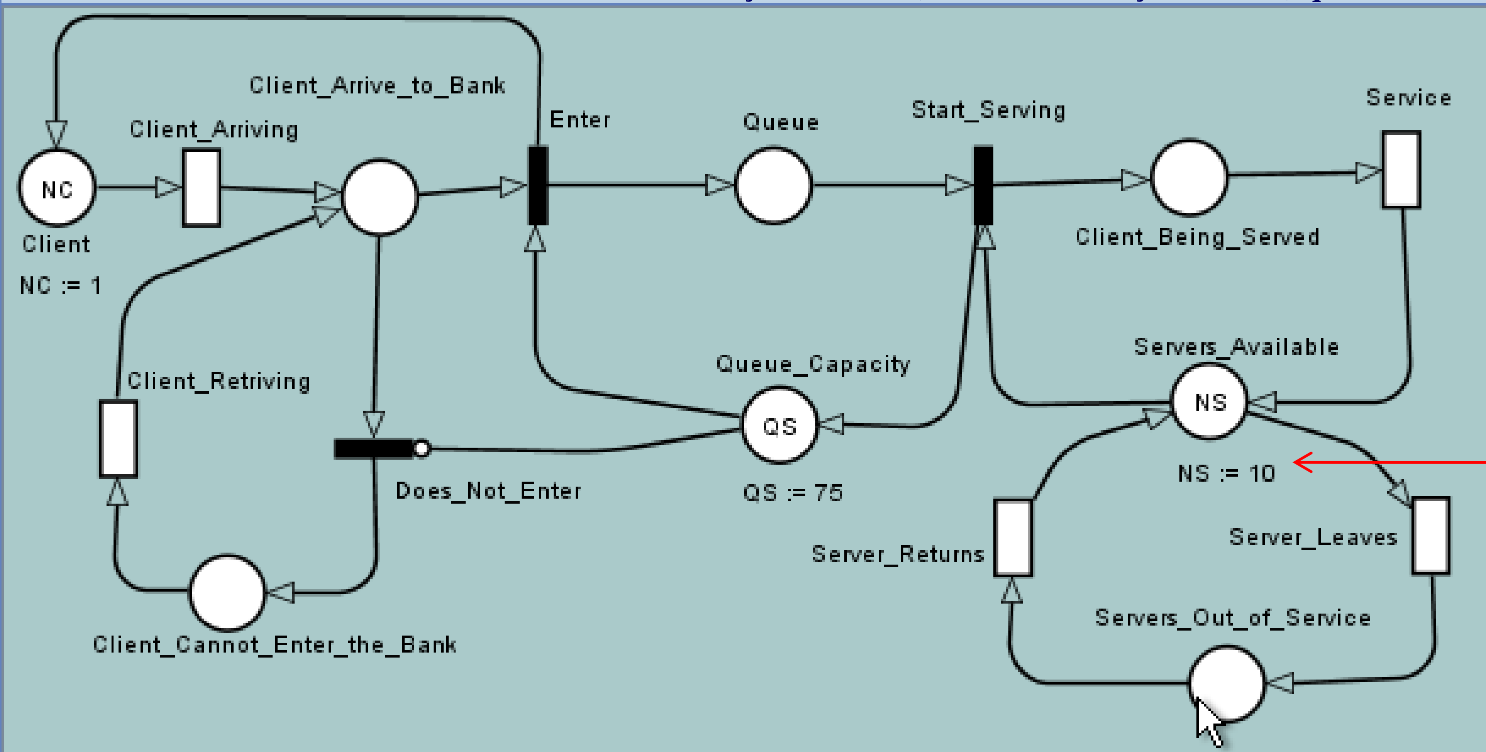
Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

*Bank1.xml

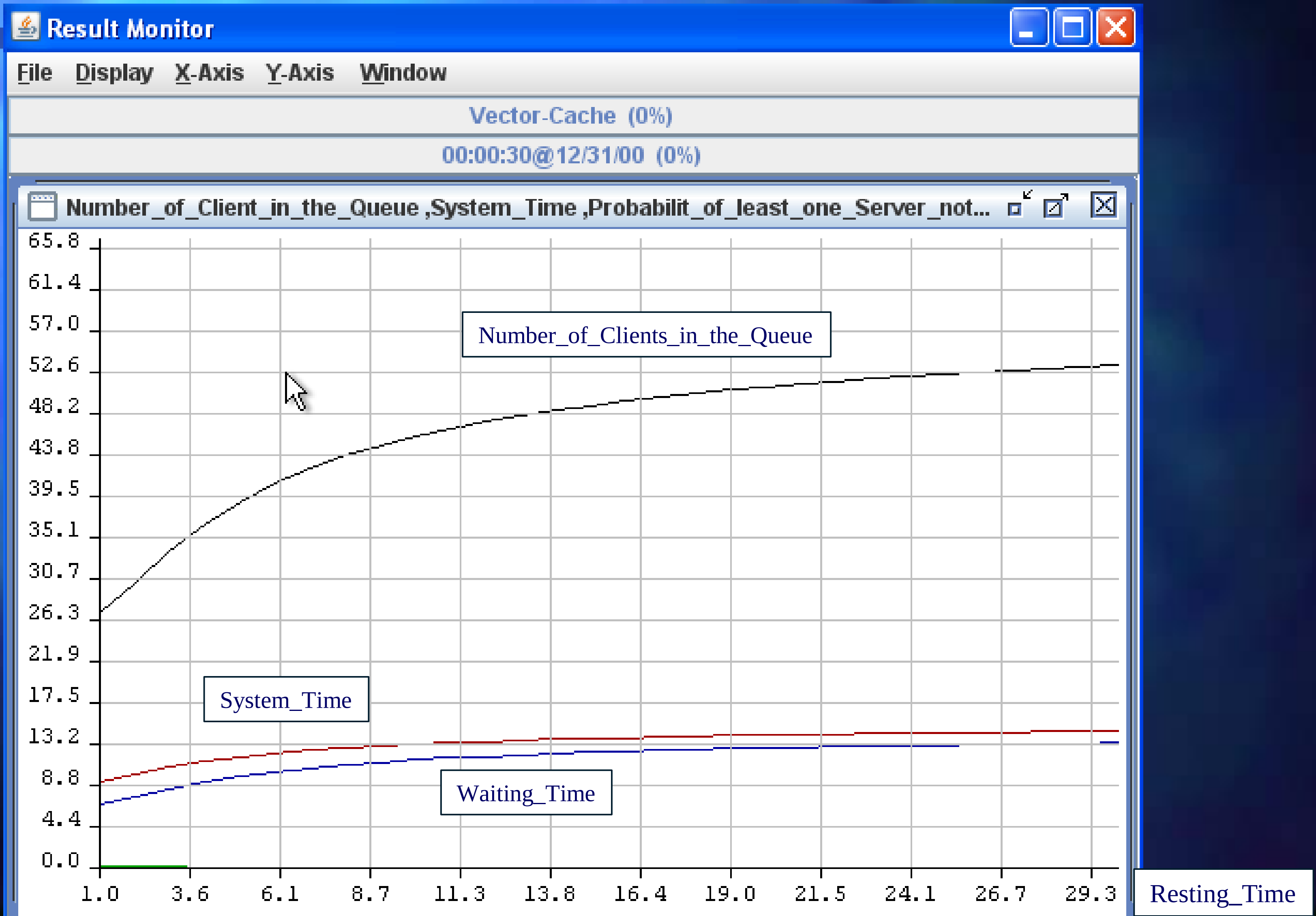
Todas as transisções têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.



Arriving_Time := 0.5
Service_Time := 4
Work_Slot_Time := 120
Resting_Time := 15

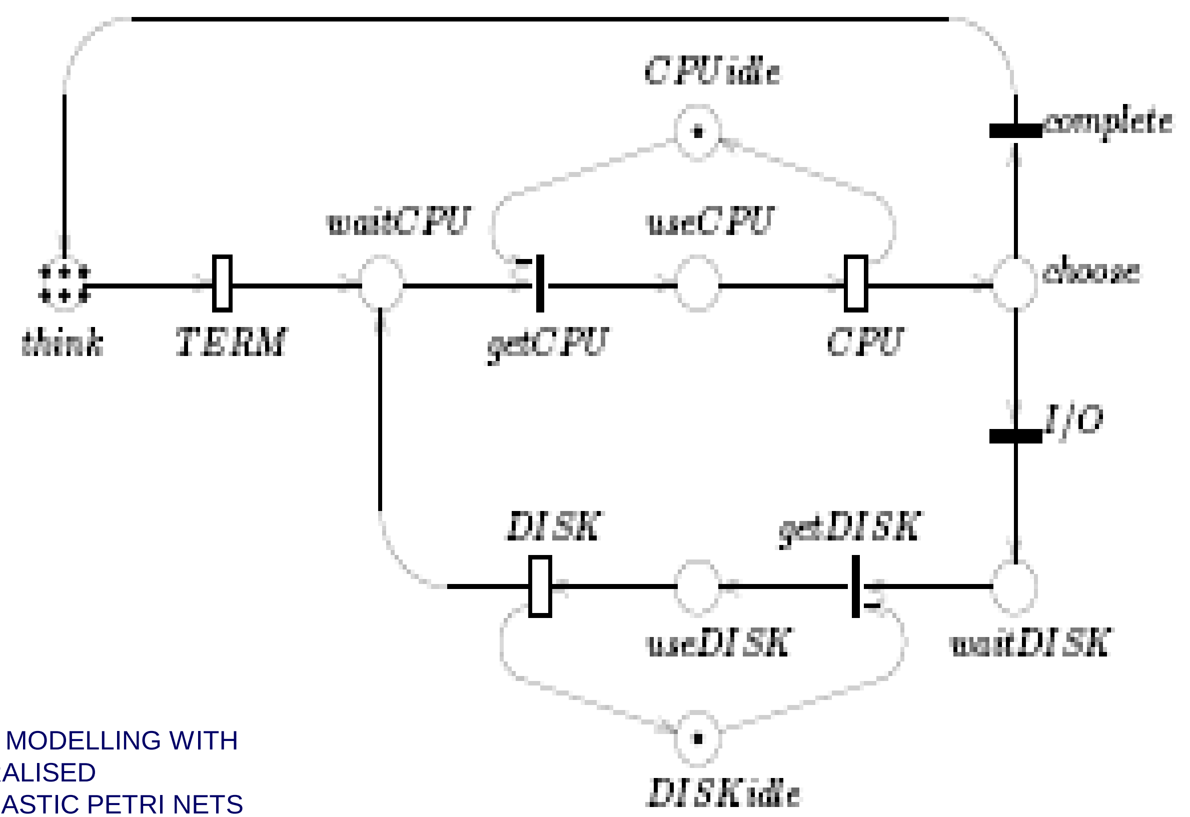
Number_of_Client_in_the_Queue = 27.0358551
System_Time = 9.1315488
Probabilit_of_least_one_Server_not_being_serving = 0.1529771
Waiting_Time = 6.7585226
Probability_Client_Does_Not_Enter_the_Bank = 0.0

Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

- Exemplo – Sevidor Central



Do livro MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS Marsan et al.

Redes Estocásticas

- Aproximando Outras Distribuições

  - Variáveis Suplementares

  - Aproximação por Fases
    - *Moment Matching*

Para encontrar uma distribuição por fase adequada para uma distribuição genérica, duas atividades são fundamentais:

- Determinar o tipo de aproximação necessária.
- Encontrar os parâmetros numéricos da aproximação.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Qualidade da aproximação: quanto mais próximo for a distribuição por fase da distribuição real, melhor.
  - Medidas de aproximação:
    - *Moment matching*
    - Encontrar um pdf (ou cdf) que seguem a pdf real numa determinada região de interesse.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Número de Estados da Aproximação: é importante fazer com que o número de estados seja o menor possível.
- Facilidade da obtenção do modelo markoviano resultante: pode ser possível obter uma aproximação que gere excelentes resultados. No entanto, pode não ser fácil a integração no modelo markoviano resultante.

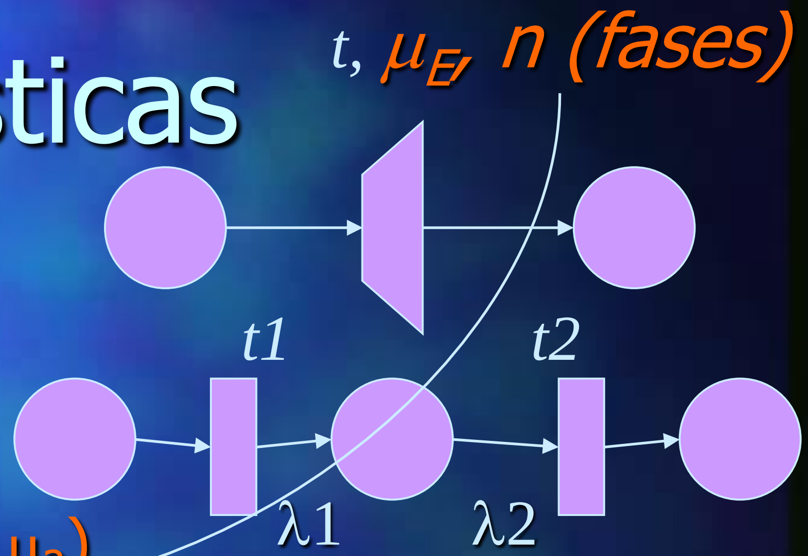
Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

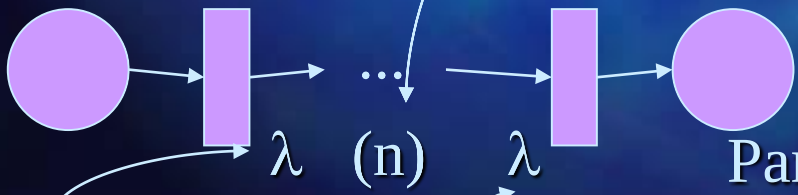
Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Facilidade de obtenção dos parâmetros da aproximação: quanto mais parâmetros sejam necessários para especificar a aproximação, mais difícil se torna para encontrá-los.

Redes Estocásticas



- Aproximação por Fases
- Distribuição de Erlang
  - $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ($\lambda_1 = 1/\mu_1, \lambda_2 = 1/\mu_2$)
  - $f\tau(t) = (f\tau_1 * f\tau_2)(t) = \lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda 1 t} - e^{-\lambda 2 t})/(\lambda_1 - \lambda_2)$
  - Generalizando para n fases iguais a λ.
    - $f\tau(t) = (\lambda^n t^{(n-1)} e^{-\lambda t})/(n-1)!$, $t \geq 0$



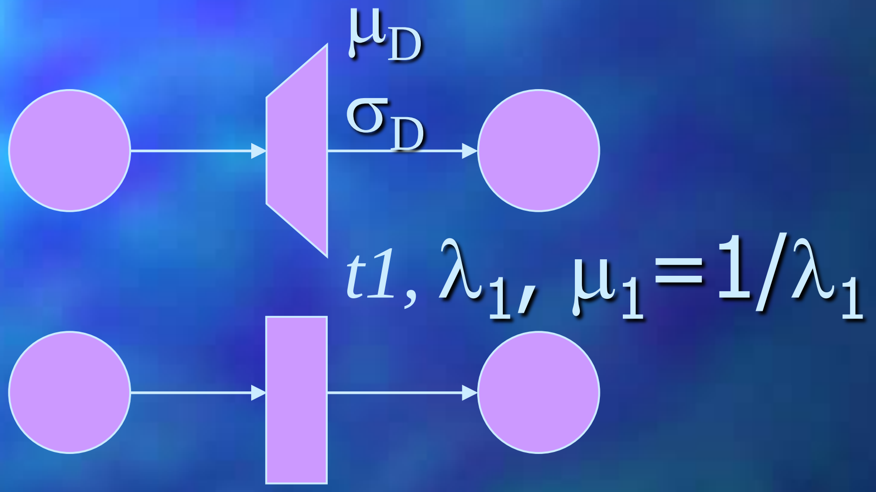
Parâmentros: n, λ; Valor Esperado: $\mu_E = n/\lambda$

Variância: $1/n\lambda^2$ (λ - de cada fase)

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

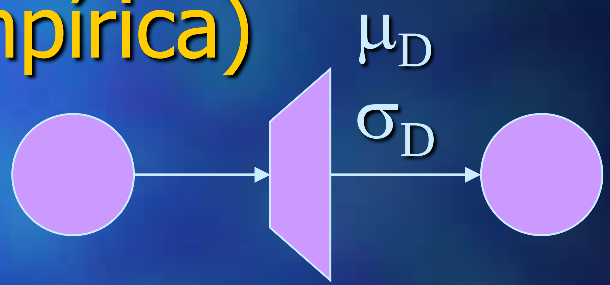
- *Moment Matching*



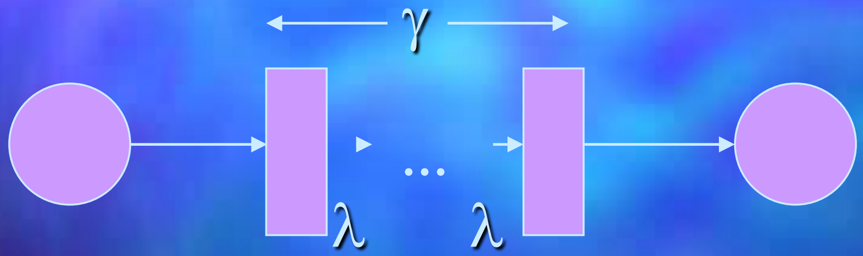
  - Se $\mu_D/\sigma_D = 1$ então uma transição exponencial é suficiente. $\lambda_1 = 1/\mu_D$

Redes Estocásticas

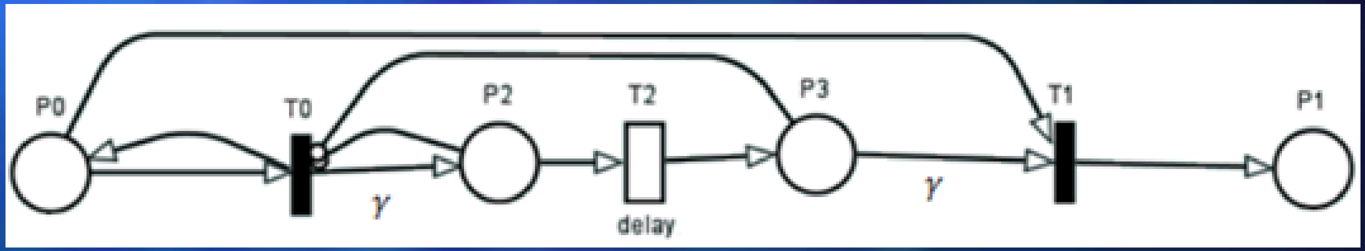
Distribuição Especificada (empírica)



- *Moment Matching*



$\equiv$



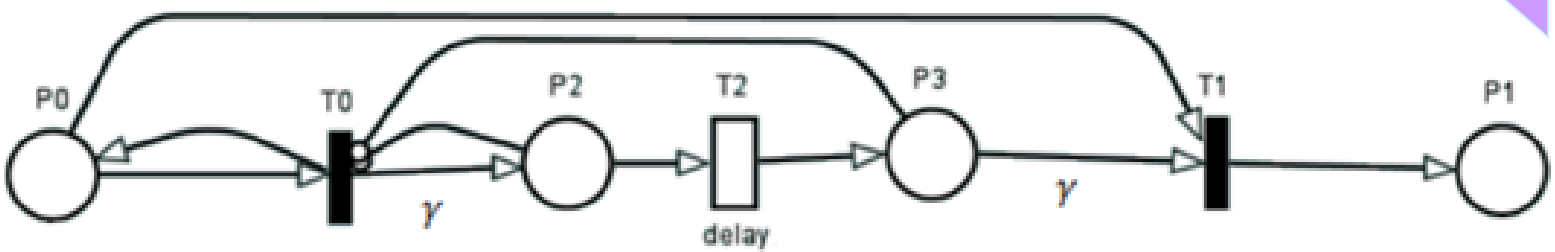
  - Se $\sigma_D/\mu_D = n \neq 1,\ n \in Z$

$\gamma = (\mu_D/\sigma_D)^2 = n^2,\ \lambda = \gamma/\mu_D = n^2/\mu_D$

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*



Erlang distribution

$CV < 1$

$$\frac{1}{CV} = \frac{E[t]}{\sigma} = \frac{\mu_D}{\sigma_D} = n$$

$n \in \mathbb{Z}, n > 1$

$$\gamma = \left(\frac{1}{CV}\right)^2$$

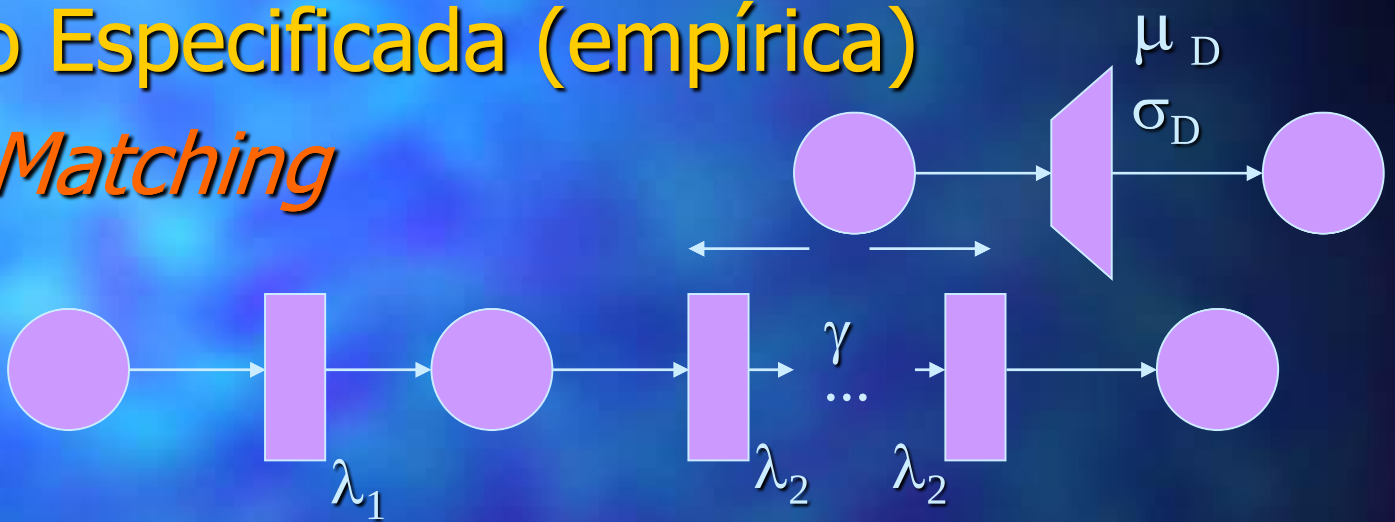
$$\lambda = \frac{\gamma}{E[t]}$$

$$delay = \frac{1}{\lambda}$$

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*



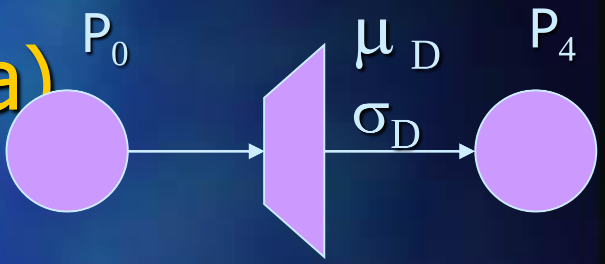
  - Se $\mu_D/\sigma_D > 1$ e $\mu_D/\sigma_D \notin Z$
  - $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$

$\lambda_1 = 1/\mu_1 \quad \mu_1 = \mu_D \mp \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\, \sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

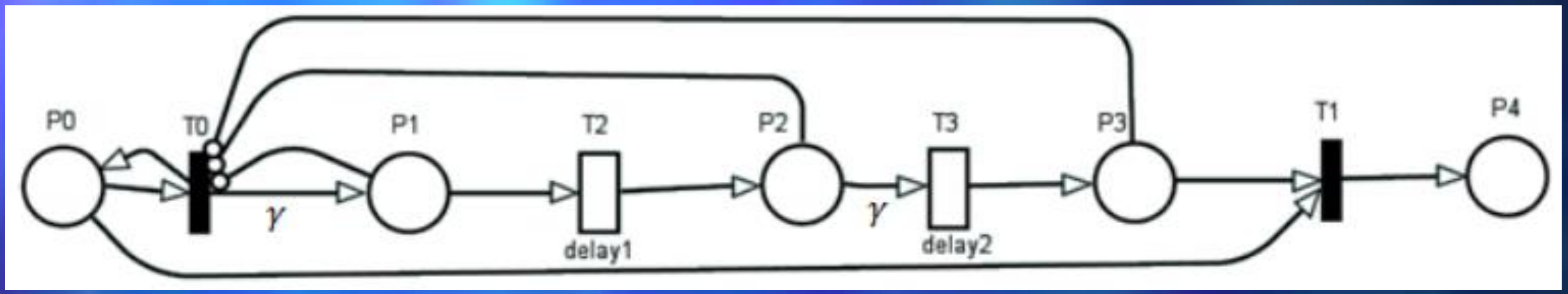
$\lambda_2 = 1/\mu_2 \quad \mu_2 = \gamma\mu_D \pm \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\, \sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)



- *Moment Matching*



  - Se $\mu_D/\sigma_D > 1$ e $\mu_D/\sigma_D \notin Z$
  - $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$

$\lambda_1 = 1/\mu_1 \quad \mu_1 = \mu_D \mp \mathrm{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

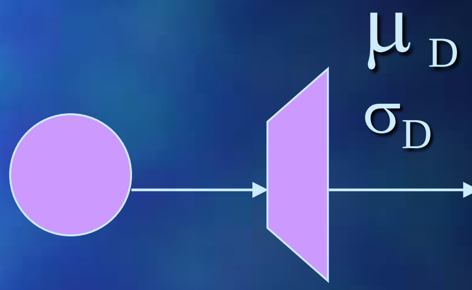
$\lambda_2 = 1/\mu_2 \quad \mu_2 = \gamma\mu_D \pm \mathrm{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

delay1 $= 1/\lambda_1$, delay2 $= 1/\lambda_2$

Redes Estocásticas

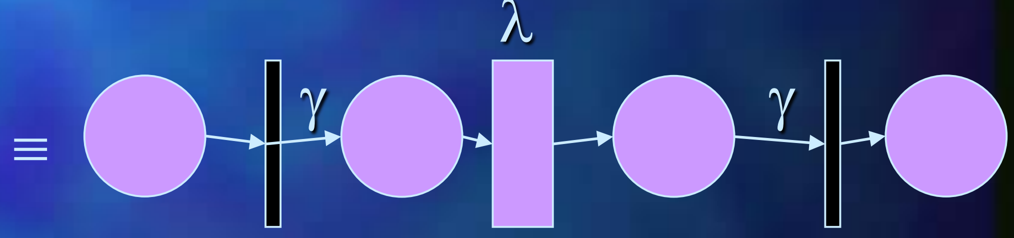
Distribuição Determinística

- *Moment Matching*



Aproximа-se, fazendo-se σ_D pequeno

$\Rightarrow \gamma$ torna-se grande.

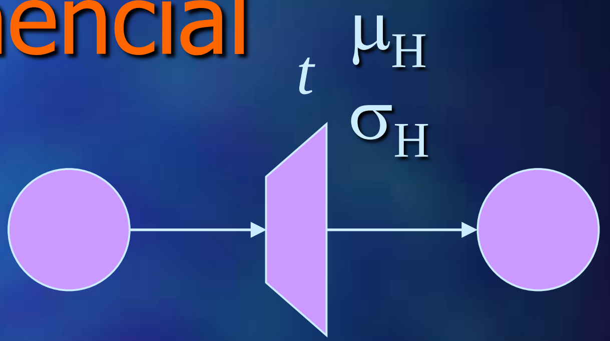


– Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1$, $x \in Z$ ($c=\sigma_D/\mu_D<1$)

$\gamma = x^2$, $\lambda = x^2/\mu_D$

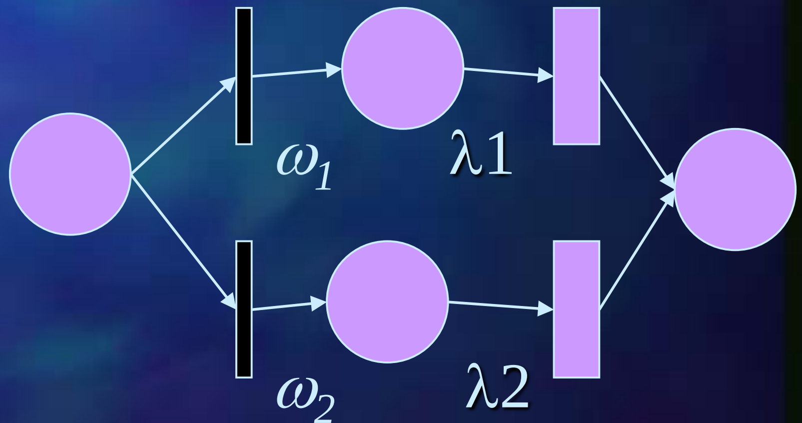
Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases
- Distribuição de Hiperexponencial



$$f\tau(t) = \omega_1 f\tau_1(t) + \omega_2 f\tau_2(t),\ t \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$$



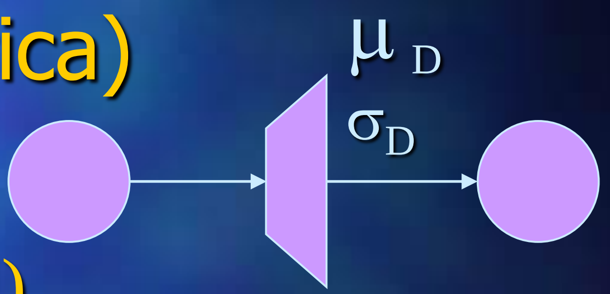
Parâmentros:

Valor Esperado: $\mu_H = \sum_j \omega_j / \lambda_j$

Variância: $2 \sum_j \omega_j / \lambda_j^2 - \mu_H^2$

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

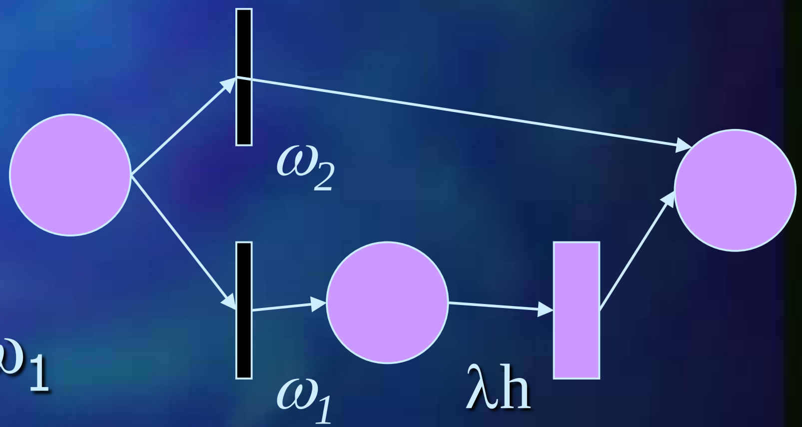


- *Moment Matching*

$\mu_H = \omega_1 / \lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)

$\sigma_H = [\mathrm{sqrt}\,(2\,\omega_1 - \omega_1^2)] / \lambda_H$

  - Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)

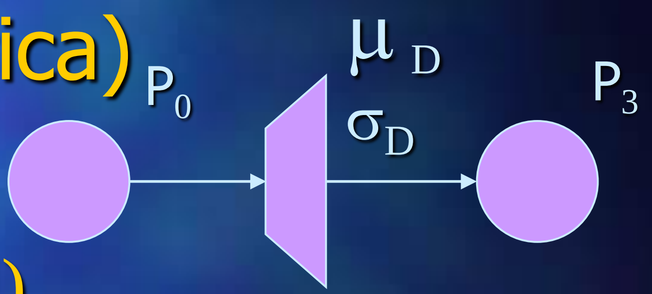


$\omega_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $\omega_2 = 1 - \omega_1$

$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$,

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)



- *Moment Matching*

$\mu_H = \omega_1 / \lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)

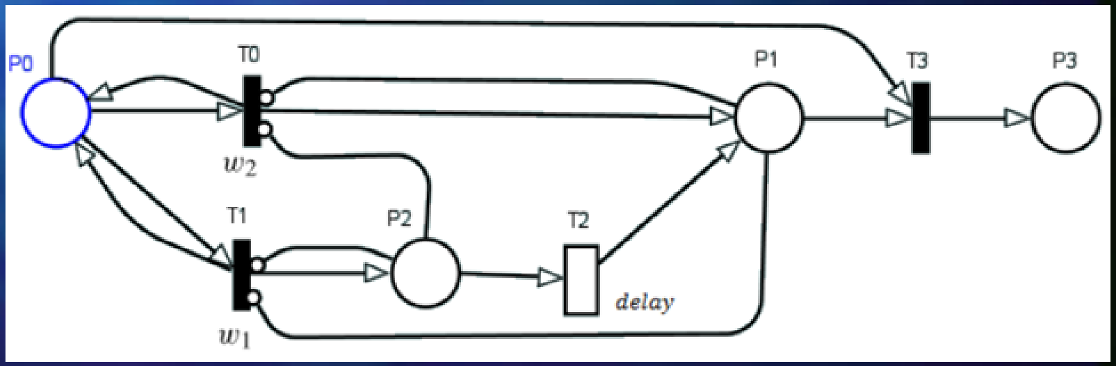
$\sigma_H = [\mathrm{sqrt}(2\,\omega_1 - \omega_1^{\,2})] / \lambda_H$

- Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)

  $\omega_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $\omega_2=1-\omega_1$

  $\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$

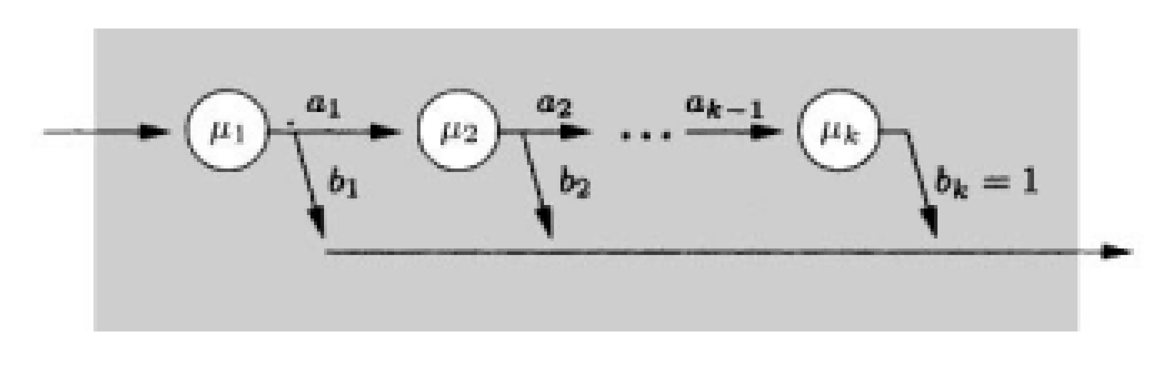
  delay$=1/\lambda_h$



Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Cox generalizou a idéia de composição de fase exponenciais para gera probabilidades e taxas complexas.



Nestes slides μ_k são taxas (diferentemente dos anteriores)

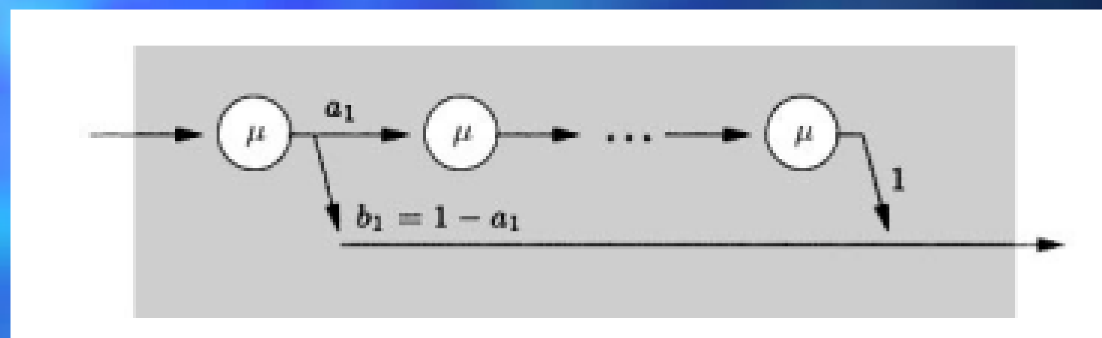
Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Nestes slides μ é taxa (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV ≤ 1



$$\mu_j = \mu \quad j = 1, \ldots, k\,,$$
$$a_j = 1 \quad j = 2, \ldots, k-1\,.$$

$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu}\,,$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k) + k - 2)}{\mu^2}\,,$$

$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k) + k - 2)}{[b_1 + k(1-b_1)]^2}\,.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

➢ Número de fases

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2 + 4 - 4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)}\,,$$

$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k-1)}{\overline{X}}\,.$$

➢ Taxa das fases

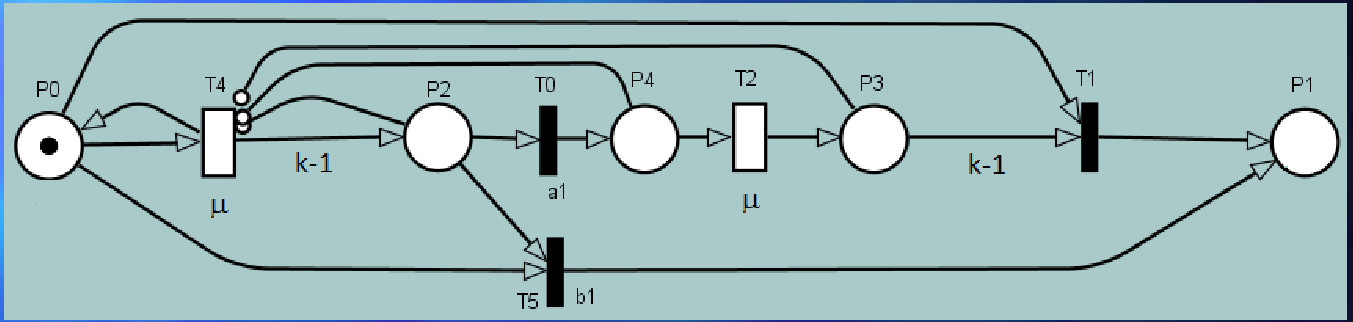
Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Nestes slides μ é taxa (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV ≤ 1



$$\mu_j = \mu \quad j = 1, \ldots, k,$$
$$a_j = 1 \quad j = 2, \ldots, k-1.$$

$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu},$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k)+k-2)}{\mu^2},$$

$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k)+k-2)}{[b_1 + k(1-b_1)]^2}.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

- Número de fases

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2 + 4 - 4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)},$$

$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k-1)}{\overline{X}}.$$

- Taxa das fases

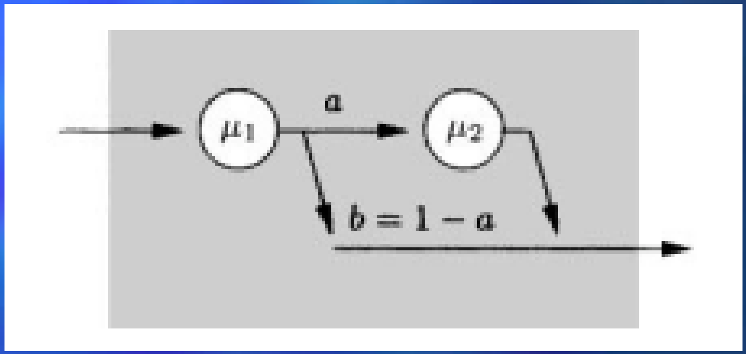
Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Nestes slides μ_1 e μ_2 são taxas (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV > 1



$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}},$$

$$a = \frac{1}{2c_X^2}.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X}c_X^2}$$

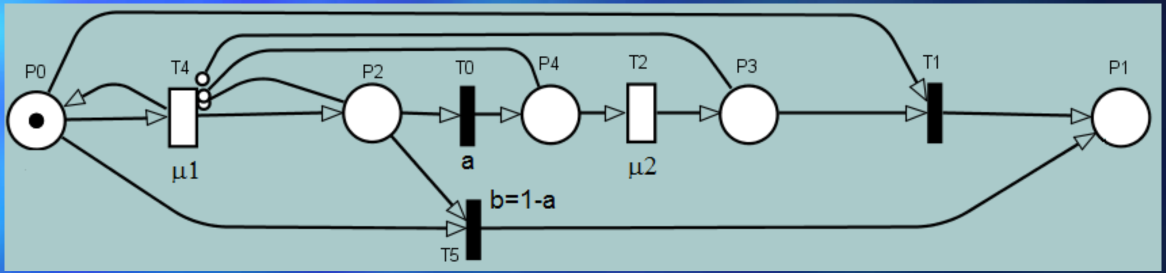
Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Nestes slides μ_1 e μ_2 são taxas (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV > 1



$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

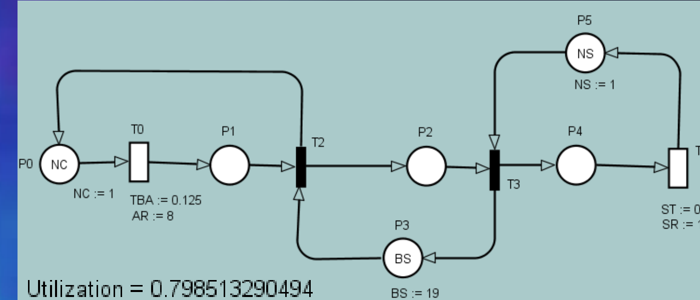
$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}},$$

$$a = \frac{1}{2c_X^2}.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X}c_X^2}$$

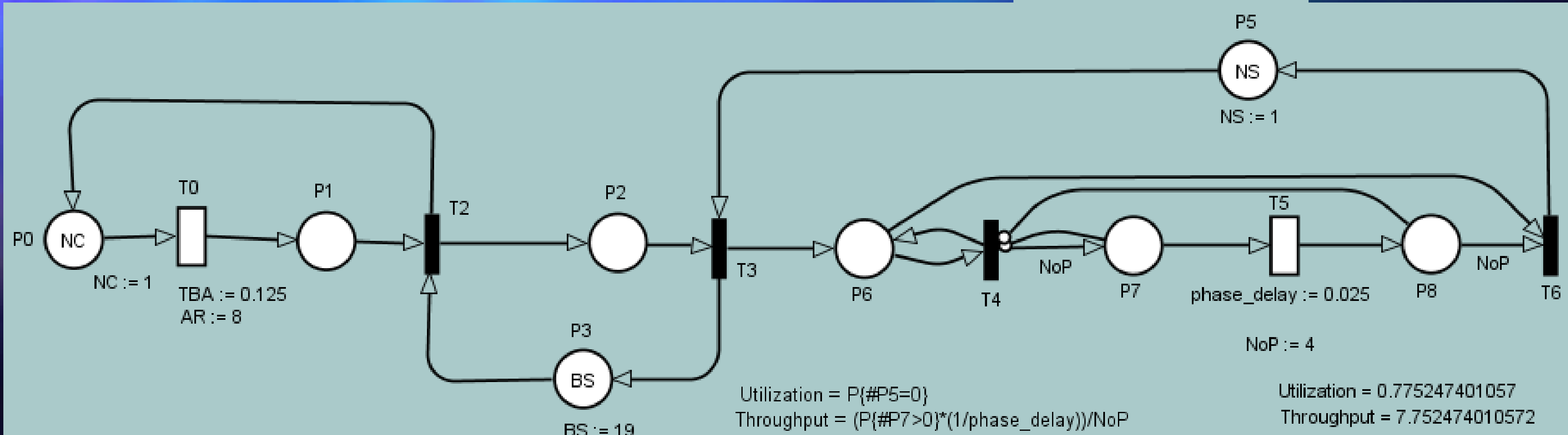
Redes Estocásticas

MM1K



Utilization = 0.798513290494
Throughput = 7.985132904942
MQS = 3.036090276985
MSS = 3.834603567479
MST = 0.479325445935
MQT = 0.379511284623
DiscardProb = 0.001858386882
DiscardRate = 0.014867095058

ME1K



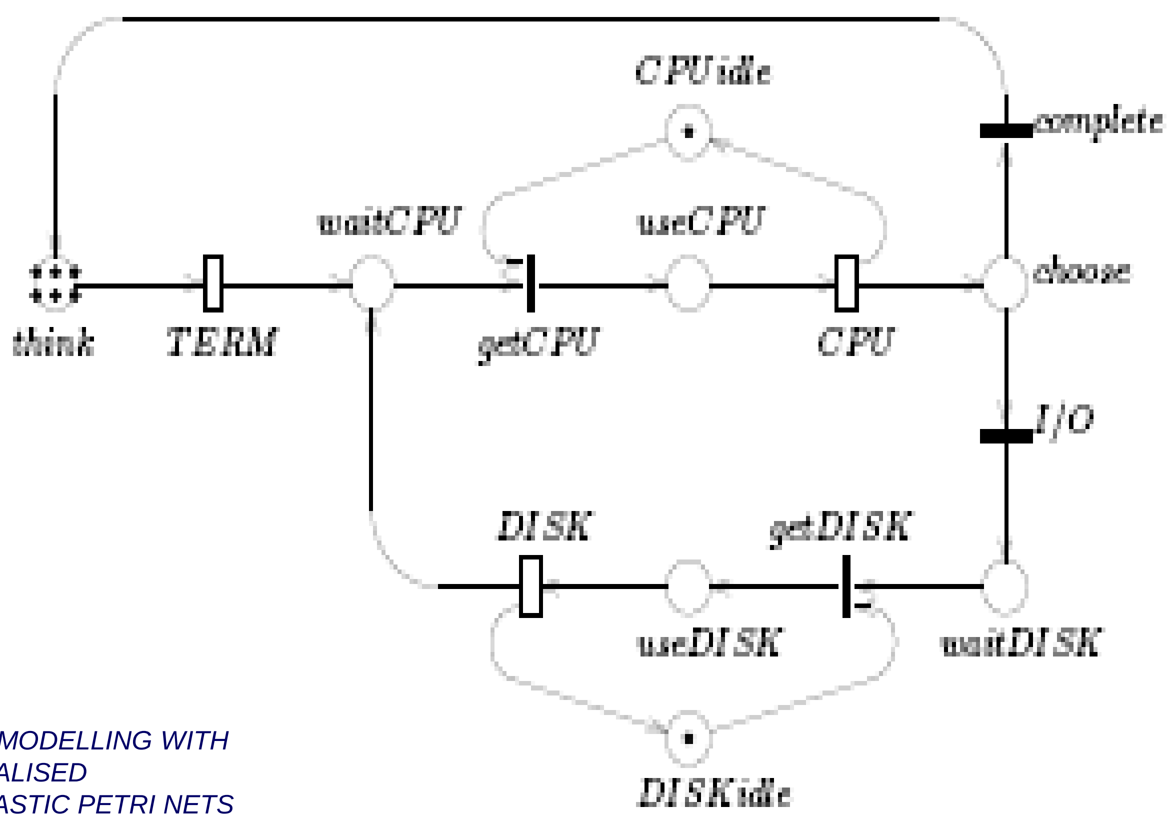
Utilization = P{#P5=0}
Throughput = (P{#P7>0}*(1/phase_delay))/NoP
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P6}
MST = (E{#P2}+E{#P6})*TBA
MQT = E{#P2}*TBA

DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P6=NS)}
DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P6=NS)}*AR

Utilization = 0.775247401057
Throughput = 7.752474010572
MQS = 2.184649271069
MSS = 2.959896672126
MST = 0.369987084016
MQT = 0.273081158884
DiscardProb = 1.6574783E-4
DiscardRate = 0.001325982638

Redes Estocásticas

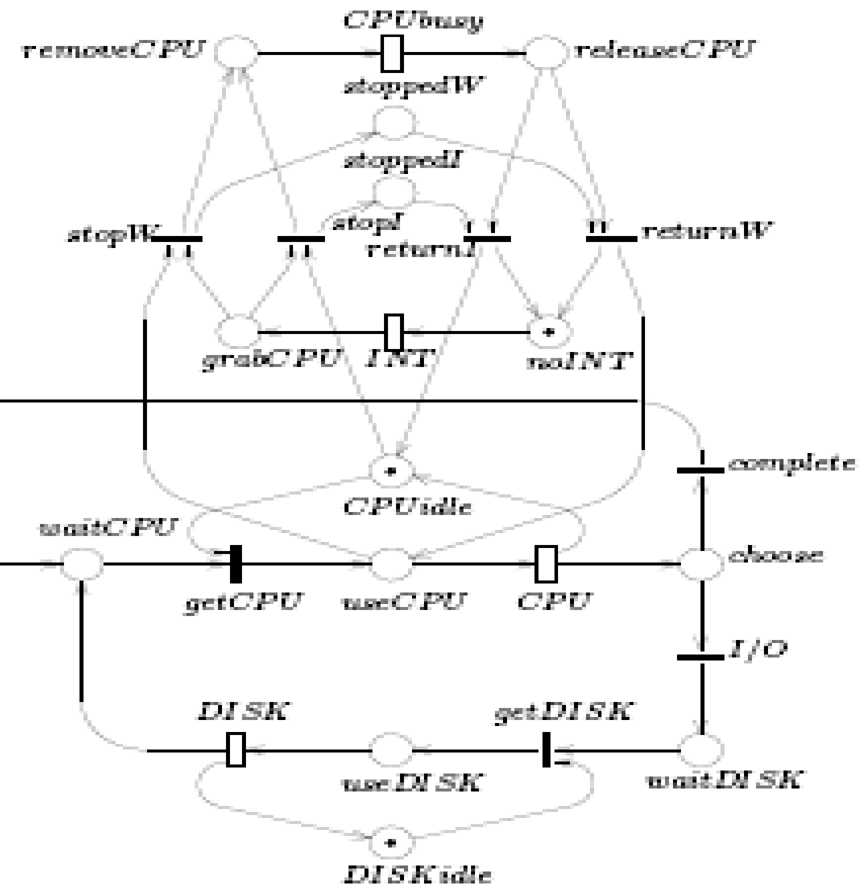
- Exemplo – Sevidor Central



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

Redes Estocásticas

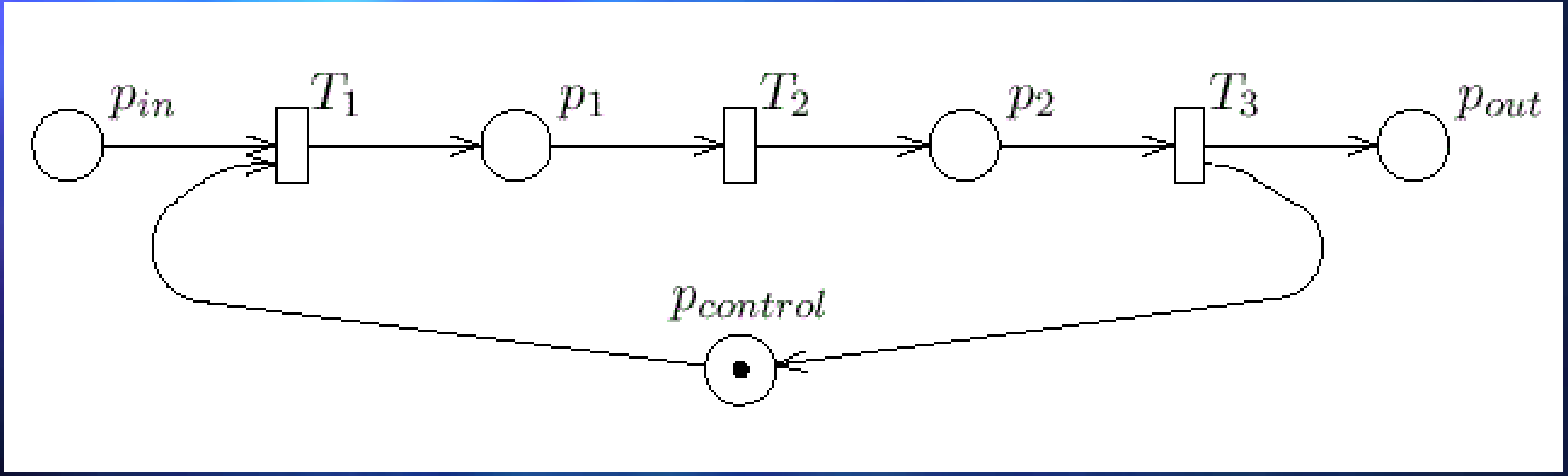
- Exemplo – Sevidor Central com Interrupção



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

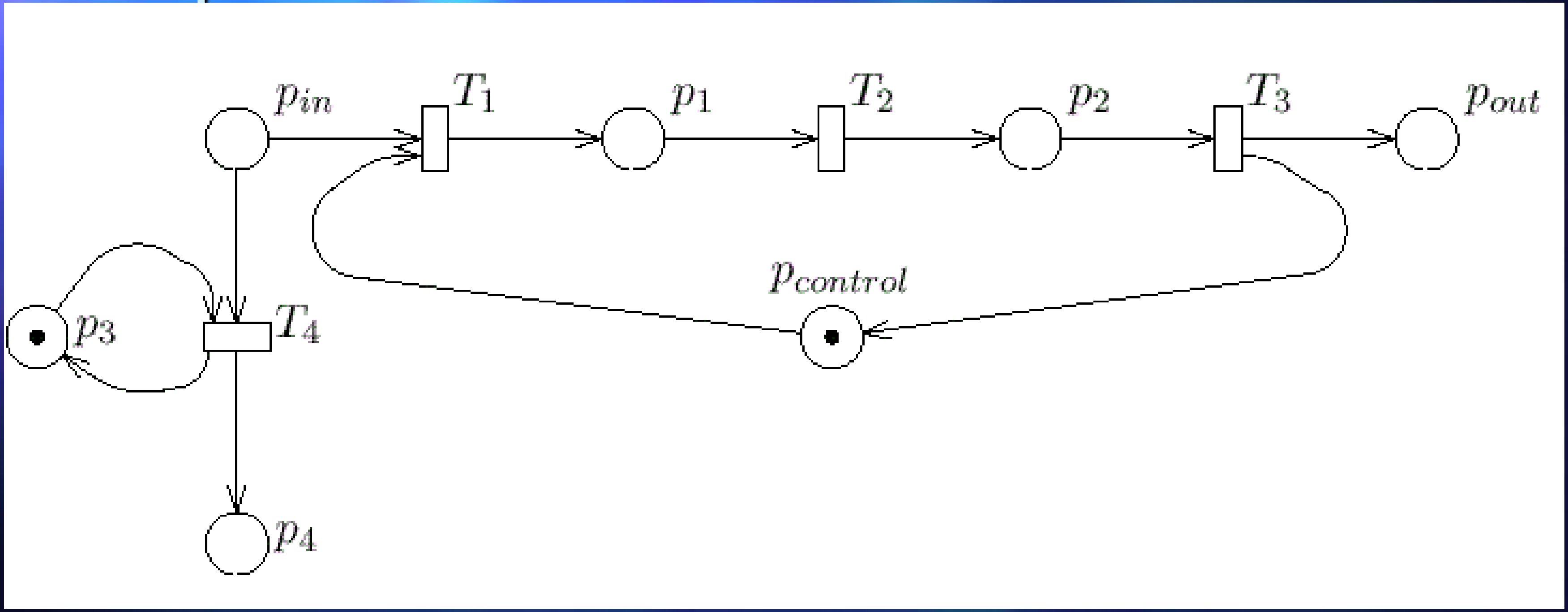
Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 Fases



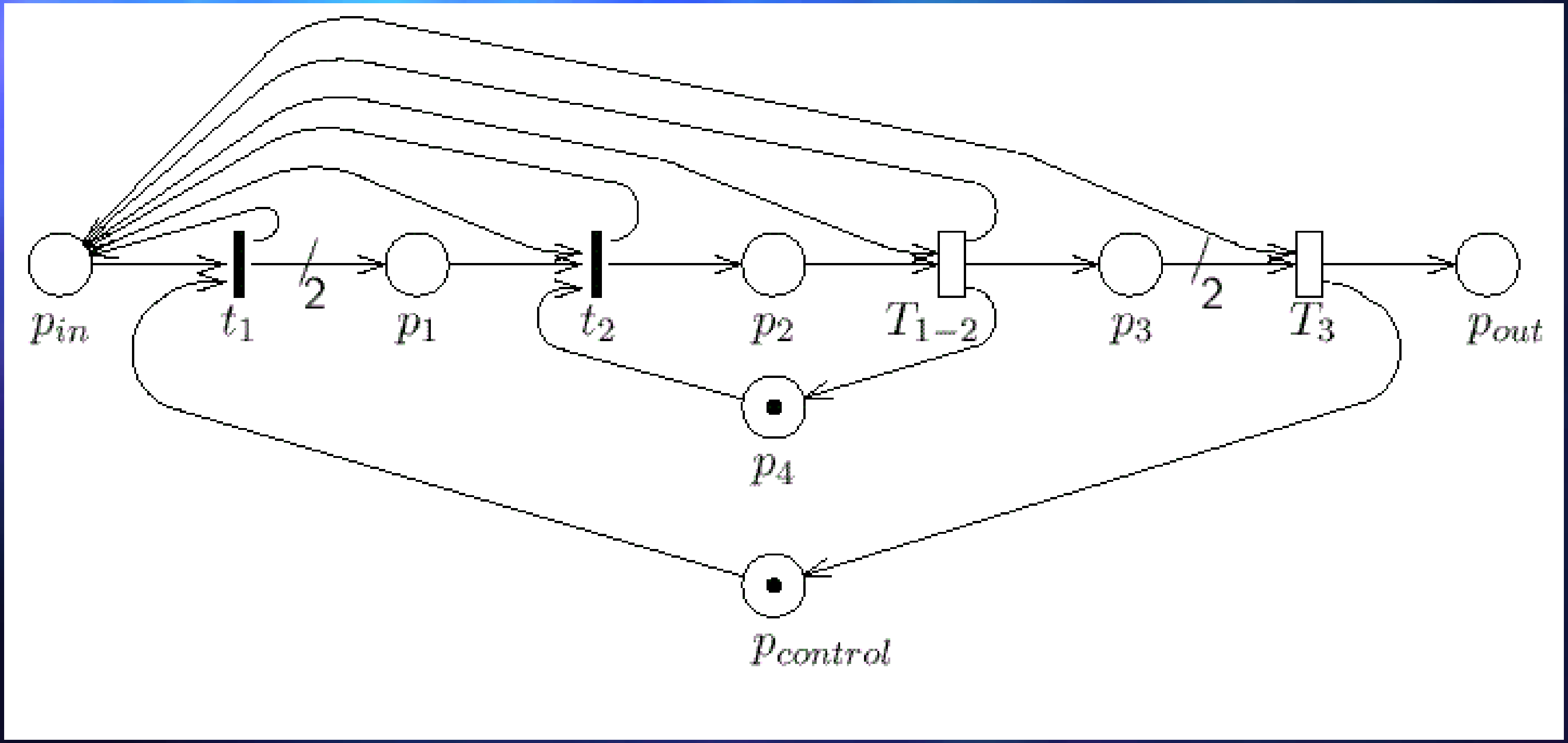
Modelando Políticas de Memória

- Conflito entre Erlang com 3 fases e exponencial



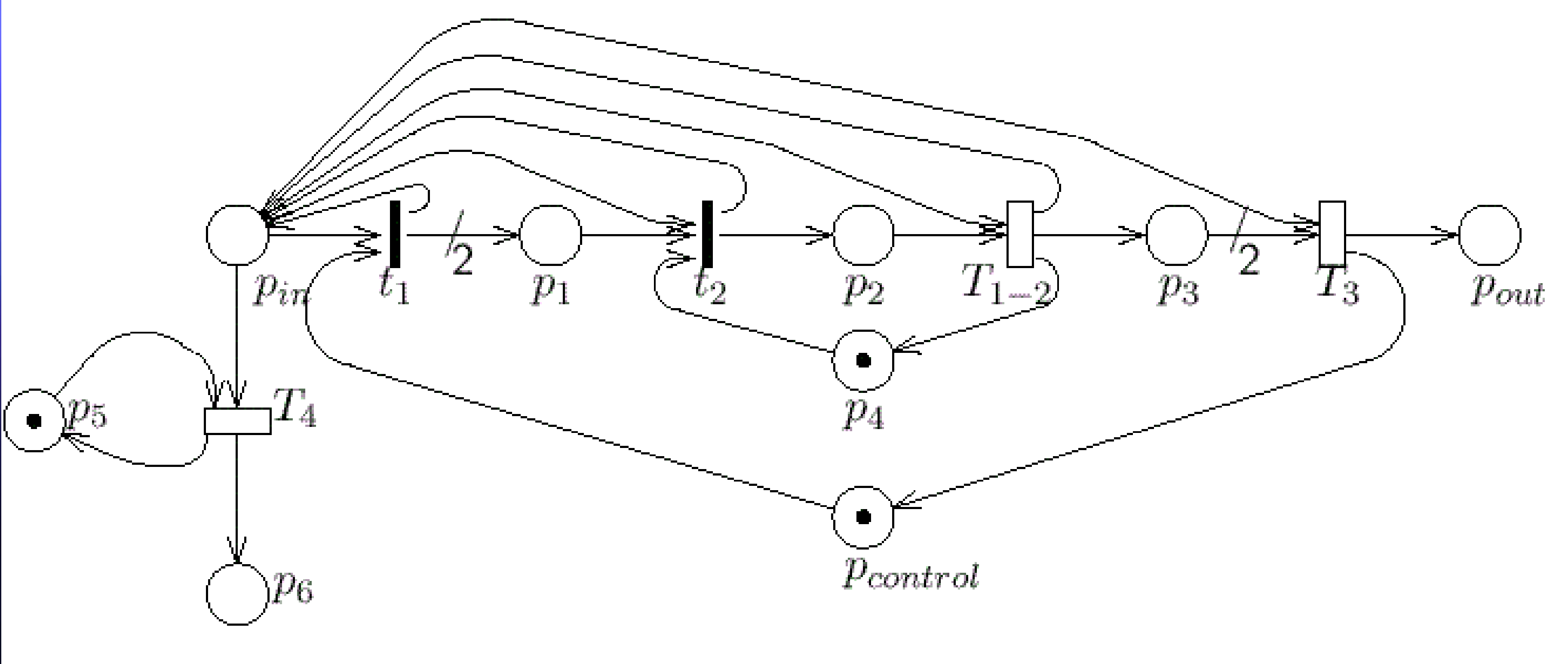
Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 fases com interrupção



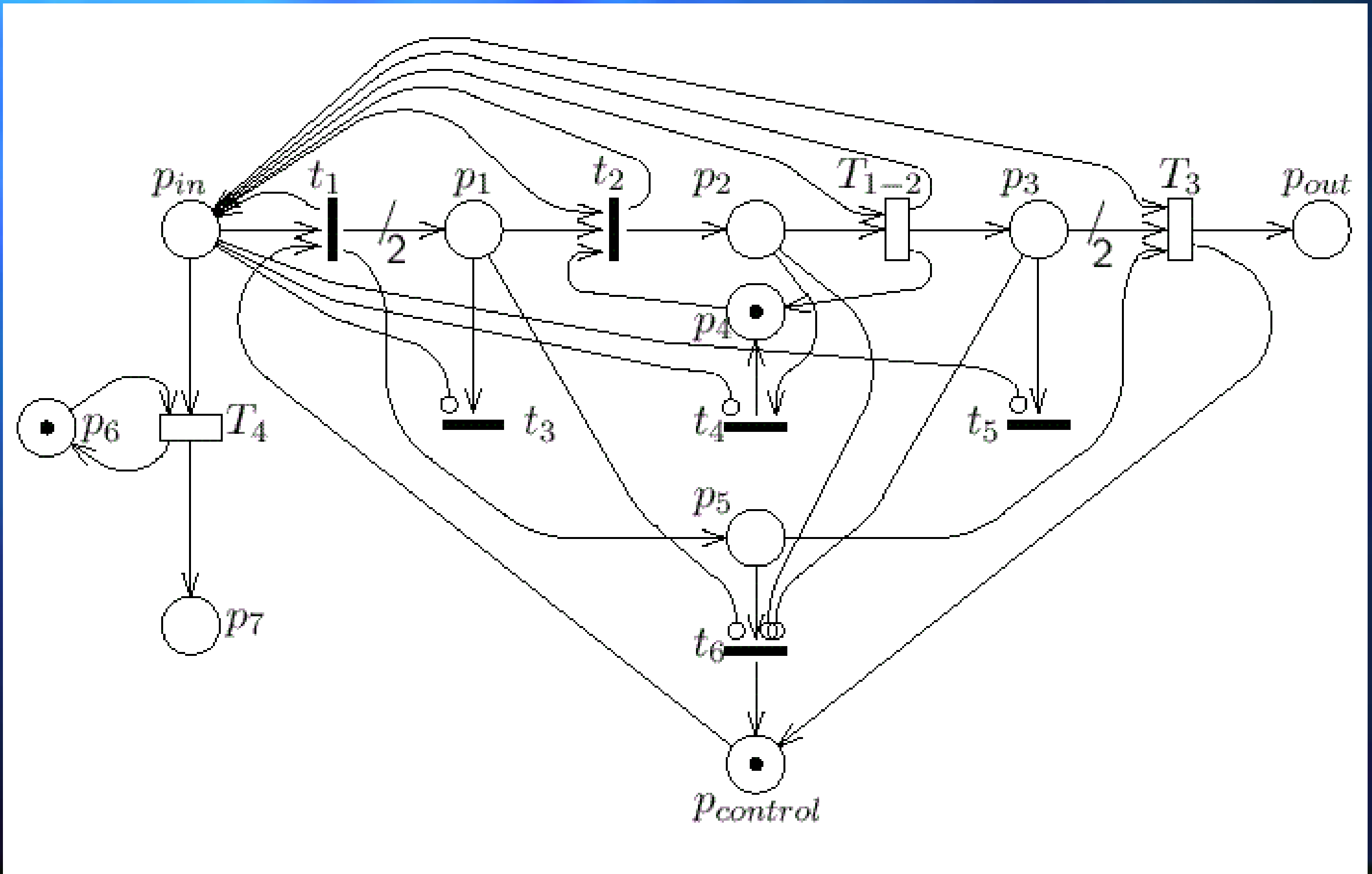
Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Age Memory*



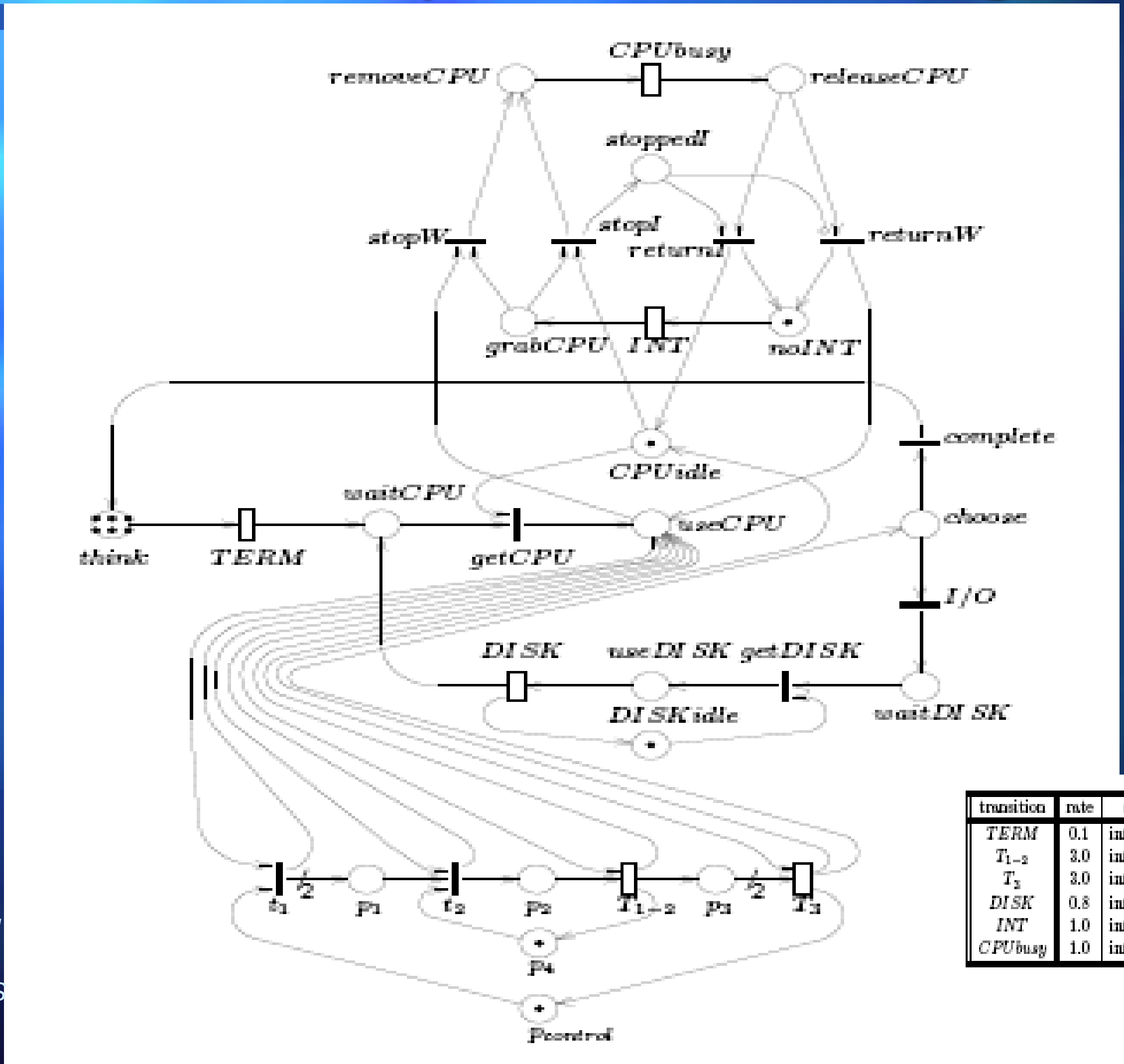
Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



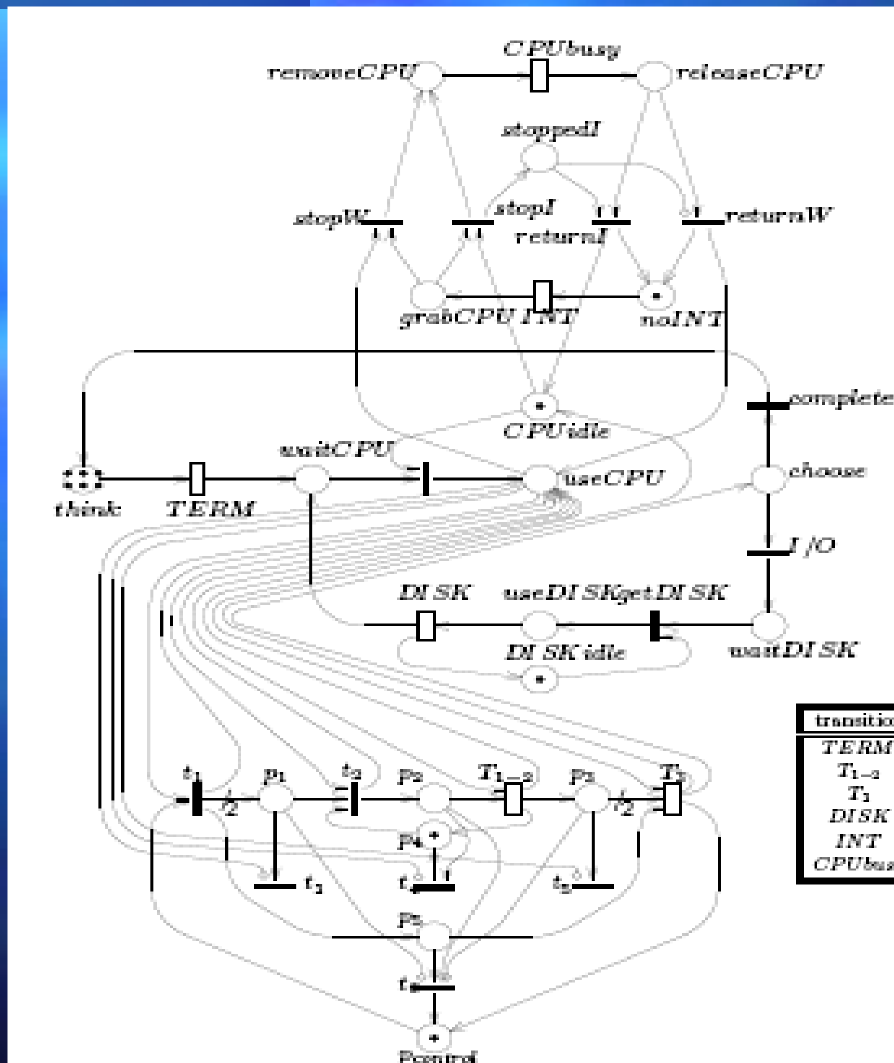
transition	rate	semantics
$TERM$	0.1	infinite-server
T_{1-2}	3.0	infinite-server
T_3	3.0	infinite-server
$DISK$	0.8	infinite-server
INT	1.0	infinite-server
$CPUbusy$	1.0	infinite-server

transition	weight	priority	ECS
$getCPU$	1	1	1
$stopI$	1	1	1
$getDISK$	1	1	2
$complete$	1	1	3
I/O	9	1	3
$returnW$	1	1	4
$returnI$	1	1	5
$stopW$	1	1	6
t_1	1	1	6
t_2	1	1	6

Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*

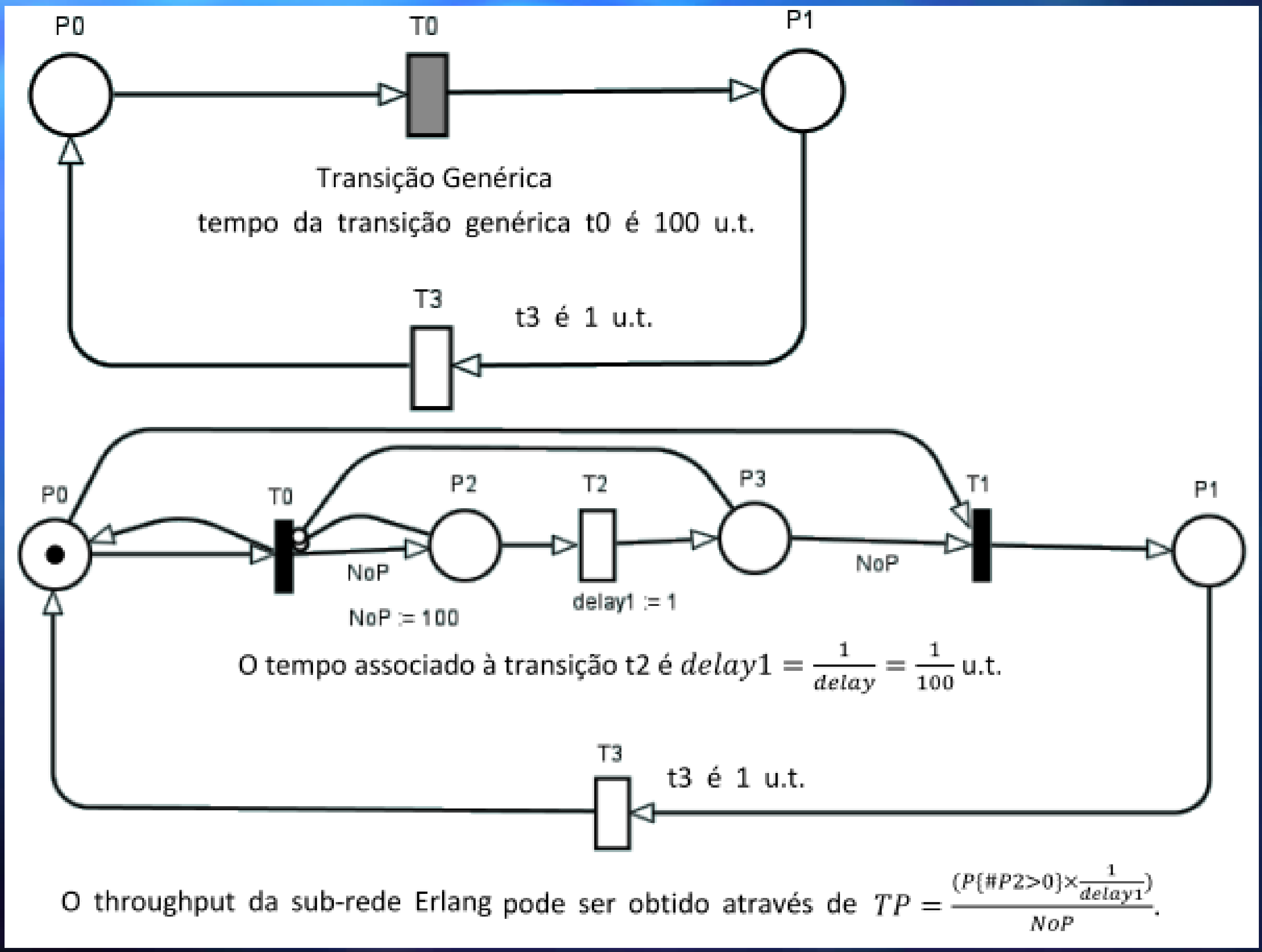


transition	rate	semantics
$TERM$	0.1	infinite-server
T_{1-2}	3.0	infinite-server
T_3	3.0	infinite-server
$DISK$	0.8	infinite-server
INT	1.0	infinite-server
$CPUbusy$	1.0	infinite-server

transition	weight	priority	ECS
$getCPU$	1	1	1
$stopI$	1	1	1
$getDISK$	1	1	2
$complete$	1	1	3
I/O	9	1	3
$returnW$	1	1	4
$returnI$	1	1	5
$stopW$	1	1	6
t_1	1	1	6
t_2	1	1	6
t_3	1	3	7
t_4	1	3	8
t_5	1	3	9
t_6	1	2	10

Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

Throughput de uma Transição Erlang



DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W) - Marsan,Chiola 1987
  - P é o conjunto de lugares,
  - $T = T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

$i_k(t_j): P \times T \rightarrow \mathbb{N}, \forall\, p_k \in P, \forall\, t_j \in T$

$o_k(t_j): P \times T \rightarrow \mathbb{N}, \forall\, p_k \in P, \forall\, t_j \in T$

$h_k(t_j): P \times T \rightarrow \mathbb{N}, \forall\, p_k \in P, \forall\, t_j \in T$

  - $\Pi: T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - M_0, é marcação inicial,

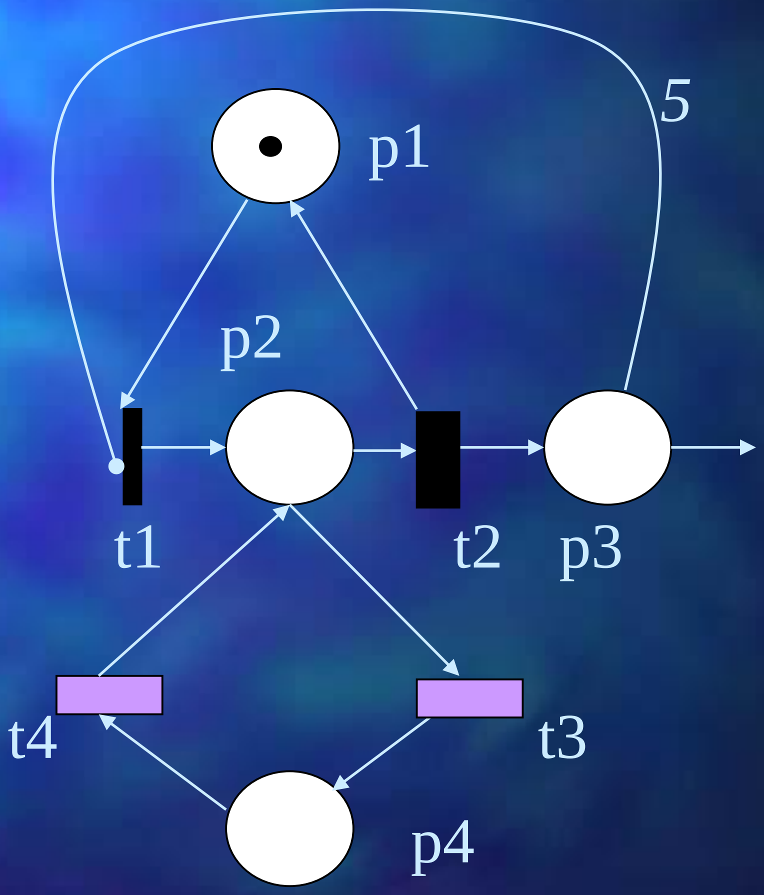
DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W)
  - $D: T_{exp} \cup T_{det} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - $W: T_{im} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.
- Quando $T_{det} = \emptyset$ a DSPN é uma GSPN.

- Embora seja possível a análise de modelos com mais de uma transição determinística simultaneamente habilitadas, as ferramentas, normalmente, somente implementam métodos que considerem apenas uma transição determinística habilitada por marcação.

DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:



  - $T_{im} = \{t_1\}$
  - $T_{exp}=\{t_3,t_4\}$
  - $T_{det}=\{t_2\}$

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W) -
  - P é o conjunto de lugares,
  - $T = T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

$i_k(t_j): P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}, \forall p_k \in P, \forall t_j \in T$

$o_k(t_j): P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}, \forall p_k \in P, \forall t_j \in T$

$h_k(t_j): P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}, \forall p_k \in P, \forall t_j \in T$

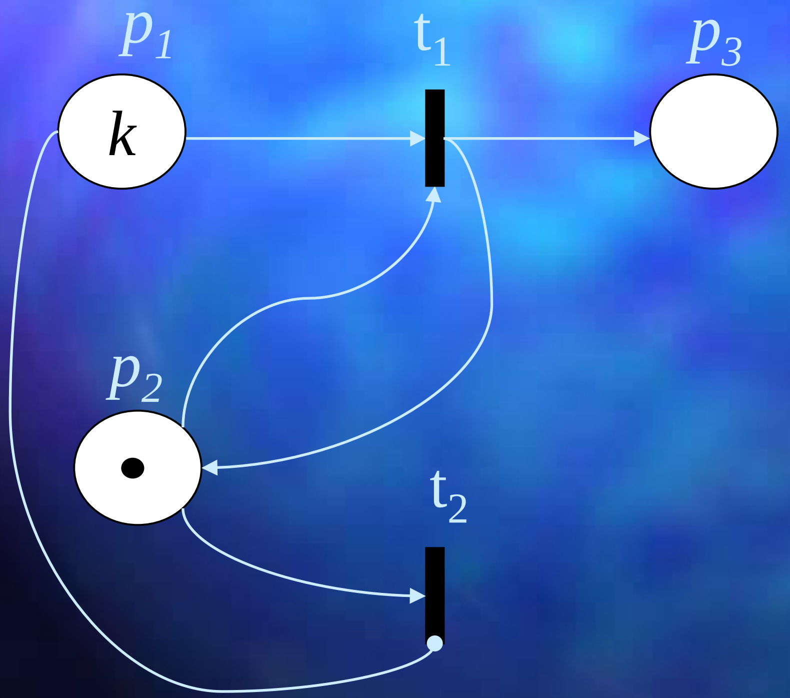
  - $\Pi: T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - M_0, é marcação inicial,

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

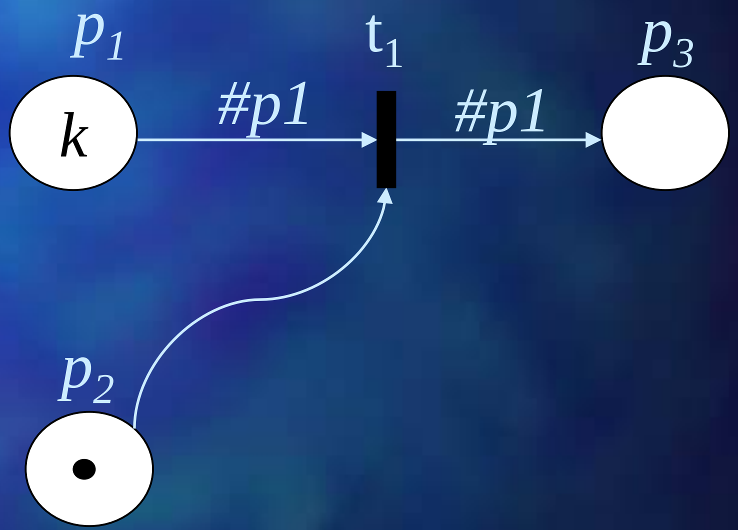
- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W)
  - $D: (T_{exp} \cup T_{det}) \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - $W: T_{im} \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:



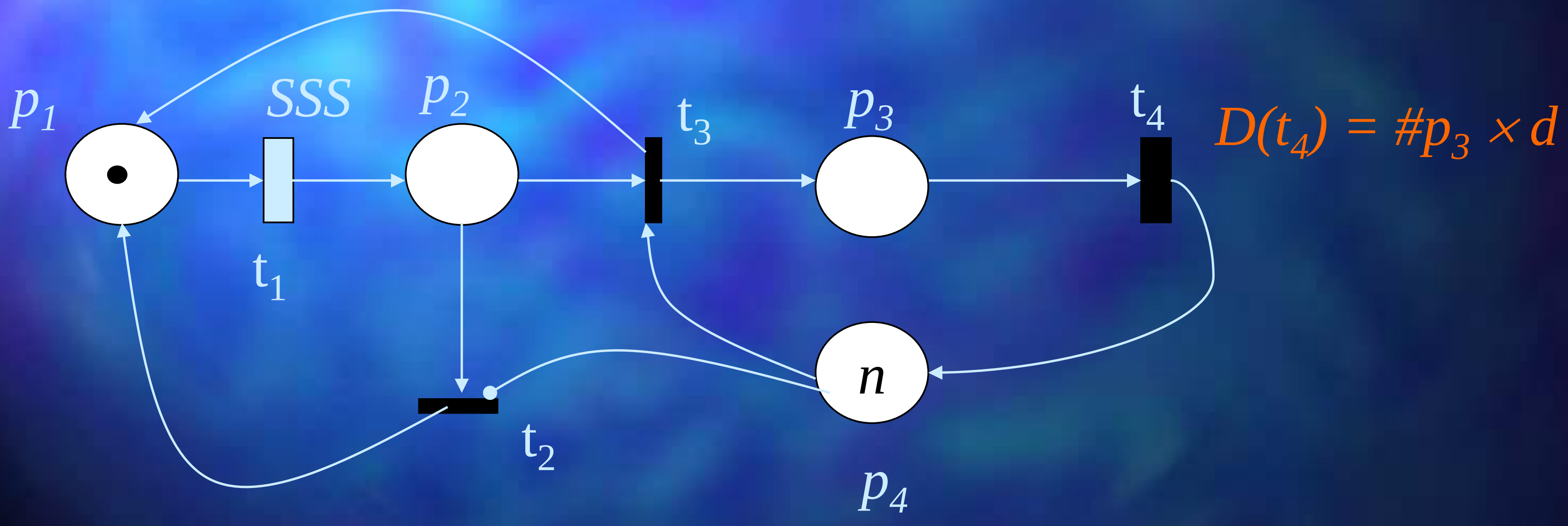
Modelo em DSPN para limpar p_1.



Modelo em EDSPN para limpar p_1 (arcos dependentes de marcação).

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Tempos dependentes da carga



Redes Estocásticas

- Considerações
  - Redes de Petri estocásticas são uma representação compacta de alto nível das CTMC
  - Equivalência com CTMC
  - Análise quantitativa
  - Análise qualitativa
  - Modelagem de sistemas concorrentes, não-determinísticos e assíncronos. Modelagem de sincronismo, escolha, mútua exclusão etc

Redes Estocásticas

- Algumas Referências:

  - Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets, A. Marsan et al, John Wiley & Sons, 1995.

  - Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets, C. Lindermann, John Wiley & Sons, 1998.

- http://www.daimi.au.dk/PetriNets