Modelagem para Avaliação de Desempenho e Confiabilidade

Paulo Maciel

Centro de Informática

Análise de Desempenho

- Modelagem
  - Determinística
    - Melhor e pior casos
  - Probabilística
    - Valores prováveis
  - Operacional
    - Informações observáveis
- Simulação
    - Análise exaustiva
- Medição
  - Medidas obtidas do sistema real
  - Protótipos

- Interpretações do Tempo -

A noção de tempo pode ser representada de diversas maneiras nos sistemas computacionais.

- Tempo Lógico é definido a partir de relações de precedência entre eventos permitindo estabelecer ordens causais entre conjunto de eventos.
- Tempo Físico é um tempo métrico que permite representar quantitativamente a distância entre eventos e estabelecer ordens totais entre eventos.
- Tempo Contínuo segue a natureza uniforme e contínua do tempo físico e é isomorfo ao conjunto dos reais.
- Tempo Discreto é uma simplificação do tempo contínuo onde a relação de isomorfismo é com o conjunto dos naturais.
- Tempo Global fornece uma única referência temporal para todos os componentes do sistema.
- Tempo Local é a noção em que cada componente do sistema tem sua própria referência temporal.

Modelos Temporizados

- Com todos estes pontos de vistas, diversos modelos têm sido propostos na literatura para tratar (modelar e analisar) os sistemas sob o ponto de vista temporal.
- Dentre os modelos temporais, podemos ressaltar:
  - **Lógicas Temporais:** ***Linear Time Temporal Logic, Causal Temporal Logic***
  - **Álgebras de Processos Temporais :** ***Timed CSP***
  - **Autômatos Temporizados**
  - **Cadeias de Markov**
  - **Redes de Fila**
  - **Redes de Petri Temporizadas:** ***Timed PN, Time PN, SPN, GSPN, DSPN***

Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

Modelos Temporizados

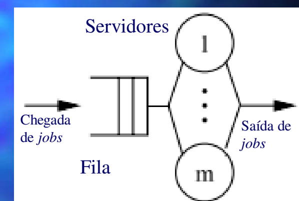
- Modelagem para Análise de Desempenho
  - Análise Operacional
  - Modelos para Simulação
  - Modelos Analíticos
    - Cadeias de Markov
    - Teoria das Filas
    - Redes de Petri Estocásticas
    - Álgebras de Processo Estocásticas

Modelos Temporizados

- Algumas destas classes de modelos temporizados possibilitam a análise temporal dos sistemas seja sob o ponto de vista determinístico ou sob o ponto de vista probabilístico. Para modelagem e avaliação de sistemas críticos, são de particular interesse os modelos que possibilitem a representação de tempos físicos e não apenas o tempo lógico.
- Os modelos que possibilitam a especificação do tempo físico, podem representar os tempo de foras distintas, por exemplo:
  - por **Intervalos**
  - de forma **Determinística**
  - de forma **Probabilística**

Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.



A,B = {M,D,G,E}
- •M - *Markovian,*
- •D - Determinística,
- •G – *General*
- •E - *Erlangian*

Modelagem para Análise de Desempenho

- Algumas Medidas
  - Tempo de resposta
  - *Throughput*
  - Utilização
  - Capacidade
  - Confiabilidade
  - Taxa de descarte

Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.
  - Exemplos:
    - M/M/1
    - M/M/1/K
    - M/G/2

• Muitas vezes quando K e m são ∞, estes termos são omitidos ou usa-se / /

Análise Operacional

- Informações observáveis
- Jeff Buzzen and Peter Denning

Análise Operacional

- Variáveis operacionais
  - T: Período de observação
  - K: Número de recursos do sistema
  - A_i: Número total de solicitações (ex:.chegadas) do recurso i no período T.
  - A_0: Número total de solicitações (ex:.chegadas) ao sistema no período T.
  - C_i: Número total de serviços finalizados pelo recurso i no período T.
  - C_0: Número total de serviços finalizados pelo sistema no período T.
  - B_i: Tempo de ocupação do recurso i no período T.

Análise Operacional

- Métricas derivadas (*derived measures*)
  - Si: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; Si = Bi/Ci
  - Ui: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; Ui = Bi/T
  - Xi: *throughput* (ex.: finalizações por unidade de tempo) do recurso i; Xi = Ci/T
  - λi: taxa de chegada (ex.:, chegadas por unidade de tempo) ao recurso i; λi = Ai/T
  - X0: *throughput* do sistema; X0 = C0/T
  - Vi: Número médio de visitas ao recurso i por solicitação; Vi = Ci/C0

Análise Operacional

- Exemplo1

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

$U_0 = U_{CPU} = \frac{B_{CPU}}{T} = \frac{36s}{60s} = 0{,}6$

$S_0 = S_1 = \frac{B_{CPU}}{C_{CPU}} = \frac{36}{1800} = 0{,}02\,s = S_{CPU}$

Análise Operacional

- Exemplo1

Suponha que ao se monitorar uma processador por um período de 1 min, verificou-se que o recurso esteve ocupado por 36s. O número total de transações que chegaram ao sistema é 1800. O sistema também finalizou a execução de 1800 transações no mesmo período.

1. Qual a taxa de chegada ao sistema (λ_0)?
2. Qual é o throughput do sistema (X_0)?
3. Qual é a utilização da CPU(U_{CPU})?
4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas pelo sistema (S_0)?

Análise Operacional

- *Utilization Law*

$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{B_i}{T} \times \frac{C_i}{C_i} = \frac{B_i}{C_i} \times \frac{C_i}{T} = S_i \times X_i$$

Relacionamento da utilização de um dispositivo com o seu throughput.

Análise Operacional

- Exemplo1

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

CPU $T = 1\,min$ $B_{CPU} = 36s$

$A_0 = 1800$ transactions

$C_0 = 1800$ transactions

$K = 1$

$A_0 = A_1$

$C_0 = C_1$

$S_0 = S_1 = S_{CPU}$

$U_0 = U_1 = U_{CPU}$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_{CPU}$

$X_0 = X_1 = X_{CPU}$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1800}{60} = 30$ trs

$X_0 = X_1 = \frac{1800}{60} = 30$ trs

Análise Operacional

- *Utilization Law*

$U_i = S_i \times X_i$

Exemplo: Considere que 125 pacotes por segundo chegam a um roteador e que o roteador leva em média 2 milisegundos para tratar o pacote. Portanto:

$U_i = 0{,}002 \times 125 = 25\%$

Análise Operacional

- Exemplo2

A banda passante de um *link* de comunicação é 56000 bps. Pacotes de 1500 bytes são transmitidos ao *link* a uma taxa de 3 pacotes por segundo

- Qual é a utilização do link?

Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$X_i = V_i \times X_0$

Exemplo: suponha que toda vez que executa uma transação faz-se 2 acessos a uma unidade de disco. Se 5,6 transações são finaziladas por segundo, portanto:

$X_i = 2 \times 5{,}6 = 11{,}2\ tps$

Análise Operacional

- Exemplo2

bandwidth 56000 bps Time to send 1bit (TSb)

TSb = 1/bandwidth = 1,78571E-05

(TSB) Time to send 1byte = 8 x TSb = 0,000143

Packet size = 15000 bytes

Time to send 1 packet (TSP) =

1500 x TSB = 0,214286

Arriving rate (λ) = 3 packets/s

U = TSP x λ = 0,214286 x 3 = 0,642857

Análise Operacional

- *Service Demand Law*
  - *Service demand de um recursos* é o tempo médio total que uma transação passa em no recurso.

Da *Utilization Law, tem-se:*

$$U_i = X_i \times S_i$$

Da *Forced Flow Law,* tem-se:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Portanto:

Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$$X_i = \frac{C_i}{T} = \frac{C_i}{T} \times \frac{C_0}{C_0} = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{C_0}{T} = V_i \times X_0$$

Uma maneira interessante de relacionar o trhoughput do sistema ao throughput dos recursos.

Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$$U_i = V_i \times X_0 \times S_i = D_i \times X_0$$

Portanto: $D_i = \dfrac{U_i}{X_0}$

Observe que a utilização U_i do dispositivo i é diretamente proporcional à demanda D_i (*service demand*), portanto o dispositivo com mais alta demanda $\max_i\{D_i\}$ tem a mais alta utilização e é o "gargalo" do sistema.

Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$\boxed{X_i = \frac{C_i}{T} \Rightarrow \frac{C_i}{X_i} = T}$

$\boxed{B_i = U_i \times T}$

$\boxed{U_i = X_i \times S_i}$

$D_i = V_i \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{U_i}{X_i} = \frac{C_i}{X_i} \times \frac{U_i}{C_0} = T \times \frac{U_i}{C_0} = \frac{B_i}{C_0}$

And, since $C_0/T = X_0$, then $D_i = U_i/X_0$

Therefore:

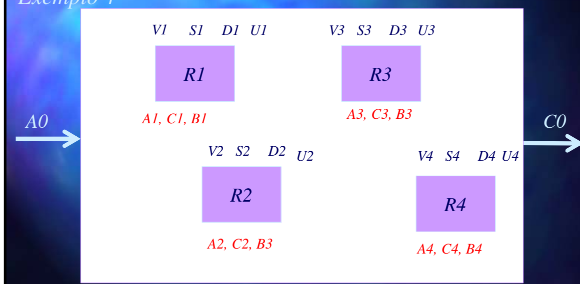
$\boxed{D_i = V_i \times S_i = \frac{B_i}{C_0} = \frac{U_i}{X_0}}$

Análise Operacional

OL

V1

- Exemplo 4



Análise Operacional

- Exemplo3

Considere que um *Web Server* foi monitorado por 10 min e que a CPU esteve ocupada por 90%. O *log* do *Web Server* registrou 30.000 solicitações processadas. Qual é a CPU *Service Demand* (D_{CPU}) relativa as solicitações ao *Web Server*?

$T = 10 \times 60s = 600s$

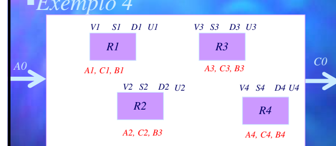
$X_0 = 30.000/600 = 50$ solicitações por segundo.

$D_{CPU} = U_{CPU}/X_0 = 0,9/50 = 0,018$ s/solicitação

Análise Operacional

OL

- Exemplo 4



$A_0 = 96$ $A_3 = 100$

$A_1 = 60$ $A_4 = 55$

$A_2 = 110$

$T_h = 6$

$C_0 = 96$ $C_4 = 55$

$C_1 = 60$

$C_2 = 110$

$C_3 = 100$

$T = 6 \times 60 = 360$ minutos

$B_1 = 4 \times 60 + 25$ $B_2 = 4 \times 60 + 5$

$B_3 = 5 \times 60 + 15$ $B_4 = 3 \times 60 + 56$

Análise Operacional

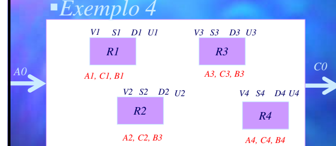
OL

- Exemplo4 Suponha um departamento composto por cinco recursos (pessoas: R1, R2, R3 e R4). Esse departamento foi monitorado por um período de 6 horas. Verificou-se que R1 esteve ocupado por 4h25min, R2 por 4h5min, R3 por 5h15min e R4 por 3h56min. O número total de transações que chegaram ao deparamento foram 96. O sistema também finalizou a execução de 96 transações no mesmo período. O número total de chegadas a cada recurso e as respectiva finalizações são $A_1 = C_1 = 60$, $A_2 = C_2 = 110$, $A_3 = C_3 = 100$ e $A_4 = C_4 = 55$.
  1. Qual a taxa de chegada ao sistema (λ_0)?
  2. Qual é o *throughput* do sistema (X_0)?
  3. Qual é a utilização de cada recurso (U_i)?
  4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas por cada recurso do sistema (S_i)?
  5. Qual é o número médio de visitas por recurso (V_i)?
  6. Qual é tempo médio de uma transação qualquer (não necessariamente a que visitou o recurso i) no recurso i (D_i)?

Análise Operacional

OL

- Exemplo 4



$U_1 = \frac{B_1}{T} = 0.736111$ $S_1 = \frac{B_1}{C_1} = 4.41667$

$U_2 = \frac{B_2}{T} = 0.680556$ $S_2 = \frac{B_2}{C_2} = 2.22727$

$U_3 = \frac{B_3}{T} = 0.875$ $S_3 = \frac{B_3}{C_3} = 3.15$

$U_4 = \frac{B_4}{T} = 0.655556$ $S_4 = \frac{B_4}{C_4} = 4.29091$

$V_1 = \frac{C_1}{C_0} = 0.625$ $V_2 = \frac{C_2}{C_0} = 1.14583$

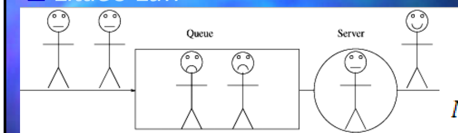
$V_3 = \frac{C_3}{C_0} = 1.04167$ $V_4 = \frac{C_4}{C_0} = 0.572917$

$\lambda_0 = \frac{A_0}{T} = 0.266667$ $X_0 = \frac{C_0}{T} = 0.266667$

$D_1 = \frac{U_1}{X_0} = 2.7604$ $D_2 = \frac{U_2}{X_0} = 2.55208$ $D_3 = \frac{U_3}{X_0} = 3.28125$ $D_4 = \frac{U_4}{X_0} = 2.45833$

Análise Operacional

Little's Law



$$N_i = \lambda_i \times R_i$$

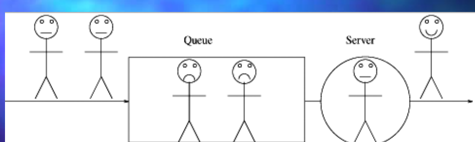
A lei de Little também é uma lei operacional, pois utiliza apenas informações mensuráveis. Adotamos essa lei para relacionar o tamanho da fila N_i de um dispositivo i ao tempo de resposta deste dispositivo R_i em função do número de chegadas (A_i) observadas no período (T). $\lambda_i = \frac{A_i}{T}$

R – Response time
W – Waiting time
S – Service time

N – Número de clientes no sistema
X – Throughput

Análise Operacional

Little's Law



Se o sistema é balanceado, a taxa de chegada é igual ao *throughput*, portanto: $N_i = \lambda_i \times R_i = X_i \times R_i$

Quando não há fila e se considera apenas um servidor, a Little's law corresponde a Utilization law:
e R=S

Análise Operacional

- Exemplo 5

Um call center precisa redimencionar o número de atendentes em função de uma previsão de crescimento de demanda. Atualmente o call center recebe 20000 chamadas diárias. Espera-se que esse número chegue a 30000 chamadas diárias em 6 meses.

Os estudos mostram que 75% das chamadas diárias ocorrem num intervalo de 3 horas e a duração média das chamadas é de 5 minutos.

A empresa adota como meta um nível de utilização de 70% para os atendentes.

Quantos atendentes a empresa deve ter em 6 meses?

Análise Operacional

- Exemplo 5

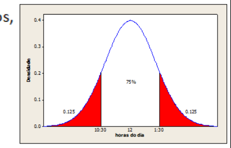
O *peak throughput* nos próximos 6 meses será:

$$X = 75\% \times \frac{30000\ chamadas}{3\ horas} = 7500\ chamadas\ por\ hora = 125\ chamadas\ por\ minuto$$

Se a duração média das chamadas é de 5 minutos, então para se ter uma utilização de 70%, a frequência entre chamadas é:

$$U = \lambda \times S$$
$$0{,}7 = \lambda \times 5$$
$$\lambda = 0{,}14 \text{ chamadas por minuto}$$
$$C = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.14} = 7{,}142857 \text{ minutos}$$

(C - tempo entre chamadas)



Análise Operacional

- Exemplo 5

O número de atendentes necessários pode ser estimado através da Little's Law, considerando $R = C$

$$N = X \times R$$

$N = 125 \times 7{,}142857 = 892{,}8571$ antendentes.

Análise Operacional

General Response Time Law

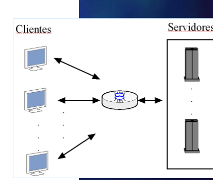
A Little's law pode ser aplicada a qualquer parte do sistema, basta apenas que o fluxo esteja "balanceado". Portanto, pode-se aplicá-la a parte central do sistema'(servidores) e ao sistema periférico (clientes).

N é o número total de transacões no sistema, R é o *response time*, e X é o *throughput* do sistema.

$$N = X \times R$$

Dado que N_i é o número de transações em cada dispositivo, N pode ser calculdado:

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_M$$



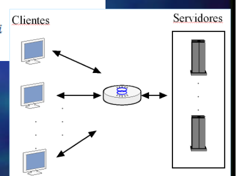
Análise Operacional

General Response Time Law

Dividindo-se ambos os lados por X, tem-se:

$$R = V_1 \times R_1 + V_2 \times R_2 + \cdots V_M \times R_M$$

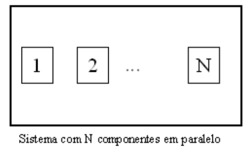
$$R = \sum_i^M V_i \times R_i$$



Análise Operacional

Bottleneck Analysis

Observe que a utilização U_i do dispositivo i é diretamente proporcional à demanda D_i (*service demand*), portanto o dispositivo com mais alta demanda $\max_i\{D_i\}$ tem a mais alta utilização e é o "gargalo" do sistema.



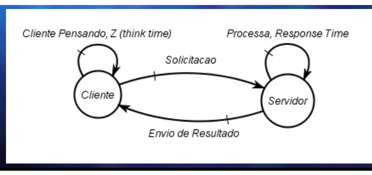
$$X_0 \leq \frac{1}{D_{max}}$$

Todas atividades começam no mesmo momento, mas a tarefa "maior" só finaliza quando todas as atividades finalizarem.

Análise Operacional

Interactive Response Time Law

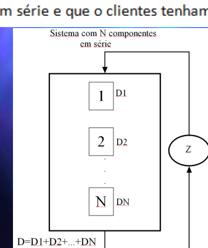
Em um sistema interativo, os clientes fazem uma solicitação a um sistema servidor, o sistema servidor processa essa solicitação e devolve um resultado ao cliente. Após um período de espera (*think time*) Z, o cliente faz uma nova solicitação. Se o *system response time* é R, o tempo total desse ciclo é $R + Z$.



Análise Operacional

Bottleneck Analysis

Considere agora outra situação limite: um sistema composto por N componentes em série e que o clientes tenham um *think time* Z.



Portanto, $R = D$

E como sabemos que

$$X = \frac{N}{R+Z}$$

Temos:

$$X = \frac{N}{D+Z}$$

Portanto:

$$X \leq \frac{N}{D}$$

Consequentemente:

$$X = \min_i \left\{ \frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D} \right\}$$

Análise Operacional

Interactive Response Time Law

Se considerarmos um período T, cada cliente gerará:

$$\frac{T}{R+Z} \ solicitações \ no \ período \ T.$$

Se considerarmos N clientes, teremos:

$$\frac{N \times T}{R+Z} \ solicitações \ no \ período \ T.$$

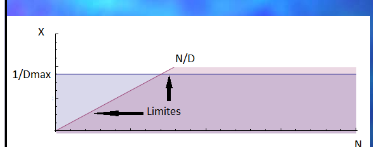
Portanto, o *throughput* do sistema é:

$$X = \frac{\frac{N \times T}{R+Z}}{T}$$

$$X = \frac{N}{R+Z} \quad \text{and} \quad R = \frac{N}{X} - Z$$

Análise Operacional

Bottleneck Analysis



Portanto, $R = D$

E como sabemos que

$$X = \frac{N}{R+Z}$$

Temos:

$$X = \frac{N}{D+Z}$$

Portanto:

$$X \leq \frac{N}{D}$$

Consequentemente:

$$X = \min_i \left\{ \frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D} \right\}$$

Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*
- Problemas:

Um servidor de arquivos foi monitorado por $10^4 s$. Observaram-se 40000 requisições ao servidor. Cada requisição ao servidor requer, em média, quatro acessos a uma unidade de disco. O tempo médio de serviço provido pela unidade de disco é 10 ms. Durante esse período de observação, o processador teve uma utilização em torno de 60%.

a. Estime o *time demand* do processador.
b. Estime a utilização do disco.
c. Quem é o "gargalo" desse sistema se considerarmos que o período de observação e carga adotados são significativos?

Considere um servidor de email que é composto de um processador e duas unidades de disco (**disco 1** e **disco 2**). Cada transação a esse sistema, faz sete acessos ao **disco 1** e oito acessos **disco 2**, assim como dezesseis acessos ao processador. O *service time* do **disco 1 e disco 2** é 20 e 30 ms, respectivamente. O *service time* do processador é 10 ms.

a. Qual é o dispositivo "gargalo" do sistema?
b. Qual é o tempo de *response time* do sistema?
c. Qual é a utilização máxima da configuração atual desse sistema?
d. Qual é o *throughput* máximo desse sistema?

Modelo de Probabilidade

1. Espaço amostral (Ω): um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementar) de um fenômeno aleatório.
2. Conjuto de eventos (*S*): um conjunto de todos os possíveis eventos de interesse.
3. Probabilidade dos eventos (*P*): a probailidade de ocorrência de um evento observável.

PM é a tupla: PM = (Ω, *S*, *P*).

Análise Operacional

- Leis Operacionais (*derived measures*)

Utilization Law:

$$U_i = X_i \times S_i = \lambda_i \times S_i$$

Forced Flow Law:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Service Demand Law:

$$D_i = V_i \times S_i = U_i / X_0$$

Little's Law:

$$N = X \times R$$

Interactive Response Time Law

$$R = \frac{N}{X} - Z$$

Espaço Amostral

- A probabilidade de um evento representa a chance de que o resultado de um experimento resulte na ocorrência do evento.
- Assume-se que os experimentos são aleatório.
- Um experimento aleatório pode ter muito resultados. Cada resultado é um ponto amostral (evento elementar) e tem uma probailidade.
- Um espaço amostral Ω : um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementares) de um fenômeno aleatório.
  - Finito (ex.: execução das ações associadas a opções de um **if**; dois resultados)
  - Countável (ex.: número de vezes que "corpo" de um laço **while** é executado; O espaço amostral por ser finito ou contável infinito.)
  - Contínuo (ex.: tempo de falha de componente)

Modelagem de Fenômenos Aleatórios

Eventos

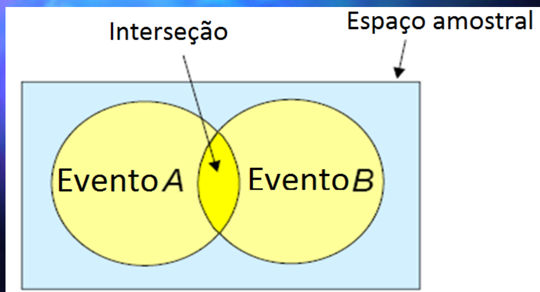
- Um evento *E* é uma coleção de zero ou mais pontos amostrais (evento elementar) de Ω. Um evento *E* é um sub-conjunto de Ω.

$$E \subseteq \Omega$$

- Ω é o evento universal e o conjunto vazio é presentado por $\emptyset$

$$\Omega \in S$$
$$A \in S \Rightarrow \overline{A} \in S$$
$$A, B \in S \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in S$$

Diagrama de Venn
União e Inteseção de Eventos



Terminologia e Definições

- Ω e E

  - $\overline{E_1} = \Omega - E_1$ - *Complemento*
  - $E_3 = E_1 \cap E_2$, *interseção*
  - $E_4 = E_1 \cup E_5$, *União*

Para n eventos $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 ... \cup E_n$

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 ... \cap E_n$$

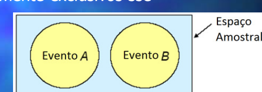
Probabilidade

- *Probabilidade* é um valor numérico que representa a chance de que um evento ocorra.
- Os valores de uma Probabilidade estão entre 0 e 1.
- A probabilidade próxima de 0 representa grande improbabilidade de ocorrência do evento.
- A probabilidade próxima de 1 denota que a ocorrência do evento é quase certa.

Álgebra

- Eventos mutuamente exclusivos (disjuntos)
  - Dois eventos são mutuamente exclusivos sse

$A \cap B = \emptyset$



  - Um conjunto de n eventos ($n>2$) é mutuamente exclusivo sse

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

Eventos e suas Probabilidades

- Um evento é uma coleção de pontos amostrais. A probailidade de um evento é a soma das probabilidades do pontos amostrais.
- Se pudermos identificar todos os pontos amostrais (eventos elementares) de um experimento e associar probabilidades a eles, podemos calcular a probabilidade de qualquer evento.

Axiomas

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω, S, P)
  - Para qualquer evento A, a proabilidade de A é:

1. $1 \geq P(A) \geq 0$, $\forall$ A $\in$ S
2. $P(\Omega)=1$
3. Se A e B São disjuntos, então:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Consequências

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω,S,*P*)

Sejam A e $\overline{A}$ (seu complemento) eventos

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

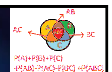
4. Se A e B são dois eventos que não são mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

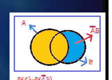
Variáveis Aleatórias Resumo

- Variáveis Aleatórias é uma função que confere um número real a cada resultado (do espaço amostral) de um experimento aleatório.
- Variável Aleatória é uma função que reflete o resultado de um experimento aleatório. $X: \omega \rightarrow \Re$. $\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ $x \in \Re$.

Consequências: Eventos não mutuamente exclusivos



$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i>j} P(A_i A_j) + \sum_{i>j>k} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^n P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$



Princípio da inclusão e exclusão (acima)
Um método muito melhor é:

5. Soma dos Produtos Disjuntos (SDP):

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \cdots + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n).$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Variáveis aleatórias contínuas assumem quaisquer valores no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$
- Variáveis aleatórias discretas assumem apenas valores discretos.

Exemplo

Fenômeno aleatório:

Dois resultados de um teste de condição em um **if** *statement*:

if *B* **then** *T*;

else *E*;

Ω = {*T*,*E*}; Conjunto de resultados

S = {*Φ*, {*E*}, {*T*}, {*T*,*E*} }; Conjunto de todos os eventos

P = { 0, ½, ½, 1}; probabilidade atribuídas

Variáveis Aleatórias Resumo

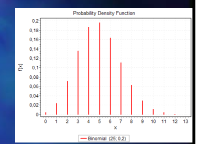
- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Variáveis Aleatórias
Resumo

- *Probability mass function (pmf)* – Seja Ω um espaço amostral discreto. $p(x)$, que denota uma pmf de uma variável aleatória X, é definida por $p(x) = P[X=x]$, onde x assume valores de Ω.

Variáveis Aleatórias
Resumo

Mathematica



Discreta

- Binomial
  - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se tem resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$.

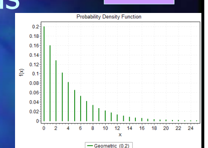
Ver slides de medição

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Função de Distribuição de Probabilidade Acumulativa (CDF) de uma variável aleatória X, denotada por $F(X)$, é definida por $F(X) = P[X \le x]\ \forall\, x \in \Re$
- $F(X)$ é uma função monotônica não-decrescente tal que $0 \le F(X) \le 1$, onde $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$
- $F(X) = \sum_{y \le x} p(y) \Rightarrow F(\infty) = \sum_{\forall y} p(y) = 1$

Variáveis Aleatórias
Resumo

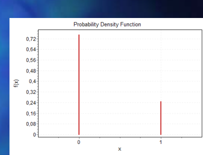
Mathematica



- Discreta
  - Geométrica
    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se realiza o experimento para se ter o primeiro resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = p\,(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots$

Variáveis Aleatórias
Resumo

Mathematica



- Discreta
  - Bernoulli
    - Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis ($X=0, X=1$).
    - pmf(*probability mass function*) de X é dada por: $P(X=0) = 1-p$ e $P(X=1) = p$, $0 \le p \le 1$

Variáveis Aleatórias
Resumo

- Discreta
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\bar{X} = E[X] = \sum_{\forall k} k \,.\, P(X=k)$
  - Uma função de uma variável aleatória ($Y=f(X)$) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[f(X)] = \sum_{\forall k} f(k) \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - n-ésimo momento (em torno da origem) de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência de X
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \Sigma_{\forall k}\, k^n \,.\, P(X=k)$
  - n-ésimo momento central de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência da diferença entre X e o valor esperado de X ($E(X) = \overline{X}$)
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \Sigma_{\forall k}\, (k-\overline{X})^n \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - $e^{tX} = 1 + tX + t^2X^2/2! + \ldots + t^rX^r/r! + \ldots$

$$f(t) = e^{(-a\,t)}$$

$$= 1 - a\cdot t + \frac{a^2\cdot t^2}{2} - \frac{a^3\cdot t^3}{6} + \frac{a^4\cdot t^4}{24} - \frac{a^5\cdot t^5}{120} + \frac{a^6\cdot t^6}{720} - \frac{a^7\cdot t^7}{5040} + \frac{a^8\cdot t^8}{40320} - \frac{a^9\cdot t^9}{362880} + \ldots$$

Para a=2, tem-se:

$$= 1 - 2\cdot t + 2\cdot t^2 - \frac{4\cdot t^3}{3} + \frac{2\cdot t^4}{3} - \frac{4\cdot t^5}{15} + \frac{4\cdot t^6}{45} - \frac{8\cdot t^7}{315} + \frac{2\cdot t^8}{315} - \frac{4\cdot t^9}{2835} + \ldots$$

  - Tomando a esperança:
  - $E[e^{tX}] = 1 + E[X]\, t + E[X^2]\, t^2/2! + E[X^r]\, t^r/r! + \ldots$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - O primeiro momento é o valor esperado.
  - O primeiro momento central é 0
  - O segundo momento central (variância)
    - $var(X)=\sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \Sigma_{\forall k}\, (k-\overline{X})^2 \,.\, P(X=k)$
  - O coeficiente de variação é a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Procedimento para obtenção dos momentos
  - *Determine* $M_X(t)$ *analiticamente para uma uma distribuição particular*
  - *Ache* $E[X^r] = d^r/dt^r\, M_X(t)|_{t=0}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - Dada uma variável aleatória X, a função geratriz de momento $M_X(t)$ de sua distribuição de probabilidade é o valor esperado de e^{tX}.
  - $M_X(t)=E[e^{tX}]$
  - $= \sum_i e^{tx_i}\, p_X(x_i)$ X discreta.
  - $= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$ X contínua.

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado = p,
    - Variância= p(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/p
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = q + pe^t$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Binomial
    - Parâmetros: n,p;
    - Valor Esperado= np,
    - Variância= np(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/np
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = (q + pe^t)^n$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Cumulative Distribution Function (CDF)*
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
    - Se $x < y$ então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x<X\leq y) = F_X(y) - F_X(x)$
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado= 1/p,
    - Variância= $(1-p)/p^2$,
    - Coeficiente de variação= (1-p)
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = pe^t/(1-qe^t)$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - Como $F_X(x)$ não é decrescente, então $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$
    - $P(x1 \leq X \leq x2) = \int_{x1}^{x2} f_X(x)\, dx$
    - $P(X=x) = \int_{x}^{x} f_X(x)\, dx = 0$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a,b \leq +\infty$, é denominada Variável Aleatória Contínua.
  - *Cumulative Distribution Function (CDF)*
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
    - Se $x < y$ então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x<X\leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Variáveis Aleatórias Resumo

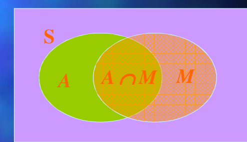
- Contínua
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, f_X(x)\, dx$
  - Uma função de uma variável aleatória (g(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \,.\, f_X(x)\, dx$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - n-ésimo momento
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\,dx$
  - n-ésimo momento central
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^n \cdot f_X(x)\,dx$

Probabilidade Condicional

- Seja A um evento arbitrário em um espaço amostral S. A probabilidade de que ocorra um evento A uma vez que M tenha ocorrido é denotado por $P(A/M)$ que é definido por:
- $P(A/M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)}$



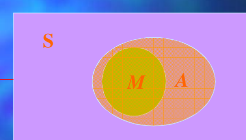
- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$
- Caso $A \subset M$ então $P(A/M) = \dfrac{P(A)}{P(M)}$

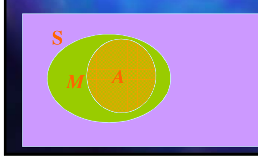
Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - O segundo momento central (variância)
    - $\sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^2 \cdot f_X(x)\,dx$
  - O coeficiente de variação e a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

Probabilidade Condicional

- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$





- Caso $A \subset M$ então $P(A/M) = \dfrac{P(A)}{P(M)}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Distribuição Exponencial

- Arises commonly in reliability & queuing theory.
- A non-negative continuous random variable.
- It exhibits memoryless property (continuous counterpart of geometric distribution).
- Related to (discrete) Poisson distribution

84

Distribuição Exponencial

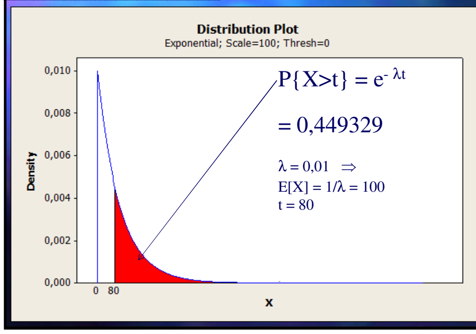
- Often used to *model*
  - Interarrival times between two IP packets (or voice calls)
  - Service times at a file (web, compute, database) server
  - Time to failure, time to repair, time to reboot etc.
- The use of exponential distribution is an assumption that needs to be validated with experimental data; if the data does not support the assumption, then other distributions may be used

85

Distribuição Exponencial

Exponential

Mathematica

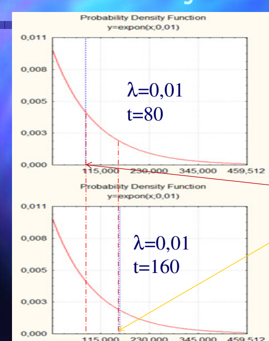


Distribuição Exponencial

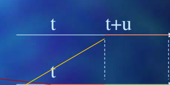
- For instance, Weibull distribution is often used to model times to failure;
- Lognormal distribution is often used to model repair time distributions
- Markov modulated Poisson process is often used to model arrival of IP packets (which has non-exponentially distributed inter-arrival times)

86

Distribuição Exponencial



$P\{X>t\} = e^{-\lambda t}$



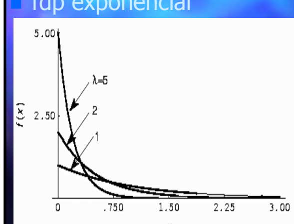
Probabilidade Condicional

Distribuição Exponencial

Mathematica

Variável Aleatória Exponencial

- fdp exponencial



- $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $0 \le t < \infty$
- $CDF(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \le t < \infty \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$
- Valor Esperado
  $E(X) = 1/\lambda$
- Variância: $var(X) = 1/\lambda^2$
- Propriedade:
  Não possui memória

Distribuição Exponencial

80 160

80 160

Um exemplo:

$P\{X>80\} = e^{-0,01\times 80} = 0,449329$

- $P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{P\{X>(80+80) \wedge X>80\}}{P\{X>80\}}$
- $P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{P\{X>160\}}{P\{X>80\}}$

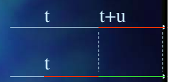
Probabilidade Condicional

$P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{e^{-0,01\times(80+80)}}{e^{-0,01\times 80}} = e^{-0,01\times 80} = 0,449329$

$\boxed{P\{X>160 \mid X>80\} = P\{X>80\} = 0,449329}$

Distribuição Exponencial

Variável Aleatória Exponencial



$\boxed{P\{X>t\} = e^{-\lambda t}}$

- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u \wedge X>t\}}{P\{X>t\}}$ Probabilidade Condicional
- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u\}}{P\{X>t\}}$

$P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda t}} = \boxed{e^{-\lambda u} = P\{X>u\}}$

Distribuição Exponencial

$R(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,$

$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0,$

$h(t) = \lambda,$

$E[T] = MTTF = \dfrac{1}{\lambda},$

$Var[T] = \sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}.$

94

Distribuição Exponencial

- Contínua
  - Exponencial
    - Parâmentro: λ,
    - Valor Esperado: $1/\lambda$,
    - Variância: $1/\lambda^2$,
    - Coeficiente de variação: 1
    - Função geratriz de momentos

$M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-1}$

Distribuição Exponencial

The memoryless property can be demonstrated with conditional reliability:

$$R(x \mid t) = \Pr(T > x + t \mid T > t) = \frac{\Pr(T > x + t)}{\Pr(T > t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = R(x), \qquad x \geq 0.$$

95

Lembre-se destas fórmulas

Distribuição Exponencial

- Mathematically (CDF and pdf are given as):

CDF: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{if } 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

where λ is a paramter and the base of natural logarithm, $e = 2.7182818284$

pdf: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

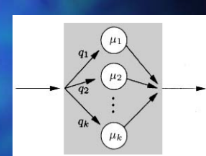
- Also $P(X > t) = \int_t^\infty f(x)dx = e^{-\lambda t}$

$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

93

Distribuição Hiperexponencial

$F_X(x) = \sum_{j=1}^{k} q_j(1 - e^{-\mu_j x}), \qquad x \geq 0.$



pdf: $f_X(x) = \sum_{j=1}^{k} q_j \mu_j e^{-\mu_j x}, \quad x > 0,$

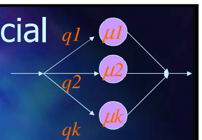
mean: $\bar{X} = \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j} = \frac{1}{\mu}, \quad x > 0,$

variance: $\mathrm{var}(X) = 2\sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j^2} - \frac{1}{\mu^2},$

$c_X = \sqrt{2\mu^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j^2} - 1} \quad \geq 1$

96

Distribuição Hiperexponencial



Hiperexponencial
- Parâmentros: k, μ_j, q_j;
- Valor Esperado:

$E(X)=\overline{X}=\sum_{j=1}^{k} q_j/\mu_j$

$F_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j(1-e^{-\mu_j t})$, t≥0

$f_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j\mu_j e^{-\mu_j t}$, t≥0

- Coeficiente de variação: $\mathrm{sqrt}(2\times(1/\overline{X})^2\times\Sigma_{j=1}q_j/\mu_j^2 - 1) \geq 1$
- Variância: $2\sum_{j=1}^{k} q_j/\mu_j^2 - \overline{X}^2$

Distribuição Erlang

Mathematica

- Erlang-k

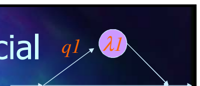
$F_X(x)=1-e^{-k\mu t}\sum_{j=0}^{k-1}(k\mu t)^j/j!$, t≥0

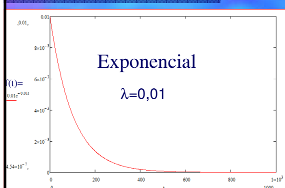
$f_X(x)= [(k\mu(k\mu t)^{k-1})/(k-1)!]e^{-k\mu t}$, t≥0, k=1.2,...

- Parâmentros: k, μ;
- Valor Esperado: k/μ
- Variância: k/μ^2
- Coeficiente de variação: 1/sqrt(k) ≤ 1
- Função geratriz de momentos

$M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-k}$

Distribuição Hiperexponencial



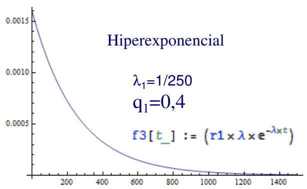


E(t)= $\int_0^\infty$ t × f1[t] dt

$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty t^2 \times f1[t]\, dt - m^2}$

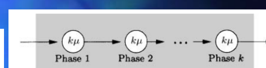
E(t)= $\int_0^\infty$ t × f3[t] dt = 100

$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty (t^2 \times f3[t])\, dt - m3^2}$ = 200



Distribuição Erlang

$F_X(x) = 1 - e^{-k\mu x}.\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(k\mu x)^j}{j!}, \quad x \geq 0,\ k = 1, 2 \ldots.$



pdf: $f_X(x) = \frac{k\mu(k\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\mu x},\ x > 0,\ k = 1, 2, \ldots,$

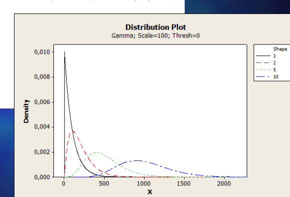
mean: $\overline{X} = \frac{1}{\mu},$

variance: $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{k\mu^2},$

coefficient of variation: $c_X = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1.$

$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$

$\mu = \frac{1}{c_X^2 k \overline{X}}.$



101

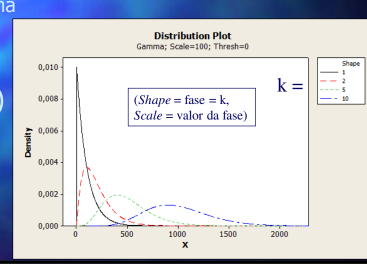
Distribuição Hiperexponencial

Hiperexponencial
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e c≥1 pode ser aproximada por uma
  - Parâmentros: k=2, μ_1, μ_2, q_1, q_2
  - $\mu_1=1/\overline{X} . (1 - \mathrm{sqrt}(q_2/q_1 . (c^2 -1)/2))^{-1}$
  - $\mu_2=1/\overline{X} . (1 + \mathrm{sqrt}(q_1/q_2 . (c^2 -1)/2))^{-1}$
  - $q_1+q_2=1$, $q_1, q_2 \geq 0$ $\mu_1, \mu_2>0$

Distribuição Erlang

Mathematica

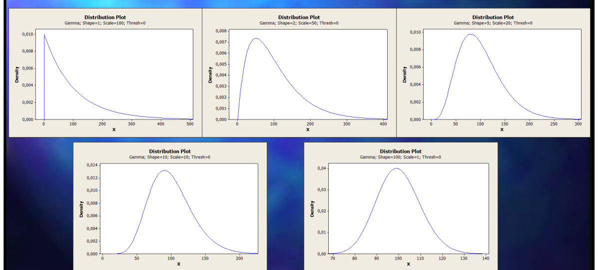
- Erlang-K
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e c≤1 pode ser aproximada por uma
  - $k=[1/c^2]$
  - $\mu=1/(c^2k\overline{X})$



Distribuição Erlang

Mathematica

- Erlang-K (*Shape* = fase, *Scale* = valor da fase)



Distribuição Hipo-exponencial

- Hipo-exponencial
  - Parâmentros: μ_1, μ_2,
  - Valor Esperado: $1/\mu_1 + 1/\mu_2$
  - Variância: $1/\mu^2_1 + 1/\mu^2_2$
  - Coeficiente de variação: $[\mathrm{sqrt}(\mu^2_1 + \mu^2_2)/(\mu_1 + \mu_2)] < 1$

Distribuição Hipo-exponencial

pdf: $f_X(x) = \sum_{i=1} a_i \mu_i \mathrm{e}^{-\mu_i x}, \quad x > 0,$

with $a_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{k} \frac{\mu_j}{\mu_j - \mu_i}, \quad 1 \le i \le k,$

mean: $\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\mu_i},$

coefficient of variation: $c_X = \left(1 + 2 \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\mu_i \sum_{j=i+1}^{k} \mu_j \right)}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$

104

Distribuição Hipo-exponencial

- Contínua
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ como valor esperado e $0.5 \le c^2 < 1$ pode ser aproximada por uma
  - Hipo-exponencial

    $\mu_1 = (2/\overline{X}) \{1+\mathrm{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

    $\mu_2 = (2/\overline{X}) \{1-\mathrm{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

Distribuição Hipo-exponencial

A distribuição hipo-exponencial é uma generalização da distribuição de Erlang quando se admite fases com taxas diferentes.

- Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com duas fases $\mu_1 \neq \mu_2$, tem-se:
  - $F_X(x) = 1 - [\mu_2 /(\mu_2 - \mu_1) e^{-k\mu_1 t}] + [\mu_1 /(\mu_2 - \mu_1) e^{-k\mu_2 t}]$, $t \ge 0$
  - $f_X(x) = [(\mu_1 \mu_2)/(\mu_1 - \mu_2)] (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t})$, $t \ge 0$

Distribuição Hipo-exponencial

- Contínua
  - Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com k fases e taxas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ tem-se:

$f_X(x) = \sum_{j=1}^{k} a_i \mu_i e_1{}^{\lambda_i t}$, $t \ge 0$

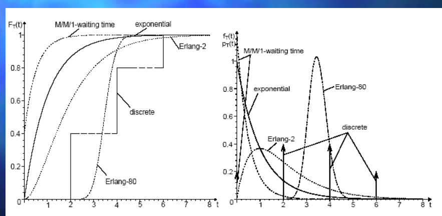
$a_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{k} [\mu_j/(\mu_j - \mu_i)]$, $1 \le i \le k$

Valor Médio = $\sum_{j=1}^{k} 1/\mu_i$

Variáveis Aleatórias Resumo

Exp

Erl

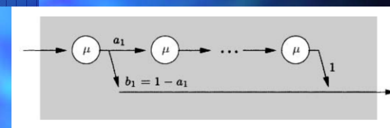


Distribuição Cox

Case 1: $c_X \leq 1$

$\mu_j = \mu \quad j = 1, \ldots, k,$

$a_j = 1 \quad j = 2, \ldots, k-1$



$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu},$$

$$\text{var}(X) = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k)+k-2)}{\mu^2},$$

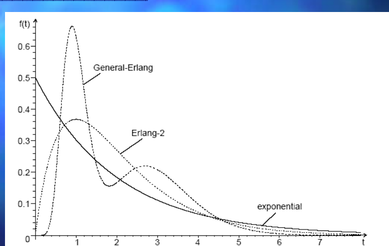
$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k)+k-2)}{[b_1 + k(1-b_1)]^2}.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2 + 4 - 4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)},$$

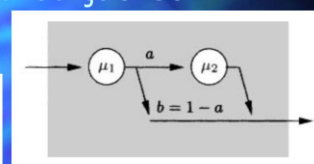
$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k-1)}{\overline{X}}.$$

Variáveis Aleatórias Resumo



Distribuição Cox

Case 2: $c_X > 1$



$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

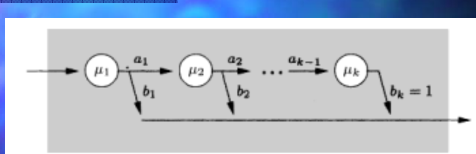
$$\text{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}} \qquad a = \frac{1}{2c_X^2}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X}c_X^2}$$

Distribuição Cox



The model consists of k phases in series with exponentially distributed times and rates $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. After phase j, another phase $j+1$ follows with probability a_j and with probability $b_j = 1 - a_j$ the total time span is completed.

Variáveis Aleatórias Resumo

- Uma função de uma variável aleatória (Y=f(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[f(X)] = \sum_{\forall k} f(k) \cdot P(X=k)$
- Uma função de uma variável aleatória (Y= g(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$

Função densidade de Probabilidade de X

Variáveis Aleatórias Resumo

- Se f(X) = X
  - Valor Esperado
    - $E[f(X)] = E(X) = \mu$
  - Variância
    - $Var[f(X)]=E([f(X) - E(f(X))]^2]$
    - $=E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$ (Variância de X)
    - $=Var(X) = \sigma^2$

Variáveis Aleatórias Resumo

– Exemplo

Suponha que X seja uma variável aleatória tal que $E(X) = 3$ e $Var(X) = 5$. Além disto, seja $Y(X) = 2X - 7$.

Portanto:

$E(Y(X)) = [2 \times E(X)] - 7 = -1$

$Var(Y(X)) = 2^2 \times Var(X) = 20$

Variáveis Aleatórias Resumo

1. Se f(X) = aX + b
   - Valor Esperado
     - $E[f(X)] = aE(X) + b$
   - Variância
     - $Var[f(X)] = a^2Var(X)$
     - Prova: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$

Por definição $\mathrm{Var}(aX+b) = E\left[(aX+b) - E(aX+b)\right]^2$

$$= E\left[aX + b - (aE(X) + b)\right]^2$$

$$= E\left(aX - aE(X)\right)^2$$

$$= E(a^2(X - E(X))^2 = a^2 E(X - E(X))^2 = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Variáveis Aleatórias Resumo

Quando Y=f(X) é muito complicada, os cálculos de E(f(X)) e Var(f(X)) podem ser difíceis. Pode-se obter aproximações de E(f(X)) e Var(f(X)) expandindo-se Y=f(X) (série de Taylor) até três termos (para a média).

$Y = f(E(X)) + [(X - E(X)) \times f'(E(X))] + [(1/2)\times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + R$

Resto da expansão

Variáveis Aleatórias Resumo

2. Se f(X) = b
   - Valor Esperado
     - E(b) = b
   - Variância
     - Var(b) = 0

Variáveis Aleatórias Resumo

- $Y = f(E(X)) + (X - E(X))\, f'(E(X)) + [(1/2) \times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + R$. Portanto:
- $E(f(X)) = E[f(E(X))] + \underbrace{E[(X - E(X))\, f'(E(X))]}_{=0} + E[(1/2) \times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + E(R) =$

$E[f(E(X))] + E[(1/2)] \times E[f''(E(X))] \times E[(X - E(X))^2] + E(R) =$

$f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) + E(R)$

$\cong f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) \Rightarrow$

$\boxed{E(f(X)) \cong f(E(X)) +[(1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X)]}$

Variáveis Aleatórias
Resumo

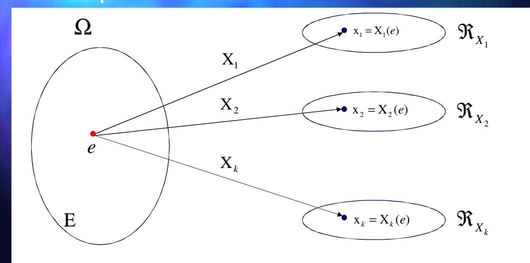
Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

Seja X uma variável aleatória com E[X] e Var(X). Suponha que Y=f(X). Portanto:

- $E[Y] \cong f(E[X]) + (f''(E[X]) \times Var(X))/2$
- $Var(Y) \cong (f'(E[X])^2 \times Var(X)$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias



Variáveis Aleatórias
Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

- Suponha uma variável aleatória t, onde $E[t]=20s$ e $Var(t)=5s$. Considere uma função $v(t)=dt^{-1} = 10^3 t^{-1}$
- $v'(t) = -10^3 t^{-2}$ e $v''(t)=2\times10^3 t^{-3}$
- $E[v(t)] = v(E[t]) + (v''(E[t]) \times Var(t))/2$
- $E[v(t)] = v(20) + (v''(20) \times 5)/2 = 50{,}625$ m/s
- $Var(v(t))=[v'(E[t])]^2 \times Var(t)$
- $Var(v(t))= [v'(20)]^2 \times 5 = 12{,}5$ m/s

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

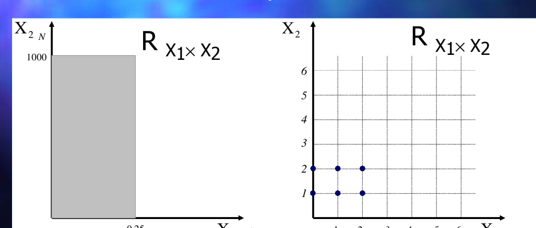
- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto finito ou infinito enumerável, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório discreto bidimensional.
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto não enumerável do plano euclidiano, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo bidimensional.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias
  - Seja Ω o espaço amostral associado a um experimento E. $e \in E$ é um resultado do experimento E.
  - Seja $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias que associam um número real $X_1(e), X_2(e), \ldots, X_k(e)$ a cada resultado e.
  - $[X_1, X_2, \ldots, X_k]$ é chamado de vetor aleatório k-dimensional.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)



Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Bivariada
  - Caso Discreto: a cada resultado $[x_1, x_2]$ de $[X_1, X_2]$ associamos um número $p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$, onde $p(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall\ x_1, x_2$

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2} p(x_1, x_2) = 1$$

  - Distribuição de probabilidade de $[X_1, X_2]$

$$([x_1, x_2], p(x_1, x_2)), \forall x_1, x_2$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

Retornar

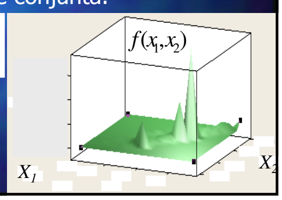
- Probabilidade Marginal: Caso Discreto

$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4	5	$p_2(x_2)$
1	1/30	1/30	2/30	3/30	1/30	8/30
2	1/30	1/30	3/30	4/30		9/30
3	1/30	2/30	3/30			6/30
4	1/30	3/30				4/30
5	3/30					3/30
$p_1(x_1)$	7/30	7/30	8/30	7/30	1/30	$\sum_x p(x) = 1$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

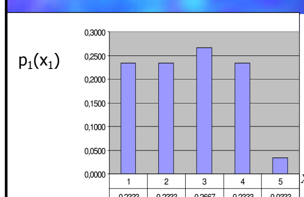
- Probabilidade Bivariada
  - Caso Contínuo: Se $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo, $f(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall\ (x_1, x_2) \in R_{X_1 \times X_2}$ é a função de densidade conjunta.

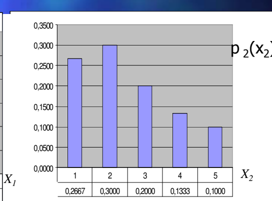
$$\iint_{R_{X_1 \times X_2}} f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = 1$$



Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal: Caso Discreto





Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Discreto : a distribuição marginal de X_1 é

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2), \forall x_1$$

A distribuição marginal de X_2 é

$$p_2(x_2) = \sum_{x1} p(x_1, x_2), \forall x_2$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Contínuo : a distribuição marginal de X_1 é

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2$$

A distribuição marginal de X_2 é

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_1$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$Z = X + Y$.

Portanto $E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias contínuas, temos que:

$$E[Z] = E[X+Y] =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x+y)dxdy =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)dydx + \int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)dxdy =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy =$$
$$E[X] + E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias discreta, temos que:

$$E[Z] = E[X+Y] =$$
$$\sum_x\sum_y (x+y)p(x+y) =$$ (*Ver exemplo da página seguinte*)
$$\sum_x x\, p_x(x) + \sum_y y\, p_y(y) =$$
$$E[X] + E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

De forma mais geral, considere Z, Y e X variáveis aleatórias contínuas, onde

Z(X,Y) = aX+bY, e a e b são constantes.

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

Ver Tabela Original

- Linearidade do Valor Esperado

x2,x1	0	1	2	3	4	p2(x2)	x2 p(x2)
0	0,0333	0,0333	0,0667	0,1000	0,0333	0,2667	0
1	0,0333	0,0333	0,1000	0,1333		0,3000	0,3
2	0,0333	0,0667	0,1000			0,2000	0,4
3	0,0333	0,1000				0,1333	0,4
4	0,1000					0,1000	0,4
p1(x1)	0,2333	0,2333	0,2667	0,2333	0,0333	2,0000	1,5000
1,6000	0	0,233333	0,533333	0,7	0,133333	x1 p(x1)	E[X2]
E[X1]						E[X1+X2]=	3,1000

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Prova:

$$\begin{aligned}
E(aX+bY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[axf(x,y)+byf(x,y)]dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}axf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}byf(x,y)dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right]dx + b\int_{-\infty}^{\infty}y\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right]dy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy \\
&= aE(X) + bE(Y).
\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Linearidade do Valor Esperado**

Este resultado pode ser generalizado de forma que:
para $a_1,\ldots a_n$ constantes e qualquer variável aleatória multivariada $(X_1,\ldots X_n)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

Se $E(X_i)$ não divergem.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Soma de Variâncias**

$$\begin{aligned} Var[X+Y] &= E[((X+Y)-E[X+Y])^2] \\ &= E[((X+Y)-E[X]-E[Y])^2] \\ &= E[((X-E[X])+(Y-E[Y]))^2] \end{aligned}$$

$$= E[(X-E[X])^2 + (Y-E[Y])^2 + 2(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

$$= E[(X-E[X])^2] + E[(Y-E[Y])^2] + E[2(X-E[X])(Y-E[Y]$$

$$= E[(X-E[X])^2] + E[(Y-E[Y])^2] + 2E[(X-E[X])(Y-E[Y]$$

$$= Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y)$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

Retornar

- **Linearidade do Valor Esperado**
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e seja

$Z = XY.$

Portanto $E[Z] = E[XY] = E[X]E[Y]$

Prova: $E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j) =$

$\sum_i \sum_j x_i y_j p_X(x_i) p_Y(y_j) =$ (dado que são independentes)

$\sum_i x_i y_j p_X(x_i) \sum_j y_j p_Y(y_j) =$

$E[X]E[Y]$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Soma de Variâncias**

$Cov(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y]]$

$= E(XY - YE[X] - XE[Y] + E[X]E[Y])$

Devido à propriedade de linearidade do valor esperado, temos:

$= E[XY] - E(YE[X]) - E(XE[Y]) + E[X]E[Y]$

$= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y]$

$= E[XY] - E[X]E[Y]$ (Se X e Y forem independentes)

$= 0$ (devido à linearidade)

Ver também o slide 101

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Soma de Variâncias**
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$Z = X + Y$

Portanto $Var[Z] = Var[X + Y]$

$= Var[X] + Var[Y] + 2 \times Cov(X, Y)$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Soma de Variâncias**

$Var(X+Y) = Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y)$

Dado que se X e Y forem independentes, tem-se Cov(X,Y)=0.
Portanto:

$Var(X+Y) = Var[X] + Var[Y]$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var\ (X + Y) = Var\ [X] + Var\ [Y]$$

O teorema acima pode generalizado para n variáveis aleatória Mutuamente independentes $X_1, \ldots X_n$ com constantes $a_1, \ldots a_n$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\ [X_i]$$

Ver também o slide 77

Processos Estocásticos

- Classificação de Estados:
  - Estado Alcançável (*reachable*): um estado s_j é um alcancável de um estado s_i se $p_{ij} > 0$.
  - Um sub-conjunto de estado S é definido com fechado (*closed*) se $\forall s_i \in S$, $p_{ij} = 0$, $\forall s_j \notin S$.
  - Um estado é absorvente se ele é o único membro de conjunto fechado de estados S.
  - Um conjunto fechado de estado S é dito irredutível se $p_{ij} > 0$ $\forall s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var\ (X - Y) = Var\ [X] + Var\ [Y]$$

Dado que $Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var\ [X_i]$

Pois $a_x = 1$ e $a_y = -1$

$$Var\ [X - Y] = a_x^2 Var\ [X] + a_y^2 Var\ [Y]$$

$$= (1)^2 Var\ [X] + (-1)^2 Var\ [Y]$$

$$= Var\ [X] + Var\ [Y]$$

Processos Estocásticos

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Observam-se dois aspectos associados a ausência de memória:
  1. Todo estado passado é irrelevante.
  2. O tempo que o processo passa em um estado é irrelevante.
- Processo Estocástico Semi-Markoviano é uma extensão de um processo Markoviano onde a restrição 2 é relaxada.

Processos Estocásticos

- Processo Estocástico é definido por um conjunto de variáveis aleatórias,

$\{X(t) : t \in T\}$, onde $X(t)$ é uma variável aleatória para cada $t \in T$.

t é denominado parâmetro e cada valor de $X(t)$ são estados.

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Tipos de Processos Estocásticos
  - Processos de espaço de estados e tempo discretos (*Discret Time Markov Chain* - DTMC)
  - Processos de espaço de estados contínuo e tempo discreto
  - Processos de espaço de estados discreto e tempo contínuo (*Continuos Time Markov Chain* - CTMC)
  - Processos de espaço de estados e tempo contínuos

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

Considere uma CTMC (não-homogênea) $\{X(t): t \geq 0\}$ com espaço de estado $\{0,1,2,\ldots\}$. Vamos usar i,j e k para denotar estados típicos e s,u e t para denotar parâmetro de tempo.

Para $0 \leq s \leq t$, considere $p_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$. Pode ser representada na forma matricial por $H(s,t) = [\ p_{ij}(s,t)]$

A equação de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u)\ p_{kj}(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Na forma matricial, temos:

$$H(s,t) = H(s,u)\ H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$H(s,t) = H(s,u)\,H(u,t);\ 0 \le s \le u \le t$

Substituindo u por t e t por $t+h$, então:

$H(s,t+h) = H(s,t)\,H(t,t+h)$

Subtraindo-se ambos os lados por $H(s,t)$, temos:

$H(s,t+h) - H(s,t) = H(s,t)\,[H(t,t+h) - I]$

Dividindo-se por h e aplicando-se o limite $h \to 0$, tem-se:

$$\lim_{h\to 0} \frac{H(s,t+h) - H(s,t)}{h} = H(s,t)\,\left[\lim_{h\to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}\right]$$

Levando à equação diferencial parcial $\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$ *(forward Kolmogorov eq.)*

Para cadeias homogêneas, tem-se:

$Q(t) = Q$ e $H(s,t) = \Pi(t)$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$ *(forward Kolmogorov eq.)*

Onde $Q(t) = \lim_{h\to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}$

Os elementos de $Q(t)$ são dados por

$q_{ii}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h}$

$q_{ij}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h}$ $i \ne j$

Continuos Time Markov Chain

- *Steady State Analysis*

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$ (homogêneas)

Em estado estacionário ($t\to\infty$), pode ser que

$\lim_{t\to\infty} \Pi(t) = \Pi(t)$ exista.

Caso exista, então $\sum_{si\in S} \pi_{si}=1$

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = 0$, então $\Pi Q = 0$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$1 - p_{ii}(t,t+h) = -hq_{ii}(t) + o(h)$

$p_{ij}(t,t+h) = hq_{ij}(t) + o(h)$

Onde $o(h)$ é uma função de converge para zero mais rápido que h.

Dado que $\sum_j p_{ij}(s,t) = 1,\ \forall\, i$, portanto:

$\sum_j q_{ij}(s,t) = 0,\ \forall\, i$

Ou seja, a soma de elementos de uma linha de Q é zero.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = 0$

$\sum_{si\in S} \pi_{si}=1$

Onde π_s fornece a *steady-state probability* de um sistema estar no estado s_i

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$

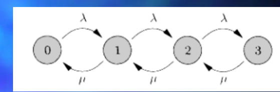
Onde $\pi(t)_{si}$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

Continuos Time Markov Chain

- Uma CTMC é dita irredutível se $p_{ij} > 0 \ \forall s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).
- Uma CTMC finita, irredutível e homogênea é dita ergódica (*ergodic*) se o vetor de probabilidade estacionária (*steady-state probability vector*) Π existe.

Continuos Time Markov Chain

- $\lambda = 0{,}2,$
- $\mu = 0{,}4$



- Utilização: $\rho \ = 1 - \pi\ (0) = \underline{0.4667}$
- Throughput $tp = \pi(1) \times \mu + \pi(2) \times \mu + \pi(3) \times \mu$

$tp = 0{,}2667 \times 0{,}4 + 0{,}1333 \times 0{,}4 + 0{,}0667 \times 0{,}4$

$tp = 0{,}18668$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = \underline{0} \qquad \sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

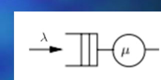
- **Métodos diretos**
  - Eliminação de Gauss
  - Decomposição LU
  - Método de Grassmann
- **Métodos Iterativos**
  - Power Method
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel

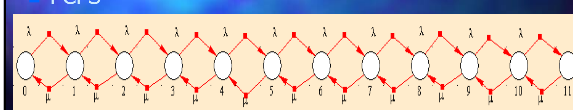
Continuos Time Markov Chain

Sharpe (chame via Desktop)

Exemplo

- Tamanho do buffer=11
- λ
- μ
- FCFS



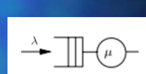


State probability of State i={0,1,…,11}
State_Prob(i):

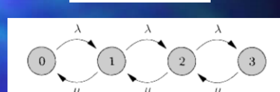
Continuos Time Markov Chain

Exemplo

- $\lambda = 0{,}2,$
- $\mu = 0{,}4$



$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$



$\pi(0) = \underline{0.5333}, \quad \pi(1) = \underline{0.2667}, \quad \pi(2) = \underline{0.1333}, \quad \pi(3) = \underline{0.0667}$

Continuos Time Markov Chain

- Métricas - Métricas de interesse pode ser calculadas através da soma ponderada das probabilidades de estado.
  - *Reward rate* em estado estacionário

$$E[Z] = \sum_i r_i \pi_i$$

  - *Reward rate* instantânea

$$E[Z(t)] = \sum_i r_i \pi_i(t)$$

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

Continuos Time Markov Chain

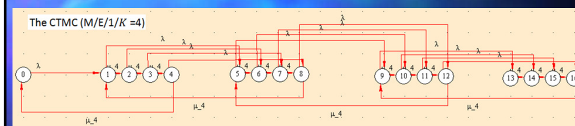
- Métricas – a probabilidade acumulada de que se esteja num estado é dada por:

$$\mathbf{L}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\pi}(u)\, d\, u$$

Portanto, $\mathbf{L}_i(t)$ tempo médio (esperado) que se permanece no estado i durante o intervalo [0,t).

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

Continuos Time Markov Chain



$\pi_0 = 5.06605425 \times 10^{-1}$	$\pi_5 = 2.42068626 \times 10^{-2}$	$\pi_{10} = 1.04731260 \times 10^{-2}$	$\pi_{15} = 3.95578062 \times 10^{-3}$
$\pi_1 = 9.01648794 \times 10^{-2}$	$\pi_6 = 3.04223846 \times 10^{-2}$	$\pi_{11} = 1.31936488 \times 10^{-2}$	$\pi_{16} = 5.95104472 \times 10^{-3}$
$\pi_2 = 8.01465589 \times 10^{-2}$	$\pi_7 = 3.49578293 \times 10^{-2}$	$\pi_{12} = 1.59621117 \times 10^{-2}$	
$\pi_3 = 7.12413851 \times 10^{-2}$	$\pi_8 = 3.81098122 \times 10^{-2}$	$\pi_{13} = 9.97433581 \times 10^{-4}$	
$\pi_4 = 6.33256751 \times 10^{-2}$	$\pi_9 = 7.97946839 \times 10^{-3}$	$\pi_{14} = 2.30657440 \times 10^{-3}$	

Data

Continuos Time Markov Chain

Exemplo

$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{TS} = 1$

$E[ST] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$

State probability of 0: 5.16129024e-001

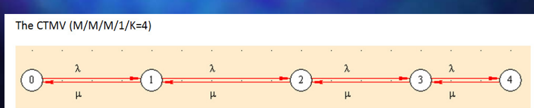
State probability of 1: 2.58064518e-001

State probability of 2: 1.29032262e-001

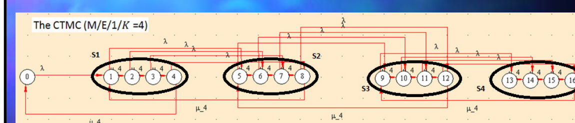
State probability of 3: 6.45161314e-002

State probability of 4: 3.22580656e-002

Utilization= 0.483871



Continuos Time Markov Chain



$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$E[TBA] = 0.05s$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{ST} = 0.5$

$E[ST] = 0.025s$

$\gamma = \left(\frac{0.025}{0.0125}\right)^2 = 4$

$\mu_E = \frac{4}{0.025} = 160$

$\pi_0 = 5.06605 \times 10^{-1}$

$\pi_{S1} = 3.04878 \times 10^{-1}$

$\pi_{S2} = 1.27697 \times 10^{-1}$

$\pi_{S3} = 4.76084 \times 10^{-2}$

$\pi_{S4} = 2.21877 \times 10^{-2}$

$Utilization = 0.493395$

Data

Continuos Time Markov Chain

Exemplo

$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$E[TBA] = 0.05s$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{ST} = 0.5$

$E[ST] = 0.025s$

Considering:

$\gamma = \left(\frac{E[ST]}{\sigma_{ST}}\right)^2$

$\mu_E = \left(\frac{\gamma}{E[ST]}\right)$

$\gamma = \left(\frac{0.025}{0.0125}\right)^2 = 4$

$\mu_E = \frac{4}{0.025} = 160$

Therefore, the ST is represented by a Erlang(γ =4, $\mu_E = 160$).

Continuos Time Markov Chain

Sharpe (chame via Desktop)

C:\Sharpe-Gui\ SHARPE GUI Examples \Markov\Degradable

Exemplo

Sistema Computacional com degradação

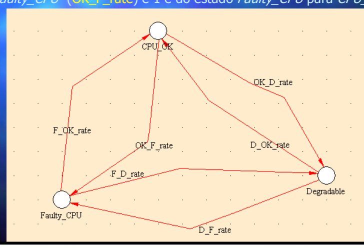
- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios: *CPU_OK*, *Degradable* e *Faulty_CPU*.

- As taxas entre os estados são: *CPU_OK* para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20, *Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.

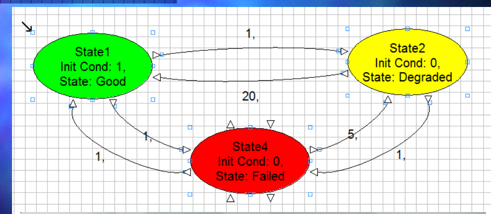
Continuos Time Markov Chain

Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios: *CPU_OK*, *Degradable* e *Faulty_CPU*. As taxas entre os estados são:
- *CPU_OK* para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20, *Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.



Continuos Time Markov Chain

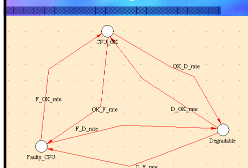


Markov Transitions

	Identifier	Description	Input State	Output State	Transition Reward	Rate	Cost
1	Transition1		State1	State2	Loss	1,000000	0,00
2	Transition2		State2	State1	Loss	20,000000	10,00
3	Transition3		State2	State4	Loss	1,000000	0,00
4	Transition4		State4	State2	Loss	5,000000	20,00
5	Transition5		State1	State4	Loss	1,000000	0,00
6	Transition6		State4	State1	Loss	1,000000	40,00

Continuos Time Markov Chain

Sistema Computacional com degradação



Rate Matrix

Matrix	CPU_OK	Degradable	Faulty_CPU
CPU_OK		OK_D_rate	OK_F_rate
Degradable	D_OK_rate		D_F_rate
Faulty_CPU	F_OK_rate	F_D_rate	

```
******************************************************************************
********* Outputs asked for the model: Degradable **************
Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5
Output:
Expected steady-state reward rate for Degradable
Exp_SS_Reward_Rate:  2.40322581e+001
```

```
******************************************************************************
********* Outputs asked for the model: Degradable **************
Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5, F_D_rate=10, OK_F_rate=1, F_OK_rate=1
Output:
State probability of CPU_OK
State_Prob:  1.20967742e-001
---------------------------------------
State probability of Degradable
State_Prob_0:  5.96774194e-001
---------------------------------------
State probability of Faulty_CPU
State_Prob_1:  2.82258065e-001
---------------------------------------
```

Reward configuration:

State input:

Name of the state: CPU_OK

Reward rate: 100

State	Reward
CPU_OK	100
Degradable	20
Faulty_CPU	0

```
******************************************************************************
********* Outputs asked for the model: Degradable **************
Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5, F_D_rate=10, OK_F_rate=1, F_OK_rate=1
Output:
Steady_State Availability for Degradable
SS_Avail:  7.17741935e-001
```

Up states:

CPU_OK
Degradable

Continuos Time Markov Chain

Steady State Results:

Result	Value
Availability	0,857143
Cost Per Unit Time	765,714286
MTBF	1,166667
MTTR	0,166667

Results at time 1000,000000:

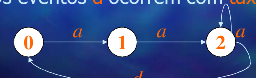
Result	Value
Availability	0,857143
Cost Per Unit Time	765,714286
Failure Rate	NA
Mean Availability	0,857163
Mean Cost	765,744808
Mean Unavailability	0,142837
Reliability	0,000000
Total Cost	765744,807972
Total Downtime	142,836554
Total Uptime	857,163446
Unreliability	1,000000

Time	Availability	Cost Per Unit Time	Failure Rate	Mean Availability	Mean Cost	Mean Unavailabi...	Reliability	Total Cost	Total Downtime	Total Uptime	Unreliabili
0	1,000000	1000,000000	1000000,000000	1,000000	1000,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,00000
100,00	0,857143	765,714286	NA	0,857349	766,019508	0,142651	0,000000	76601,950829	14,265126	85,734874	1,00000
200,00	0,857143	765,714286	NA	0,857246	765,866897	0,142754	0,000000	153173,379401	28,550840	171,449160	1,00000
300,00	0,857143	765,714286	NA	0,857211	765,816027	0,142789	0,000000	229744,807972	42,836554	257,163446	1,00000
400,00	0,857143	765,714286	NA	0,857194	765,790591	0,142806	0,000000	306316,236543	57,122269	342,877731	1,00000
500,00	0,857143	765,714286	NA	0,857184	765,775330	0,142816	0,000000	382887,665115	71,407983	428,592017	1,00000
600,00	0,857143	765,714286	NA	0,857177	765,765156	0,142823	0,000000	459459,093686	85,693697	514,306303	1,00000
700,00	0,857143	765,714286	NA	0,857172	765,757889	0,142828	0,000000	536030,522258	99,979412	600,020588	1,00000
800,00	0,857143	765,714286	NA	0,857169	765,752439	0,142831	0,000000	612601,950829	114,265126	685,734874	1,00000
900,00	0,857143	765,714286	NA	0,857166	765,748199	0,142834	0,000000	689173,379401	128,550840	771,449160	1,00000
1000,00	0,857143	765,714286	NA	0,857163	765,744808	0,142837	0,000000	765744,807972	142,836554	857,163446	1,00000

Continuos Time Markov Chain

Exemplo

- Suponha um sistema representado por um autômato estocástico, onde:
  - $S = \{0,1,2\}$
  - $E = \{a,d\}$
  - $f(0,a)=1$, $f(1,a)=2$, $f(2,a)=2$, $f(2,d)=0$
  - $\Gamma(0) = \{a\}$, $\Gamma(1) = \{a\}$, $\Gamma(2) = \{a,d\}$
  - Os eventos a ocorrem com taxa igual $= \lambda$,
  - Os eventos d ocorrem com taxa igual $= \mu$



State Transition Diagram

Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*

$\sum_{i \in S} \pi_{si} = 1$

$\Pi Q = 0$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)\, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$Q = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc|c} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 1 \\ \mu & 0 & -\mu & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \end{array}$$

$-\lambda \pi_0 + \mu \pi_2 = 0$

$\lambda \pi_0 - \lambda \pi_1 = 0$

$-\lambda \pi_1 - \mu \pi_2 = 0$

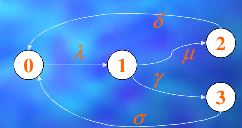
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$\pi_0 = \pi_1 = \mu / (2\mu + \lambda)$

$\pi_2 = \lambda / (2\mu + \lambda)$

Continuos Time Markov Chain

State Transition Rate Diagram



$$Q = \begin{array}{cc} \left|\begin{array}{cccc} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma+\mu) & \mu & \gamma \\ \delta & 0 & -\delta & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma \end{array}\right| & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} & \end{array}$$

$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

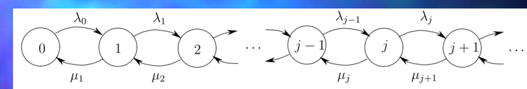
$\Pi\, Q = 0$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)\, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T = 1 / (\pi_0 \times \lambda)$ - Tempo médic entre finalizações

Continuos Time Markov Chain

Birth-death chain



$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \Rightarrow \mu_2\pi_2 = -\lambda_0\pi_0 + (\lambda_1+\mu_1)\pi_1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$$

$$\Rightarrow \pi_j = \left(\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdots\mu_j}\right)\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdots\mu_j}\right)}$$

Continuos Time Markov Chain

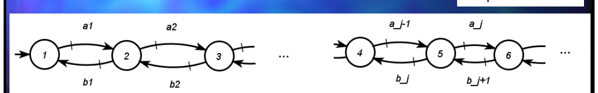
Birth-death chain

Considere o automata

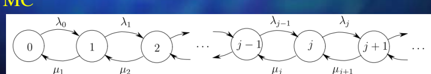
$f(i, a_i) = i + 1$

$f(i+1, b_i) = i$

enquanto $i > 0$



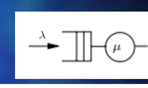
CTMC



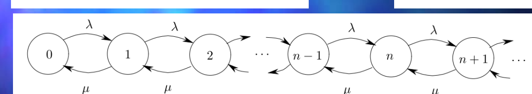
Continuos Time Markov Chain

QBM

M/M/1 queueing system



Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo i, tem-se:



$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}$$

Desde que $\lambda < \mu$

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Utilização

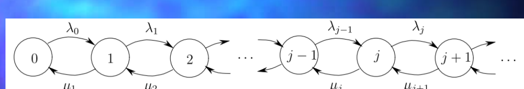
$\rho = \lambda/\mu$ $\quad 0 \le \rho < 1$

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1-\rho)$$

Continuos Time Markov Chain

Birth-death chain



$$-(\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0,$$

$$-\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0$$

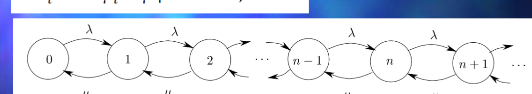
$$\sum_j \pi_j = 1$$

Continuos Time Markov Chain

QBM

M/M/1 queueing system

Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo i, tem-se:



Utilização

Desde que $\lambda < \mu$

$\rho = \lambda/\mu$ $\quad 0 \le \rho < 1$

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1-\rho)$$

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

QBM

Continuos Time Markov Chain

M/M/1 queueing system

Throughput

Desde que $\lambda < \mu$

O throughput é λ

Se $\lambda > \mu$

throughput é μ

Tamanho médio da fila

$E[X] = \dfrac{\rho}{1-\rho}$ $\quad 0 \le \rho < 1$

$E[X] \rightarrow \infty$ $\quad \rho \rightarrow 1$

Mean response time

$E[S] = \dfrac{1/\mu}{1-\rho}$ $\quad 0 \le \rho < 1$

$E[S] \rightarrow \infty$ $\quad \rho \rightarrow 1$

Mean waiting time

$E[W] = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

$E[W] \rightarrow \infty$

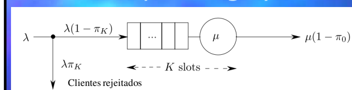
QBM

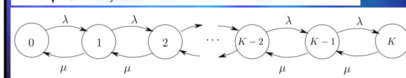
Continuos Time Markov Chain

M/M/1/K queueing system

$\pi_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$

$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n & \text{if } 0 \le n \le K \\ 0 & \text{if } n > K \end{cases}$





Utilização

Se $\lambda > \mu$ a utilização $\longrightarrow 1$

Se $\lambda < \mu$ a utilização $= \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Probabilidade de Descarte

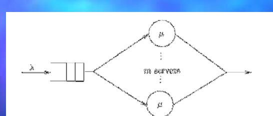
$P_D = \pi_K = (1-\rho)\dfrac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$

QBM

Continuos Time Markov Chain

M/M/n queueing system

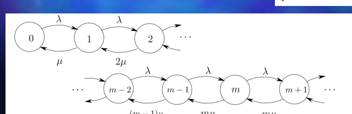
$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!} & n = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \dfrac{m^m}{m!}\rho^n & n = m, m+1, \ldots \end{cases}$



$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \dfrac{(m\rho)^n}{n!} + \dfrac{(m\rho)^m}{m!}\dfrac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$

Utilização

$\rho = \lambda / m\mu$



Throughput

Desde que $\lambda < \mu\, m$

O throughput é λ

Se $\lambda \ge \mu\, m$

throughput é μ

QBM

Continuos Time Markov Chain

M/M/1/K queueing system

Tamanho médio da fila

$E[X] = \dfrac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left[\dfrac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right]$

Mean response time

$E[S] = \dfrac{E[X]}{\lambda(1-\pi_K)}$

$\lambda(1-\pi_K)$- taxa de chegada dos clientes admitidos

QBM

Continuos Time Markov Chain

M/M/n queueing system

Tamanho médio da fila

$E[X] = m\rho + \dfrac{(m\rho)^m}{m!}\dfrac{\rho}{(1-r)^2}\pi_0$ $\quad \lambda < \mu\, m$

$E[X] \rightarrow \infty$ $\quad \lambda \ge \mu\, m$

Fórmula C de Erlang

Probabilidade de um cliente chegar e não encontrar o servidor disponível

Mean response time

$E[S] = \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{(m\rho)^m}{m!}\dfrac{\pi_0}{m(1-\rho)^2}$ $\quad \lambda < \mu\, m$

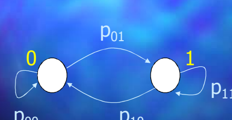
$E[S] \rightarrow \infty$ $\quad \lambda \ge \mu\, m$

$P_Q = P[X \ge m] = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n$

$P_Q = \dfrac{(m\rho)^m}{m!}\dfrac{\pi_0}{1-\rho}$

Discrete Time Markov Chain

- O comportamento de uma rede estocástica é representado por DTMC



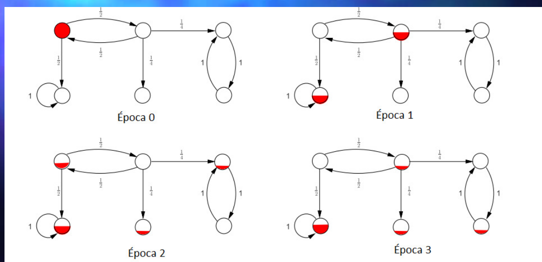
Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}$$

Discrete Time Markov Chain

Mathematica

- Evolução de uma DTMC

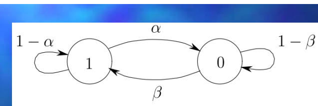


Discrete Time Markov Chain

Mathematica

Considere uma máquina que pode estar em um dos dois estados, UP ou DOWN, onde 1 denota UP e 0 denota DOWN. O estado do máquina é verificada a cada hora, e nós horas de índice k = 0, 1,. .

Consideremos que se a máquina estiver UP, tem uma probabilidade α de falhar durante a próxima hora. Se a máquina estiver no estado DOWN, tem probabilidade β de sere reparada durante a próxima hora.



$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Chamar o modelo C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl

Discrete Time Markov Chain

- Estado transiente: um estado é transiente se a probabilidade de não se retornar ao estado é diferente de zero.
- Estado recorrente (*recurrent*): o estado i é chamado de recorrente se a probabilidade de se sair de i e retornar a i é 1.
- MRT (*mean recurrence time*): $\mu_i = \sum_{i=1}^{n} n \times f_{ii}(n)$
  f_{ii} é a probabilidade de se retornar a *i* após *n* passos.

Discrete Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$A_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$
$A_2=(a_{21}\ a_{22}\ a_{23})$
$A_3=(a_{31}\ a_{32}\ a_{33})$

a_{ij} - probabilidade $\quad \sum_{si \in S} a_{ij}=1$

$\Pi \cdot P = \Pi$, $\sum_{si \in S} \pi_i=1$, onde π_i fornece o número relativo de visitas ao estado s_i

Chamar o modelo C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl

Discrete Time Markov Chain

- Estado recorrente:
  - um estado é classificado como recorrente não-nulo se $\mu_i < \infty$,
  - caso contrário é classificado como recorrente nulo (*recurrent null*).
- Um período (*d*) de uma estado recorrente *i* é definido por:

$$d(i) = MDC = \{\ n \mid p_{i,i}(n) > 0\}$$

Periodic DTMC

- Se d(i) =1, o estado i é aperiódico, se d(i)>1 é periódico.
- Um estado i é ergódico se é aperiódico e recorrente não-nulo.
- Uma DTMC é ergódica de todos os seus estados são ergódicos.

Discrete Time Markov Chain

Mathematica

- Soluções para Transiente

$\Pi(1)= \Pi(0)\ P$,
$\Pi(2)= \Pi(1)\ P = \Pi(0)\ P^2$

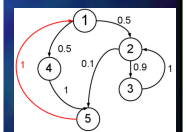
$\Pi(k)= \Pi(0)\ P^n$, k=1,2,...

Discrete Time Markov Chain

Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains

More specifically, the Control Flow Graph (CFG) of the application is mapped into an ergodic DTMC. In this approach, energy consumption as well as execution time are numerically evaluated.

```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else { //  <0.5>
     x = 0;
   }

}
```



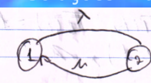
Modeling. Each basic block[1] B_i in the CFG is mapped into a state X_i in the DTMC. Similarly, control flow edges are mapped as transitions between states and are labeled by the state transition probabilities, as:

$$P(B_i, B_j) = Pr(B_i \text{ jumps to } B_j) \ ,$$

which defines the probability of executing B_j after B_i.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes (*Laplace Tranform*)



Find transient solution through LT.

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} + \lambda\pi_1(t) - \mu\pi_2(t) = 0 \quad \text{I}$$

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu\pi_2(t) - \lambda\pi_2(t) = 0 \quad \text{II}$$

by LT:

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} = s\,LT[\pi_1(t)] - \pi_1(0)$$

Discrete Time Markov Chain

Mathematica

Outro exemplo

Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains

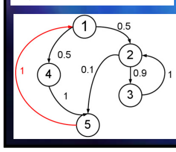
```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else { //  <0.5>
     x = 0;
   }

}
```

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \text{ for each } i.$$

Excel e abrir também o SHARPE:

C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\ext_dtmc.mkv)



$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$$

$$v_j = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

$$E = \sum_{\substack{b=all\\basic\\blocks}} v_b \times \Big(\sum_{\substack{c=all\\instruction\\classes}} I_{b,c} \times (e_c + O_b \times e_o)\Big)$$

$$T = \sum_{\substack{b=all\\basic\\blocks}} v_b \times \Big(\sum_{\substack{c=all\\instruction\\classes}} I_{b,c} \times (t_c + O_b \times t_o)\Big)$$

Continuos Time Markov Chain

Then, considering (I):

$$s\,LT[\pi_1(t)] - \pi_1(0) + LT[\lambda\,\pi_1(t)] = LT[\text{[illegible]}$$

$$s\,LT[\pi_1(t)] - 1 + LT[\lambda] \times LT[\pi_1(t)] = LT[\mu] \times LT[\text{[illegible]}$$

Stop here for a while.

Let's consider (II):

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu\pi_2(t) - \lambda\pi_1(t) = 0$$

We know that $\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$,
then: $\pi_1(t) = 1 - \pi_2(t)$, so:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu\pi_2(t) - \lambda(1 - \pi_2(t)) =$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$, $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Onde $\pi_{s_i}(t)$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

Métodos de Solução:

- Solução via Sistemas de Eq. Diferencial Ordinária
- Solução através de transformada de Laplace
- Runge-Kutta
- Uniformização (Transformar CTMC em DTMC)

Continuos Time Markov Chain

Applying LT:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = s\,LT[\pi_2(t)] - \pi_2(0)$$

As $\pi_2(0) = 0$, then:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = s\,LT[\pi_2(t)].$$

Hence:

$$s\,LT[\pi_2(t)] + LT[\mu\,\pi_2(t)] - LT[\lambda - \lambda\pi_2(t)] = 0$$

$$s\,LT[\pi_2(t)] + LT[\mu\,\pi_2(t)] - LT[\lambda] + LT[\lambda\,\pi_2(t)] = 0$$

Continuos Time Markov Chain

$s\,LT[\pi_2(t)] + \mu\,LT[\pi_2(t)] - \frac{\lambda}{s} -$

$\lambda\,LT[\pi_2(t)] = 0$

$s\,LT[\pi_2(t)] + (\mu+\lambda)\times LT[\pi_2(t)] - \frac{\lambda}{s} =$

$LT[\pi_2(t)](s+\mu+\lambda) = \frac{\lambda}{s}$

$$\boxed{LT[\pi_2(t)] = \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}}$$

$\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$

$LT[\pi_1(t) + \pi_2(t)] = LT[1]$

$LT[\pi_1(t)] + LT[\pi_2(t)] = \frac{1}{s}$

$LT[\pi_1(t)] = \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}$

Continuos Time Markov Chain

$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(\mu+\lambda)} + \frac{\lambda}{(s+\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}\right]$

$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\times\frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\times\frac{1}{s+\mu+\lambda}\right]$

$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)}$

Continuos Time Markov Chain

As $LT[\pi_2(t)] = \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}$,

then applying $L^{-1}[LT[\pi_2(t)]] =$

so:

$\pi_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right]$

We ma say that, there are A and B, that:

$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\mu+\lambda}\right]$

So $\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\mu+\lambda}$

$\lambda = A(s+\mu+\lambda) + Bs$

Continuos Time Markov Chain

$\pi_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(1+$

$\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$, $\therefore \neq \pi_2(t)$

$\pi_1(t) = 1 - \pi_2(t)$, then

$\pi_1(t) = 1 - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(1+e^{-(\mu+\lambda)t}$

$\pi_1(t) = \frac{\mu+\lambda-\cancel{\lambda}}{\mu+\lambda}(1+e^{-(\mu+\lambda)t}$

Continuos Time Markov Chain

$\lambda = s(A+B) + A(\mu+\lambda)$

for $s=0$

$$\boxed{A = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$$

then

$\lambda = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(s+\mu+\lambda) + Bs$

$\lambda = \frac{\lambda s}{\mu+\lambda} + \lambda\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right) + B\cancel{s}$

$\lambda = \frac{\lambda s}{\mu+\lambda} + \lambda\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu+\lambda}\right) + Bs$

$$\boxed{B = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$$

Continuos Time Markov Chain

$$\boxed{\pi_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}$$

$$\boxed{\pi_2(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$, $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$

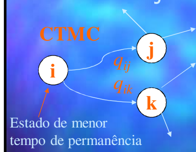
Pela série de Taylor/MacLaurin, temos:

$e^{Qt}= I + Qt/1! + (Qt)^2/2! + (Qt)^3/3! + \ldots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

Sabe-se também que:

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

Em todos os estados na CMTC que tiverem tempo de permanência igual a $1/(-q_{ii})$, não teremos transição (auto-laço) na DTMC. Para os estados que tiverem tempo de permanência maior, ou seja uma época não é longa o suficiente, estes estados devem ser revisitados (auto-laço).

Tempo de permanência no estado i:

$\Delta t =1/(-q_{ii}) = 1/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

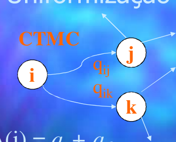
$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

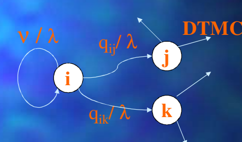
- Problemas de arrendodamento ocorrem devido aos valores positivos e negativos que Q contém.
- A matriz $(Qt)^k$ se torna não-esparsa o que requer capacidade muito maior.

Para evitar estes problemas aplica-se o método chamado de uniformização (ou aleatorização - *Randomization*) também chamado de método de Jensen

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização





$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$

Sabe-se também que:

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização

$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ii}|\}$

Sabe-se também que:

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

Considere que tomemos uma taxa uniforme $\lambda \geq \Lambda(i)$ onde:

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$ $(\lambda - \Lambda(i) = \nu)$

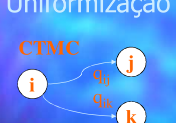
e $\nu \geq 0$ é a taxa de arbitrária de um evento fictício que não muda o estado *i*.

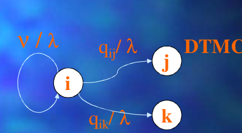
Tempo de permanência no estado i:

$1/(-q_{ii}) = 1/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização





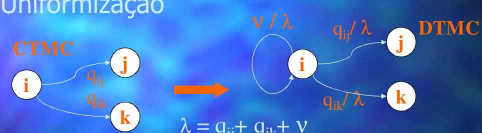
- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{-q_{ij}\}$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$

$\lambda \geq \max_{\forall i \in S}\{-q_{ij}\}$

Outra interpretação:

Considerando $1/\lambda = \Delta t$ como uma época (time-step), $P = I + Q\,\Delta t$ que é igual aos dois primeiros termos da expansão de Taylor, portanto a cadeia uniformizada é uma aproximação de primeira ordem da CTMC.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n! \;, \quad n \in \aleph$$

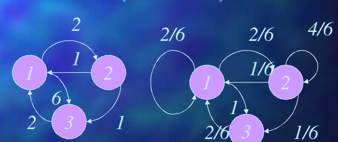
$$\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n! \;, \quad n \in \aleph$$

$$\Pi(t)=\Pi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)P^n \;, \quad n \in \aleph$$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização
- $Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{\forall i \in S}\{|q_{ij}|\}$



Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \Pi(0)P^n \;, \quad n \in \aleph$$

Uma solução iterativa:

$$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n) \;, \quad n \in \aleph$$

$$\hat{\Pi}(0)= \Pi(0), \quad \hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P \;, \quad n \in \aleph$$

Podemos truncar a série de maneira que a se atinja uma exatidão $1-\varepsilon$ (ε = erro).

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)e^{\lambda(P - I)t}$$

$$= \Pi(0)e^{\lambda Pt} e^{-\lambda It} = \Pi(0)e^{\lambda Pt} e^{-\lambda t} =$$

$$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} e^{\lambda Pt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n! =$$

$$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n! \;, \quad n \in \aleph$$

Na matriz P os valores estão entre 0 e 1. Não há valores negativos, o que evita os erros de arrendodamento que ocorrem na expansão com a matriz Q.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\tilde{\Pi}(t)=\sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n) \;, \quad n \in \aleph$$

$$|| \Pi(t)- \tilde{\Pi}(t)||_{\infty} = ||[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n!] \; -$$

$$[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda Pt)^n/n! \,]||_{\infty} \leq$$

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! \leq \varepsilon$$

A desigualdade ocorre, pois $[P^n]_{ij}$ são menores ou iguais a um.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

Dado que $\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$ é uma distribuição discreta (Poisson), portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n) = 1 = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n) + \sum_{n=ke+1}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\ ,\ n \in \aleph$$

Do slide anterior, tem-se:

$\boxed{\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \le \varepsilon}$ Desta forma:

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! = [1 - e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{ke}(\lambda t)^n/n!] \le \varepsilon$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \ge (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transiente

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! = [1 - e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{ke}(\lambda t)^n/n!\ ] \le \varepsilon$$

$$\sum_{n=0}^{ke} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \ge 1-\varepsilon \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \ge (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Para $t = 0.1$, tem-se: $(1-\varepsilon)\, e^{\lambda t} = (1-10^{-4})\, e^{0.6} = 1{,}8219$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \ge (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

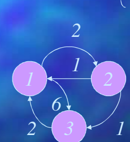
$$\sum_{n=0}^{4} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8214,$$

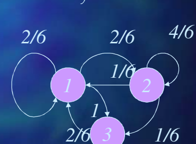
$$\sum_{n=0}^{5} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8221,$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \ge \max_{\forall s_i \in S}\{|q_{ij}|\}$





- *Considere $\varepsilon = 10^{-4}$*

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n! \qquad ,\ n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\tilde{\Pi}(t) = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n)\ ,\ n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0{,}1 \Rightarrow ke = 5$ Portanto:

$\hat{\Pi}(0) = \Pi(0) = (1,0,0)$ obtêm-se:

$\hat{\Pi}(1)$, $\hat{\Pi}(2)$, $\hat{\Pi}(3)$, $\hat{\Pi}(4)$, $\hat{\Pi}(5)$ através de

$\hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n!$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \Sigma_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-0.6} (0.6)^n]/n!$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \Sigma_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \Sigma_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = (0.71, 0.1502, 0.1268)$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n!$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\psi(0.6,0) = [e^{-0,6} (0,6)^0/0!]$

$\psi(0.6,1) = [e^{-0,6} (0,6)^1/1!]$

$\psi(0.6,2) = [e^{-0,6} (0,6)^2/2!]$

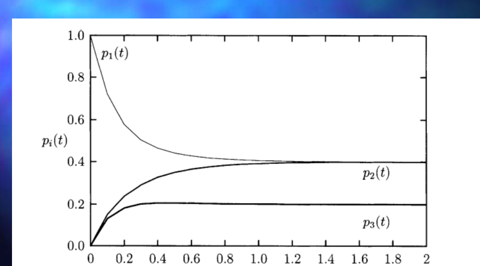
$\psi(0.6,3) = [e^{-0,6} (0,6)^3/3!]$

$\psi(0.6,4) = [e^{-0,6} (0,6)^4/4!]$

$\psi(0.6,5) = [e^{-0,6} (0,6)^5/5!]$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)



Semi-Markovian Chain (SMC)

- Considere uma DTMC, contudo também considere um tempo de permanência (no domínio contínuo: $t \in \mathbb{R}$), em cada estado $i \in S$ da DTMC, com distribuição $F_i(t)$ e densidade $f_i(t)$.
- Este modelo é denominado SMC.

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Encontre a solução estacionária para DTMC embutida (caracterizada por P):
    - $\Omega P = \Omega$
    - $\Sigma_{\forall i \in S}\ \omega_i = 1$
  - Calcule o tempo médio de permanência (h_i) em cada estado i:
    - $h_i = \int_0^{\infty} t\, f_i(t)dt$

Semi-Markovian Chain (SMC)

- SMC é caracterizada por:
  - matriz de probabilidade de 1 passo (P),
  - vetor de probabilidade inicial ($\Pi(0)$) e
  - o vetor de distribuições de permanência nos estados ($F(t) = (F_1(t),\ldots,F_i(t),\ldots,F_{|S|}(t))$).

Semi-Markovian Chain (SMC)

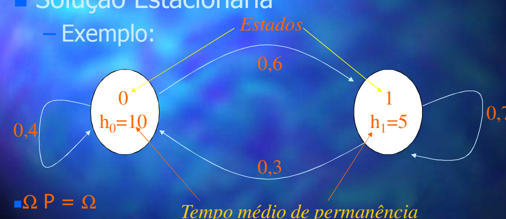
- Solução Estacionária
  - A probabilidade de estado estacionário da SMC é obtida por:
    - $\pi_i = (\omega i \times h_i)/\ (\Sigma_{\forall j \in S}\ \omega_j \times h_j),\ \ \forall i$
  - Em muitas aplicações, h_i é fornecido diretamente.
- Solução transiente é mais sofisticada.

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Interpretação
  - Em cada instante em que ocorrem mudanças de estados, a SMC tem comportamento igual ao da correspondente DTMC (comportamento descrito por P) e é independente do passado.
  - Quando se alcança um estado i, um tempo distribuído conforme $F_i(t)$ deve se passar para que ocorra nova transição entre estados.

Semi-Markovian Chain (SMC)

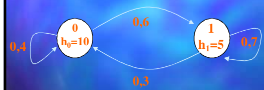
- Solução Estacionária
  - Exemplo:



- $\Omega P = \Omega$
- $\Sigma_{\forall i \in S}\ \omega_i = 1$
- $h_0=10,\ h_1=5$

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:



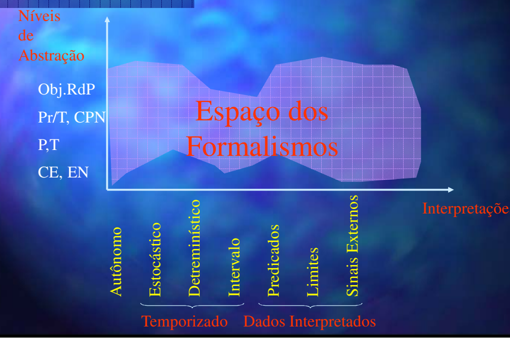
Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ \hline 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1 \end{array}$$

- $\Omega P = \Omega$
- $\Sigma_{\forall i \in S}\ \omega_i = 1$
- $h_0=10,\ h_1=5$

$\rightarrow$
- $\omega_0=0{,}5385$
- $\omega_1=0{,}4615$

Redes de Petri



Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:

Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ \hline 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1 \end{array}$$

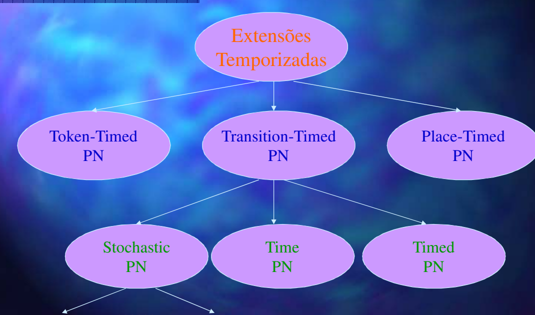
- $\omega_0=0{,}5385$
- $\omega_1=0{,}4615$

- $\pi_i = \dfrac{(\omega i \times h_i)}{(\Sigma_{\forall j \in S}\ \omega_j \times h_j)}, \forall i \in S$

$$\pi_0 = \frac{(0{,}5385 \times 10)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)}$$

$$\pi_1 = \frac{(0{,}4615 \times 5)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)}$$

Redes Temporizadas



Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:

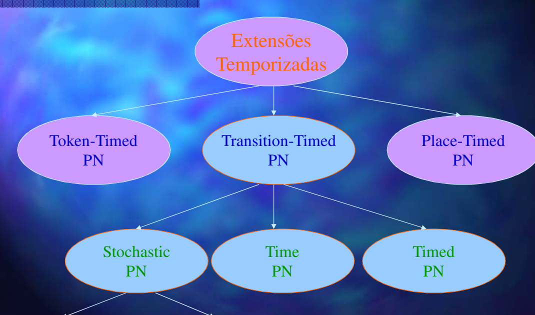
Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ \hline 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1 \end{array}$$

$$\pi_0 = \frac{(0{,}5385 \times 10)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)} = 0{,}7$$

$$\pi_1 = \frac{(0{,}4615 \times 5)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)} = 0{,}3$$

Redes Temporizadas



Redes Temporizadas

- Ramchandani, 1973 - Transition Timed Net
- Merlin, 1976 - Transition Time Net
- Sifakis, 1977 - Place Timed Net

Redes Temporizadas Estocásticas

- Natkin -1980
- Molloy - 1981
- Marsan et al. - 1984

É uma rede temporizada onde o *delay* associado à transição é uma variável aleatória de distribuição exponencial

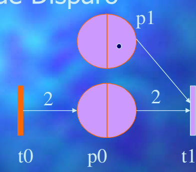
Redes Temporizadas

- Redes de Petri com Lugares Temporizados (PTPN) (Sifakis77)
- Definição: PTPN=$(P,T,F,K,W,M_0,\Gamma,\upsilon)$, onde

P é o conjunto de lugares,
T o conjunto de transições,
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ uma relação que representa os arcos
W – Valoração (peso dos arcos) - $W: F \rightarrow N$
M_0- Marcação inicial - $M_0:P \rightarrow N$
$\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_i,\ldots\}$ números reais denominada base de tempo.
$\upsilon:P \rightarrow \Gamma$ um mapeamato que $\upsilon(p) = \gamma_j$

Redes Temporizadas - PTPN -

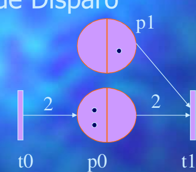
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$

Redes Temporizadas - PTPN -

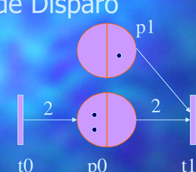
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=0

Redes Temporizadas - PTPN -

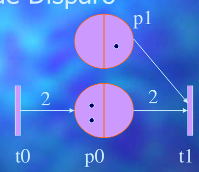
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=1

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regra de Disparo



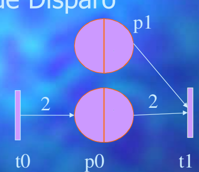
$\upsilon(p0) = 3$ Instante=2

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Pode ser representada por uma rede com disparo atômico
    - Modelo mais compacto
    - O estado é uma informação mais complexa do que o modelo não-temporizado
  - Disparo atômico
    - Pode representar o modelo com duração
    - O conjunto de marcações alcançáveis é um sub-conjunto das marcações do modelo não-temporizado.

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=3

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Regras de Seleção:
    - Pré-seleção: (duração e *delay*)
      - Prioridade
      - Probabilidade
    - *Race* (corrida): (*delay*)
      - Transições habilitadas com menor *delay* são disparadas

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

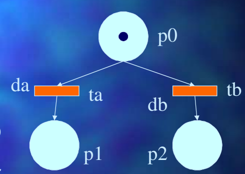
- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Marcas são consumidas dos lugares de entrada
    - Há uma duração
    - Marcas são geradas no lugares de saída
  - Disparo atômico
    - As marca permanecem nos lugares de entrada pelo período igual ao *delay* associada à transição. Após o *delay* as marcas são consumidas e geradas nos lugares de saída imediatamente.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Quando uma das transições conflitantes é desabilitada pelo disparo da outra, o que acontece com o *timer* da que ficou desabilitada quando a mesma tornar-se habilitada outra vez?

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Como fica a memorização do tempo de habilitação anterior?
- *Continue*
  - O *timer* associado à transição mantem o valor atual e quando a transição se tornar novamente habilitada o valor do *timer* iniciará daquele valor.
- *Restart*
  - Quando a transição for novamente habilitada o *timer* será re-iniciado.



Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Enabling Memory*
    - Após cada disparo os *timers* das transições que ficaram desabilitadas são re-iniciados (*restart*)
    - As transições que permaneceram habilitadas com o disparo matêem seus valores presentes(*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - O que acontece com o *timer* das transições habilitadas após o disparo de uma transição?
    - Todas as transições. Não somente as transições conflitantes.

•Algumas políticas de memória podem ser construídas

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

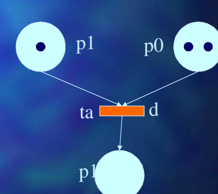
- Conceitos Básicos:
  - *Age Memory*
    - Após cada disparo os *timers* de todas as transições são mantidos em seus valores presentes (*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Resampling*
    - Após cada disparo os *timers* de TODAS as transições são re-iniciado (*restart*)
    - Não há memória
    - Após descartar todos os *timers*, os valores iniciais são associados a todas as transições que se tornarem habilitadas na nova marcação.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Grau de Habilitação (*Enabling Degree*)
    - É o número de vezes que uma determinada transição pode ser disparada, numa determinada marcação, antes de se torna desabilitada.
    - Quando o grau de habilitação é maior que um, atenção especial à semântica de temporização deve ser considerada.

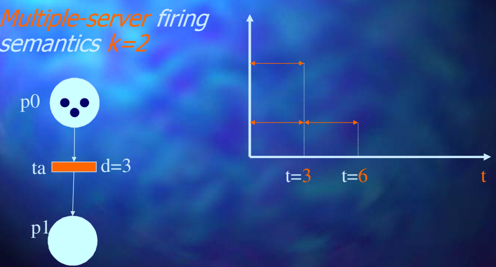


Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Semântica de Temporização
    - *Single-server firing semantics*
    - *Infinite-server firing semantics*
    - *Multiple-server firing semantics*
      - K é o máximo grau de paralelismo. Quando k→∞ , *Multiple-server firing semantics* é igual a *infinite-server firing semantics.*

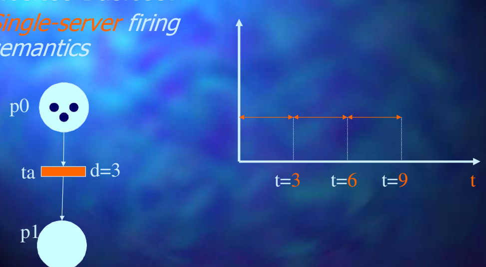
Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Multiple-server firing semantics k=2*



Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

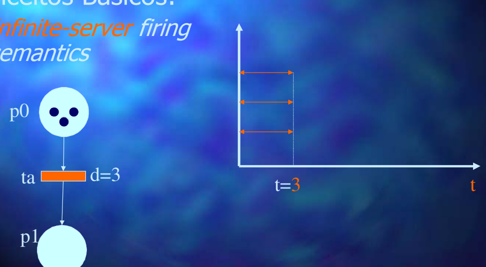
- Conceitos Básicos:
  - *Single-server firing semantics*



Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Infinite-server firing semantics*



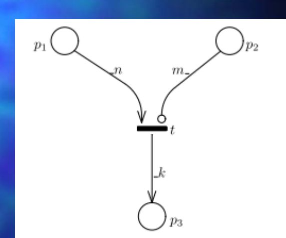
Redes com Arco Inibidor

- Definição:
  $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

H : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

M_0- Marcação inicial – M_0: P → ℵ



Redes com Prioridade

- Definição:

PN=(P,T,I,O,H,Π,M_0)

P,T,I,O definidos como usualmente.

H : P×T → $\aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

Π : T → $\aleph$ é uma função que mapeia às transições níveis de prioridade.

M_0- Marcação inicial - M_0: P → $\aleph$

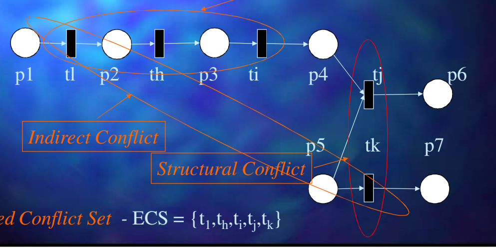
Redes Estocásticas

$$SPN = (P, T, I, O, H, \Pi, G, M_0, Atts)$$

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ is the set of places,
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ is the set of transitions,
$I \in (\mathbb{N}^n \to \mathbb{N})^{n\times m}$ is a matrix of marking-dependent multiplicities of input arcs
$O \in (\mathbb{N}^n \to \mathbb{N})^{n\times m}$ is a matrix of marking dependent multiplicities of output arcs.
$H \in (\mathbb{N}^n \to \mathbb{N})^{n\times m}$ is a matrix of marking-dependent inhibitor arcs.

Redes com Prioridade

- PN=(P,T,I,O,H,Π,M_0)



Extended Conflict Set - ECS = $\{t_l, t_h, t_i, t_j, t_k\}$

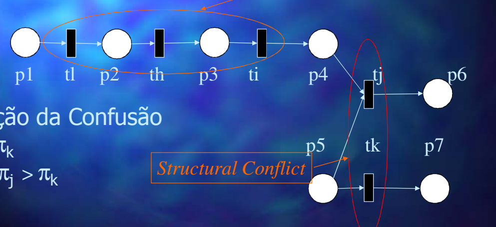
Redes Estocásticas

$$SPN = (P, T, I, O, H, \Pi, G, M_0, Atts)$$

$\Pi \in \mathbb{N}^m$ is the priority vector
$G \in (\mathbb{N}^n \to \{true, false\})^m$ is the guard vector
$M_0 \in \mathbb{N}^n$ is the initial marking vector
$Atts = (Dist, W, Markdep, Policy, Concurrency)^m$
$Dist \in \mathbb{N}^m \to \mathcal{F}$ is a firing probability distribution
$W : T \to \mathbb{R}$ is a function that assigns weight to imediate transitions and delay to time timed transitions
$Markdep \in \{constant, enabdep\}$
$Policy \in \{prd, prs\}$ is the preemption policy
$Concurrency \in \{ss, is\}$

Redes com Prioridade

- PN=(P,T,I,O,H,Π,M_0)



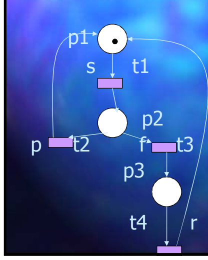
Remoção da Confusão

- $\pi_l = \pi_k$
- $\pi_h, \pi_i, \pi_j > \pi_k$

Redes Estocásticas

- Definição:

SPN=(P,T,I,O,W,M_0)



P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

I: P×T → $\aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,

O : P×T → $\aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições

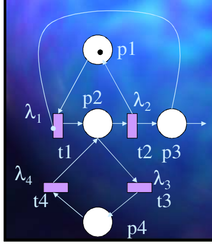
W : T → $\Re^+$ (ou W : T×M → $\Re^+$) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

M_0- Marcação inicial - M_0: P → $\aleph$

Redes Estocásticas

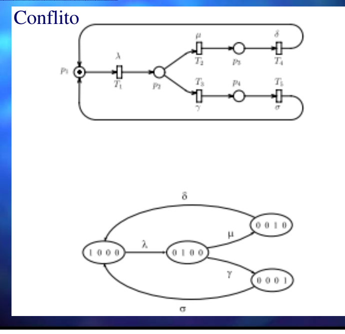
- Definição:

SPN=(P,T,I,O,H,W,M_0)

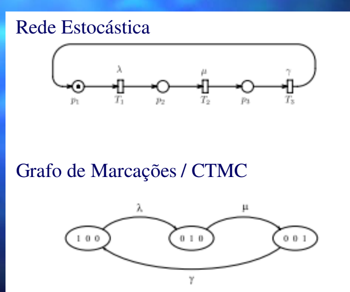


P é o conjunto de lugares,
T o conjunto de transições,
I: P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,
O : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições
H : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores
W : T → $\Re^+$ (ou W : T×M → $\Re^+$) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições
M_0- Marcação inicial - M_0: P → ℵ

Redes Estocásticas

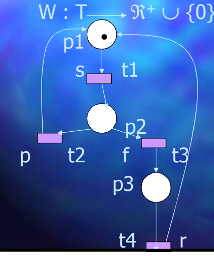


Redes Estocásticas

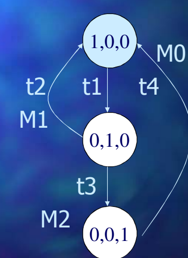


Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  W : T → $\Re^+ \cup \{0\}$



- Grafo de Marcações



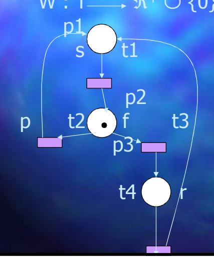
Redes Estocásticas

Semântica de Disparo de Transição

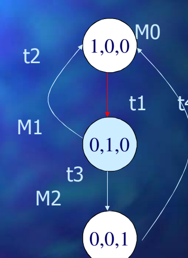
- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
  - Regras de habilitação
    M[t_j > ,   M(pi) ≥ I(pi, t_j)
    ∀ pi ∈ P
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- *Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo
  Se M[t_j >M'
  M'(pi)=M0(pi) - I(pi, t_j)+O(pi, t_j), ∀ pi ∈ P

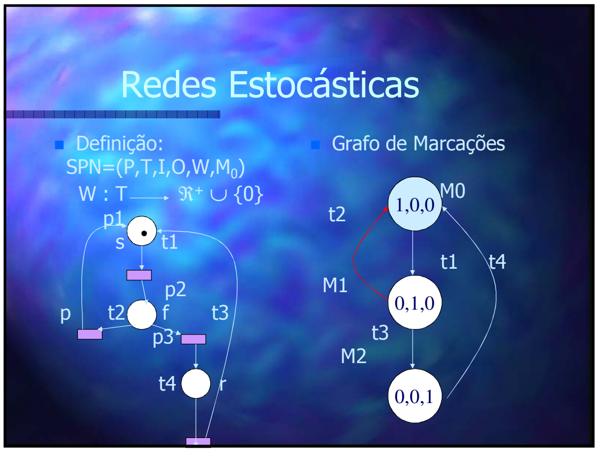
Redes Estocásticas

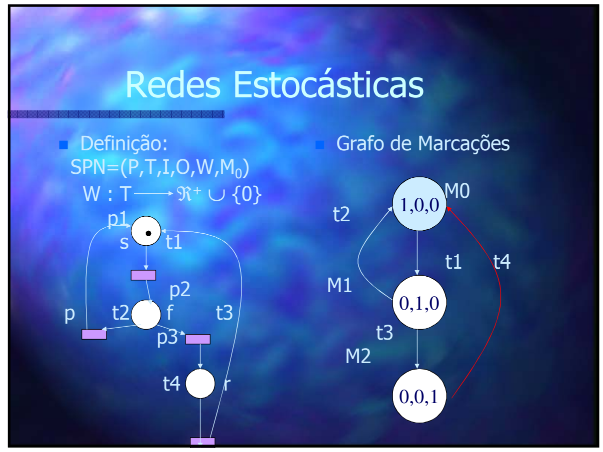
- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  W : T → $\Re^+ \cup \{0\}$

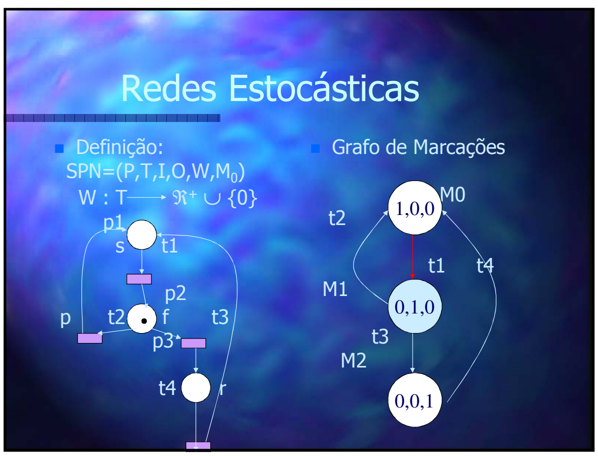


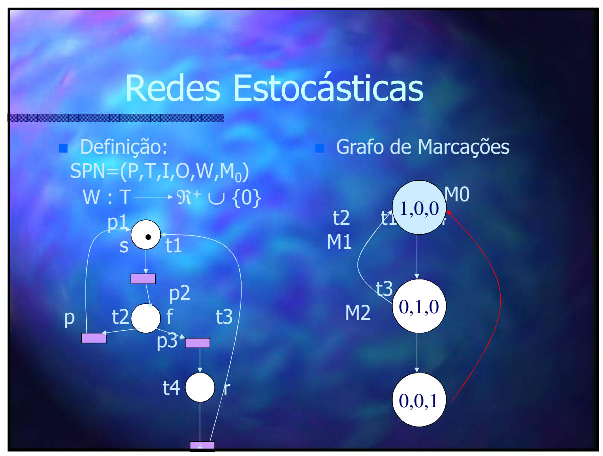
- Grafo de Marcações

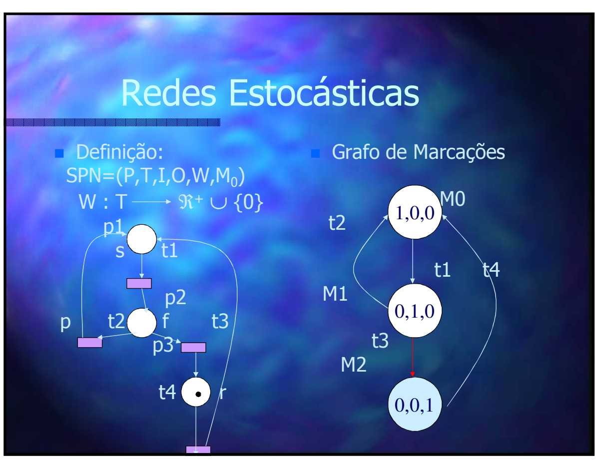


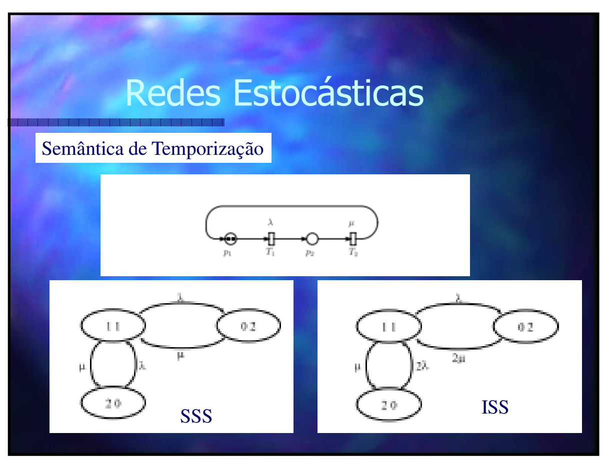

Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1 s t1 p2 p t2 f t3 p3 t4 r
Grafo de Marcações
1,0,0 M0
t2 t1 t4
M1 0,1,0
t3
M2 0,0,1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1 s t1 p2 p t2 f t3 p3 t4 r
Grafo de Marcações
1,0,0 M0
t2 t1 t4
M1 0,1,0
t3
M2 0,0,1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1 s t1 p2 p t2 f t3 p3 t4 r
Grafo de Marcações
1,0,0 M0
t2 t1 t4
M1 0,1,0
t3
M2 0,0,1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1 s t1 p2 p t2 f t3 p3 t4 r
Grafo de Marcações
1,0,0 M0
t2 t1
M1
t3
M2 0,1,0
0,0,1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1 s t1 p2 p t2 f t3 p3 t4 r
Grafo de Marcações
1,0,0 M0
t2 t1 t4
M1 0,1,0
t3
M2 0,0,1


Redes Estocásticas
Semântica de Temporização
SSS
ISS

Redes Estocásticas

- Em geral, a CTMC associada a uma SPN é obtida da seguinte maneira:
  - O espaço de estados $S = \{s_i\}$ corresponde ao *reachability set* $RS(N,M_0) = \{M_i\}$ da rede marcada N.
  - As *transition rates* de cada estado s_i (corresponde a marcação M_i) para cada estado s_j (M_j) são obtidas pela soma de todas as *firing rates* associadas às transições que estão habilitadas em M_i e cujo disparo levam a M_j.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Semântica de Disparo de Transição

- Regras de habilitação
  $M[t_j >$, $M(pi) >= I(pi, t_j)$ e $M(pi) < H(pi, t_j)$ $\forall$ pi $\in$ P
- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- Transições imediatas disparam instantaneamente com prioridades sobre as temporizadas
- Diferentes níveis de prioridade podem ser associados às transições imediatas.
- Transições imediatas com mesmo nível de prioridade associada disparam de acordo com o peso associado a cada uma.
- *Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo
  Se $M[t_j > M'$
  $M'(pi)=M0(pi) - I(pi, t_j)+O(pi, t_j)$, $\forall$ pi $\in$ P

Redes Estocásticas

- Assumindo-se que todas as transições operam em *Single Server Semantics* (SS) e taxas (*rates*) independentes da marcação, tem-se:
- $q_{ij} = \begin{cases} \sum_{tk \in ej(Mi)} \omega_k & i \neq j \\ -q_i & i = j \end{cases}$

onde $Q = [q_{ij}]$ gerador infinitesimal (matriz de taxas)

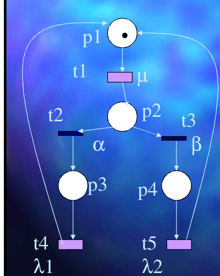
$q_i = \sum_{tk \in e(Mi)} \omega_k$

ω_k é a taxa de disparo de t_k.

$e_j(M_i) = \{t_k \mid t_k \in e(M_i) \wedge M_i[t_k>M_j\}$ é o conjunto de transições que estão habilitadas em M_i e cujo disparo levam a M_j.

$e(M_i)$ conjunto de transições habilitadas em M_i.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



Reachability Set

$RS = VS \cup TS$

$VS \cap TS = \varnothing$

VS – *Vanishing set:*

Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

TS – *Tangible set:*

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Definição:

$GSPN=(P,T,I,O,H,\Pi,W,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

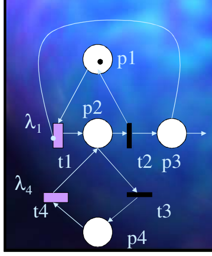
$\Pi : T \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ for temporizada} \\ \aleph^+ & \text{se } t \text{ for imediata} \end{cases}$ (Prioridade)

$W : T \rightarrow \Re^+$ (ou $W : T \times M \rightarrow \Re^+$) é

1. uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições temporizadas e

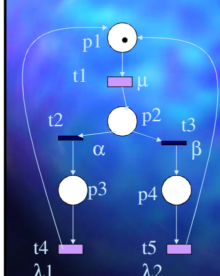
2. pesos usados na computação das probabilidades de disparo das transições imediatas

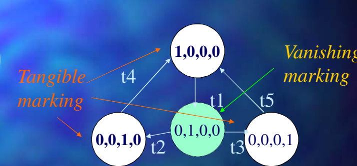
M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$



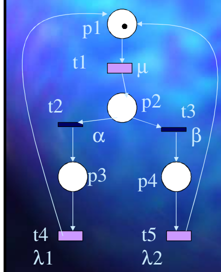
Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações





Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



$P\{t_k|m_j\} = \omega_k/q_j$

$q_j = \sum_{tk \in e(Mi)} \omega_k$

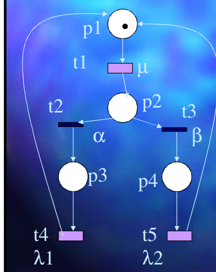
ω_k é a taxa de disparo de t_k.

$e(M_j)$ conjunto de transições habilitadas em M_j.

Quando a marcação é *vanishing*, ω_k é um peso (transição imediata).

Quando a marcação é *tangible*, ω_k é a taxa.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



Reachability Set

$RS = VS \cup TS$

$VS \cap TS = \varnothing$

VS – *Vanishing set:*

Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

TS – *Tangible set:*

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

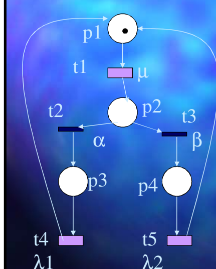
Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

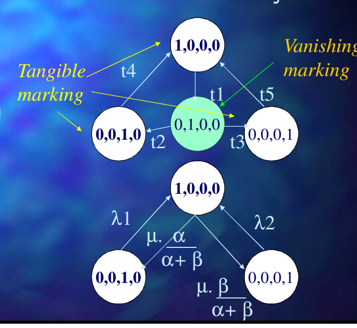
Assumindo a ausência de confusão, o cálculo do ECS consiste em particionar as transições imediatas em conjuntos os quais as transição de cada conjunto possam estar em conflito.

Contudo, transições de diferentes ECS são concorrente.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



- Grafo de Marcações



Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

Quando transições de um único ECS são as únicas imediatas

$P\{t_k|m_j\} = \omega_k/w_k(m_j)$

$w_k(m_j) = \sum_{tj \in [ECS(tk) \wedge e(Mj)]} \omega_j$

Os pesos podem ser diferentes em diferentes marcações, mas a relação entre estes pesos é constante (sem confusão)

Redes Estocásticas

- Para garantir a existência de probabilidade estacionária, a rede deve ser:
- limitada *(bounded)*
- reversível e
- livre de bloqueio *(deadlock-free)*

$\Pi Q = 0, \sum_{Mi \in RS(N)} \pi_i = 1$

Probabilidade estacionária de uma marcação M_i

$(\pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_n)\, Q = (0, \ldots, 0, \ldots, 0)$

$\sum_1^n \pi_i = 1$

Redes Estocásticas

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \text{ , } \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$$

Redes Estocásticas

- Tempo de permanência numa marcação *(sojourn time)*

$$tm_j = 1/\lambda_j$$

$\lambda_j= \Sigma_{t\in Tj}\, \lambda_t$

$T_j = \{t \mid M_j\,[t>\}$

λ_t é a taxa associada a transição t através da W

Redes Estocásticas

- Dada $M_j \in TS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k (t_k está habilitada em M_j) em M_j é:

  $p(t_k,M_j)= \lambda_k/\lambda_j$, $\lambda_j= \Sigma_{t\in Tj}\, \lambda_t$

  $T_j = \{t \mid M_j\,[t>\}$

  λ_t é a taxa associada a transição t através da W

Redes Estocásticas

- Probabilidade que um lugar p_j tenha k marcas

$$p(pj,k) = \Sigma_{i\in S1}\, p_i$$

$S_1 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i(p_j)=k\}$

- Número esperado de marcas no lugar p_j

$$Em(p_j) = \sum_{x=1}^{K} x \,.p(pj,x)$$

K é o número máximo de marcas que o lugar pj pode conter

Redes Estocásticas

- Dadas $M_i \in VS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k em M_i é:

$$p(t_k,M_i)= \omega_k/\omega_k(M_i),$$

$$\omega_k(M_i)= \Sigma_{tj\in \{ECS(tk)\, \wedge\, Mi\, [tj>\}}\, \omega_j$$

ECS(tk) – *Extended Conflict Set*

$\omega_k(M_i)$ o peso associado à transição t_k na marcação M_i.

Caso haja mais de uma transição imediata, de diferentes ECS, habilitadas em uma marcação M, não importa a ordem de disparo, desde que a rede seja livre de confusão.

Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição temporizada

$$TR(t_j) = \Sigma_{i\in S2}\, p_i \,.\, \lambda_j$$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- λ_j é a taxa associada à transição t_j

Redes Estocásticas

- Tempo médio entre disparos de uma transição

$T = 1/TR(t_j) = 1/(\sum_{i \in S2} p_i \cdot \lambda_j)$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

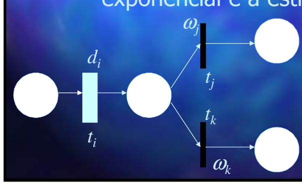
- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- λ_j é a taxa associada à transição t_j

Redes Estocásticas

- *Tempo médio de espera em um lugar*
  - $Wait(p_i) = \dfrac{Em(p_i)}{\sum_{tj \in I(pi)} TR(t_j)} = \dfrac{Em(p_i)}{\sum_{tj \in O(pi)} TR(t_j)}$
  - $Em(p_i)$ é o número médio de marcas no lugar p_i.
  - $TR(t_j)$ *throughput* da transição t_j.

Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição imediata
  - Pode ser calculada de uma transição exponencial e a estrutura do modelo GSPN.



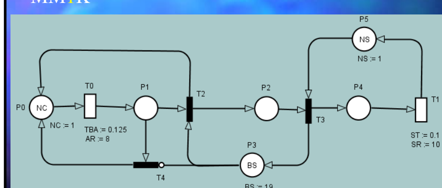
$TR(t_j) = TR(t_i) \times (\omega_j / \omega_j + \omega_j)$

tj e tk são as únicas transições de um ECS.

Redes Estocásticas

Representação explícita do descarte

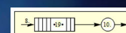
MM1K



Utilization = P{#P5=0}
Throughput = E{#P4}*TBA
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P4}
MST = (E{#P2}+E{#P4})*(1/AR)*(1-(P{(#P2=BS) AND (#P4=NS)}))
MQT = E{#P2}*(1/AR)*(1-(P{(#P2=BS) AND (#P4=NS)}))
DiscardProb = P{(#P2=BS) AND (#P4=NS)}
DiscardRate = P{(#P2=BS) AND (#P4=NS)}*AR

Utilization = 0.798138153086
Throughput = 0.099767269136
MQS = 3.00636792093
MSS = 3.804506074016
MST = 0.474456476769
MQT = 0.374921396861
DiscardProb = 0.002327308643
DiscardRate = 0.018618469141

```
λ = 8.; μ = 10.; n = 1; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```



Basic Properties	
QueueNotation	M/M/1/20
ArrivalRate	8.
ServiceRate	10.
UtilizationFactor	0.798138
Throughput	7.98138
ServiceChannels	1
SystemCapacity	20
InitialState	0
Performance Measures	
MeanSystemSize	3.80451
MeanSystemTime	0.476673
MeanQueueSize	3.00637
MeanQueueTime	0.376673

Redes Estocásticas

- *Littles's law*

$E[X] = \lambda\ E[s]$ (ergódico)

E[X] - tamanho médio da fila.

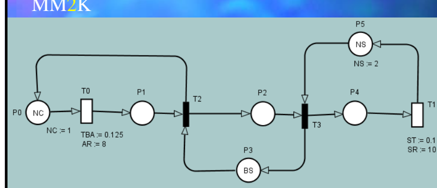
E[s] - Tempo médio de serviço do sistema.

λ - taxa de chegada

Redes Estocásticas

Representação implícita do descarte

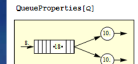
MM2K



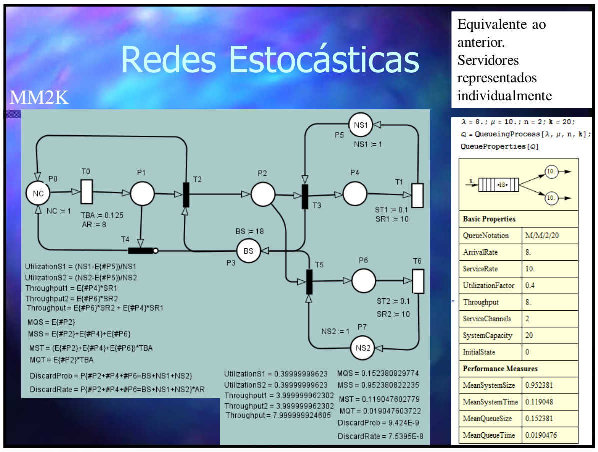
Utilization = (NS-E{#P5})/NS
Throughput = E{#P4}*SR
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P4}
MST = (E{#P2}+E{#P4})*TBA
MQT = E{#P2}*TBA
DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}
DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}*AR

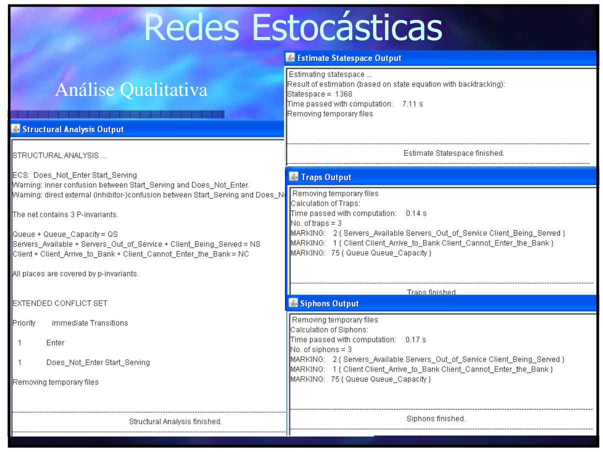
Utilization = 0.399999998492
Throughput = 7.999999969842
MQS = 0.152380897055
MSS = 0.95238089404
MST = 0.119047611755
MQT = 0.019047612132
DiscardProb = 3.77E-9
DiscardRate = 3.0158E-8

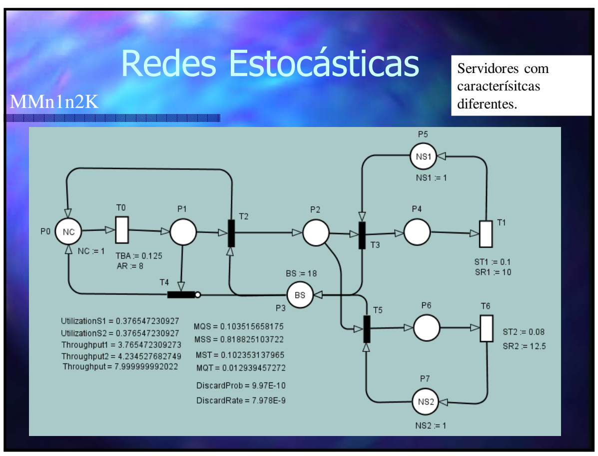
```
λ = 8.; μ = 10.; n = 2; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```

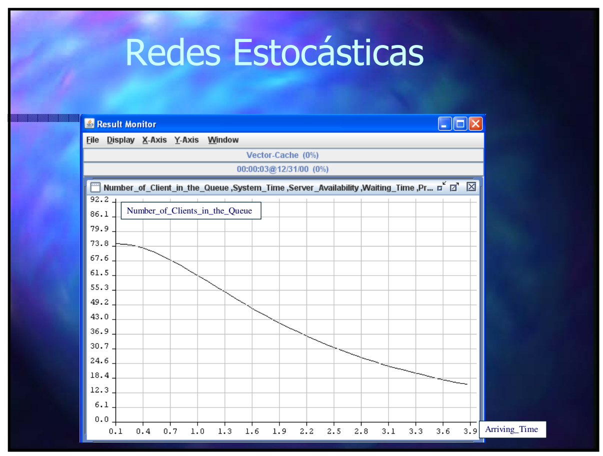


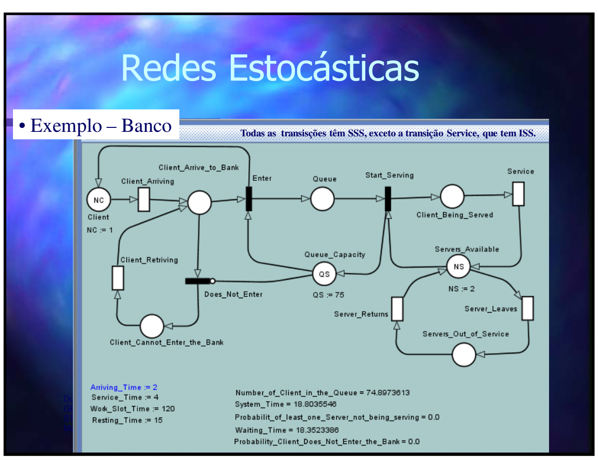
Basic Properties	
QueueNotation	M/M/2/20
ArrivalRate	8.
ServiceRate	10.
UtilizationFactor	0.4
Throughput	8.
ServiceChannels	2
SystemCapacity	20
InitialState	0
Performance Measures	
MeanSystemSize	0.952381
MeanSystemTime	0.119048
MeanQueueSize	0.152381
MeanQueueTime	0.0190476


Redes Estocásticas
MM2K
Equivalente ao anterior. Servidores representados individualmente
Basic Properties
Performance Measures

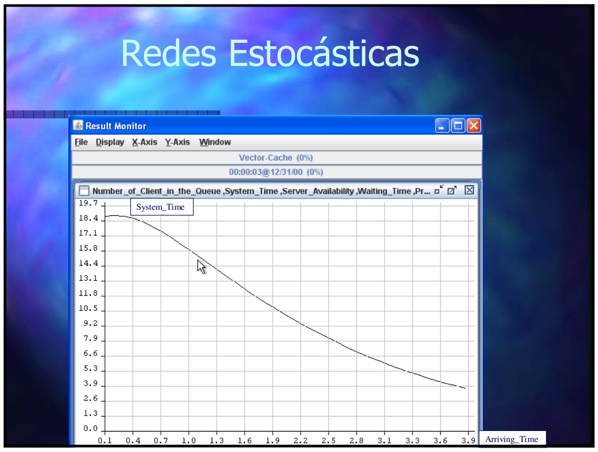

Redes Estocásticas
Análise Qualitativa
Structural Analysis Output
Estimate Statespace Output
Traps Output
Siphons Output

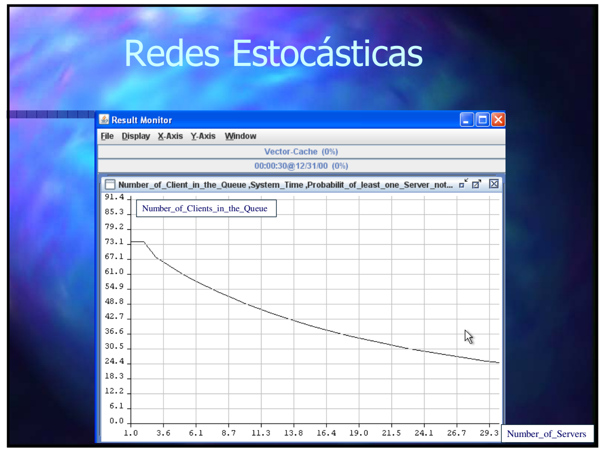

Redes Estocásticas
MMn1n2K
Servidores com caracterísitcas diferentes.


Redes Estocásticas
Result Monitor
Number_of_Clients_in_the_Queue
Arriving_Time

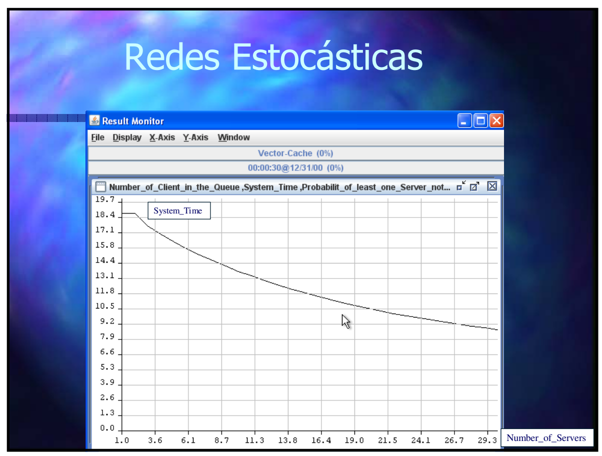

Redes Estocásticas
• Exemplo – Banco
Todas as transições têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.

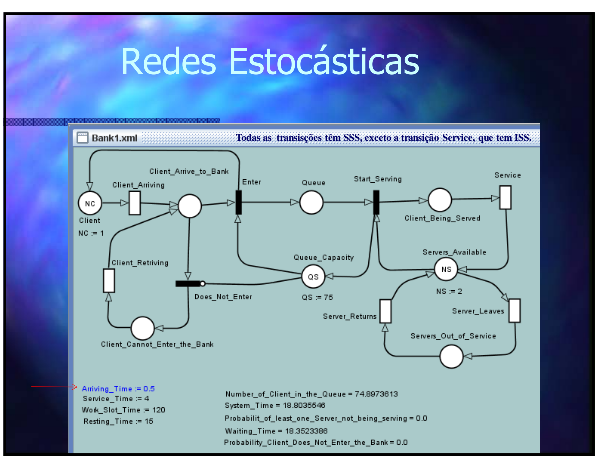

Redes Estocásticas
Result Monitor
Waiting_Time
Arriving_Time

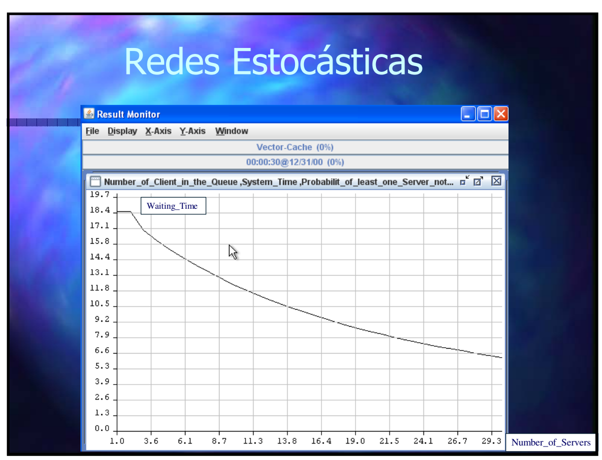

Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
System_Time
Arriving_Time


Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
Number_of_Clients_in_the_Queue
Number_of_Servers

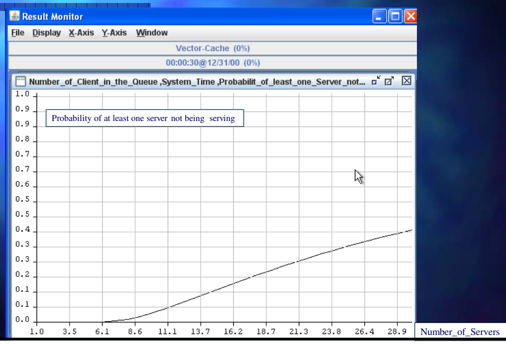

Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
Probability of at least one server not being serving
Arriving_Time


Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
System_Time
Number_of_Servers


Redes Estocásticas
Bank1.xml
Todas as transisções têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.
Client_Arrive_to_Bank
Client_Arriving
Enter
Queue
Start_Serving
Service
Client
NC := 1
Client_Being_Served
Client_Retriving
Queue_Capacity
Servers_Available
Does_Not_Enter
QS := 75
NS := 2
Server_Returns
Server_Leaves
Servers_Out_of_Service
Client_Cannot_Enter_the_Bank
Arriving_Time := 0.5
Service_Time := 4
Work_Slot_Time := 120
Resting_Time := 15
Number_of_Client_in_the_Queue = 74.8973613
System_Time = 18.8035546
Probabilit_of_least_one_Server_not_being_serving = 0.0
Waiting_Time = 18.3523386
Probability_Client_Does_Not_Enter_the_Bank = 0.0

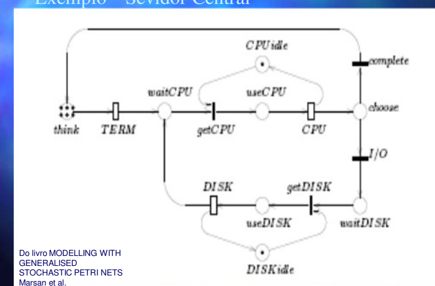

Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
Waiting_Time
Number_of_Servers

Redes Estocásticas

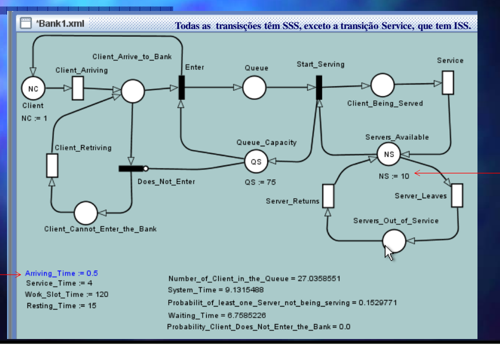


Redes Estocásticas

• Exemplo – Sevidor Central



Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

■ Aproximando Outras Distribuições

– Variáveis Suplementares

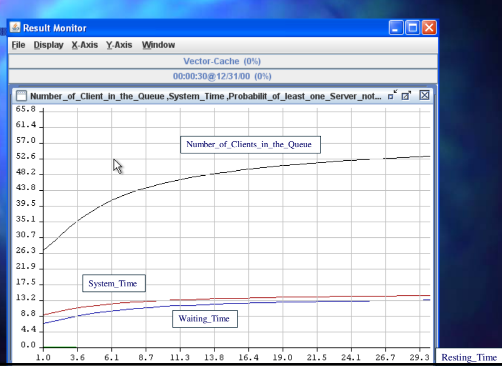
– Aproximação por Fases

– *Moment Matching*

Para encontrar uma distribuição por fase adequada para uma distribuição genérica, duas atividades são fundamentais:

- Determinar o tipo de aproximação necessária.
- Encontrar os parâmetros numéricos da aproximação.

Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

■ Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

– Qualidade da aproximação: quanto mais próximo for a distribuição por fase da distribuição real, melhor.

- Medidas de aproximação:
  - *Moment matching*
  - Encontrar um pdf (ou cdf) que seguem a pdf real numa determinada região de interesse.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

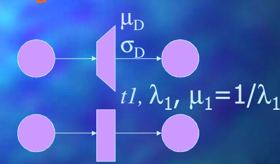
Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Número de Estados da Aproximação: é importante fazer com que o número de estados seja o menor possível.
- Facilidade da obtenção do modelo markoviano resultante: pode ser possível obter uma aproximação que gere excelentes resultados. No entanto, pode não ser fácil a integração no modelo markoviano resultante.

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*



- Se $\mu_D/\sigma_D = 1$ então uma transição exponencial é suficiente. $\lambda_1=1/\mu_D$

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

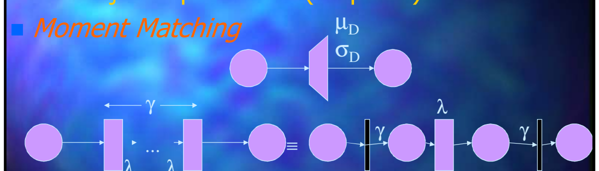
Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Facilidade de obtenção dos parâmetros da aproximação: quanto mais parâmetros sejam necessários para especificar a aproximação, mais difícil se torna para encontrá-los.

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

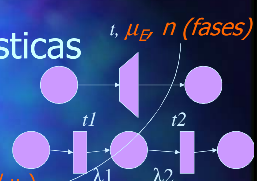


- Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1$, $x \in Z$

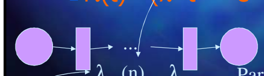
$\gamma = (\mu_D/\sigma_D)^2 = x^2$, $\lambda = \gamma/\mu_D = x^2/\mu_D$

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases
- Distribuição de Erlang



- $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ($\lambda_1 = 1/\mu_1, \lambda_2 = 1/\mu_2$)
- $f\tau(t) = (f\tau_1 * f\tau_2)(t) = \lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda 1t} - e^{-\lambda 2t})/(\lambda_1 - \lambda_2)$
- Generalizando para n fases iguais a λ.
  - $f\tau(t) = (\lambda^n t^{(n-1)} e^{-\lambda t})/(n-1)!$, $t \geq 0$

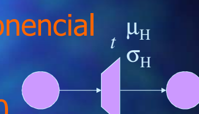


Parâmentros: n, λ; Valor Esperado: $\mu_E = n/\lambda$

Variância: $1/n\lambda^2$ (λ - de cada fase)

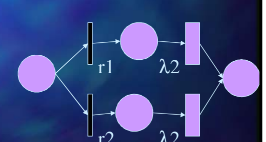
Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases
- Distribuição de Hiperexponencial



$f\tau(t) = r_1 f\tau_1(t) + r_2 f\tau_2(t)$, $t \geq 0$

$\sum^n_{j=1} r_j = 1$



Parâmentros:

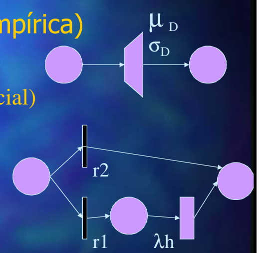
Valor Esperado: $\mu_H = \sum_j q_j/\lambda_j$

Variância: $2 \sum_j q_j/\lambda_j^2 - \mu_H^2$

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*



$\mu_H = r_1/\lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)

$\sigma_H = [\mathrm{sqrt}\,(2 r_1 - r_1^2)]/\lambda_H$

- Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ $(c=\sigma_D/\mu_D>1)$

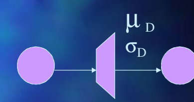
$r_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $r_2=1-r_1$

$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$,

Redes Estocásticas

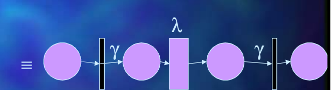
Distribuição Determinística

- *Moment Matching*



Aproxima-se, fazendo-se σ_D pequeno

$\Rightarrow \gamma$ torna-se grande.



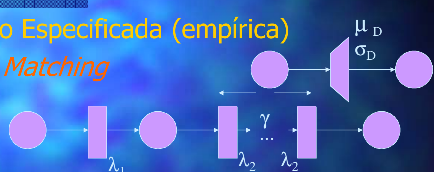
- Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1$, $x \in Z$ $(c=\sigma_D/\mu_D<1)$

$\gamma = x^2$, $\lambda = x^2/\mu_D$

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*



- Se $\mu_D/\sigma_D > 1$ e $\mu_D/\sigma_D \notin Z$
- $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$

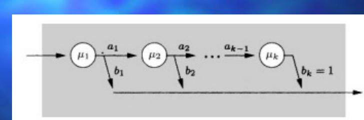
$\lambda_1 = 1/\mu_1$ $\mu_1 = \mu_D \mp \mathrm{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

$\lambda_2 = 1/\mu_2$ $\mu_2 = \gamma\mu_D \pm \mathrm{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Cox generalizou a idéia de composição de fase exponenciais para gera probabilidades e taxas complexas.



Nestes slides μ_k são taxas (diferentemente dos anteriores)

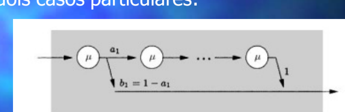
Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Nestes slides μ é taxa (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso $CV_X \leq 1$



$$\mu_j = \mu \quad j = 1,\ldots,k,$$
$$a_j = 1 \quad j = 2,\ldots,k-1.$$

$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu},$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k)+k-2)}{\mu^2},$$

$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k)+k-2)}{[b_1+k(1-b_1)]^2}.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

- Número de fases

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2+4-4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)},$$

$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k-1)}{\overline{X}}.$$

- Taxa das fases

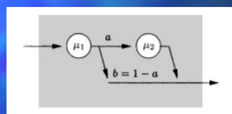
Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Nestes slides μ_1 e μ_2 são taxas (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso $CV_X > 1$



$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

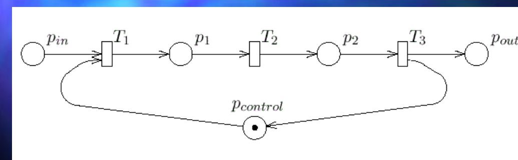
$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}}, \quad a = \frac{1}{2c_X^2}.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X}c_X^2}$$

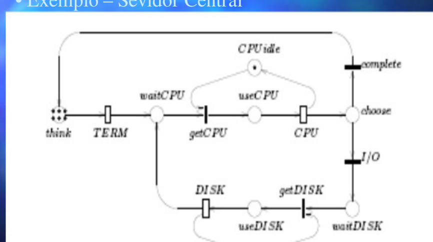
Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 Fases



Redes Estocásticas

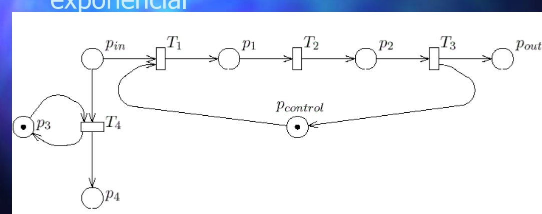
- Exemplo – Sevidor Central



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

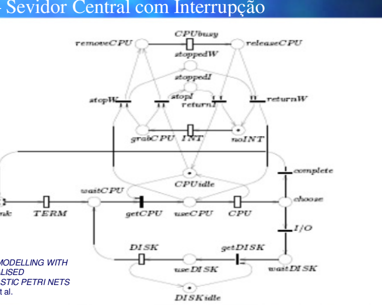
Modelando Políticas de Memória

- Conflito entre Erlang com 3 fases e exponencial



Redes Estocásticas

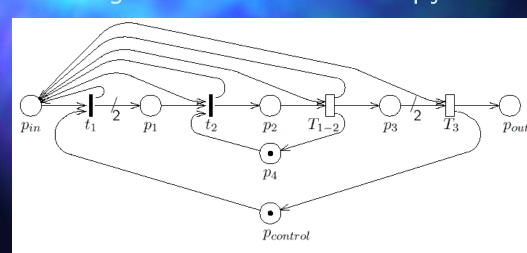
- Exemplo – Sevidor Central com Interrupção



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

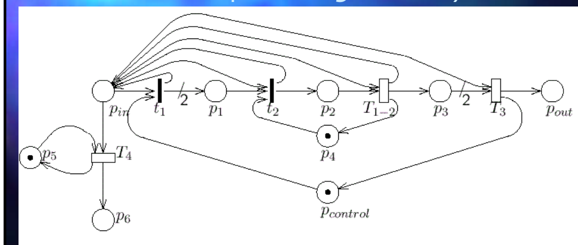
Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 fases com interrupção



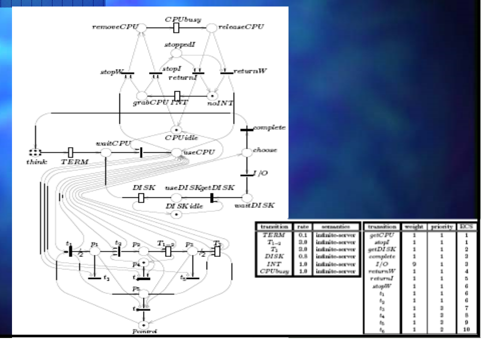
Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Age Memory*



Modelando Políticas de Memória

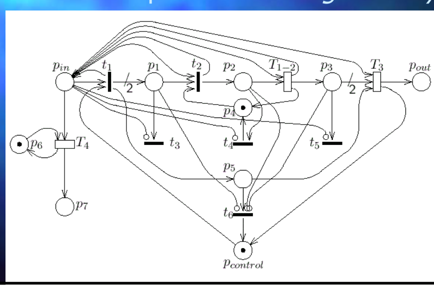
- Conflito com política *Enabling Memory*



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W) - Marsan,Chiola 1987
  - P é o conjunto de lugares,
  - T = $T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

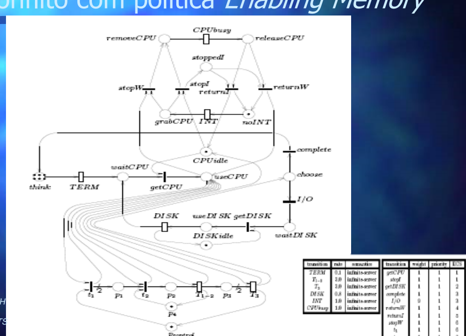
    $i_k(t_j)$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall\, p_k \in P$, $\forall\, t_j \in T$

    $o_k(t_j)$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall\, p_k \in P$, $\forall\, t_j \in T$

    $h_k(t_j)$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall\, p_k \in P$, $\forall\, t_j \in T$
  - Π: $T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - M_0, é marcação inicial,

Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



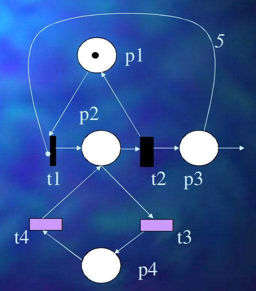
Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W)
  - D: $T_{exp} \cup T_{det} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - W: $T_{im} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.
- Quando $T_{det} = \emptyset$ a DSPN é uma GSPN.
- Embora seja possível a análise de modelos com mais de uma transição determinística simultaneamente habilitadas, as ferramentas, normalmente, somente implementam métodos que considerem apenas uma transição determinística habilitada por marcação.

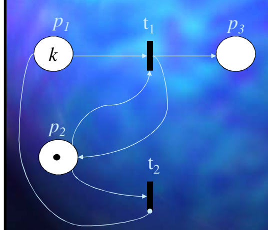
DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:
  - $T_{im} = \{t_1\}$
  - $T_{exp}=\{t_3,t_4\}$
  - $T_{det}=\{t_2\}$

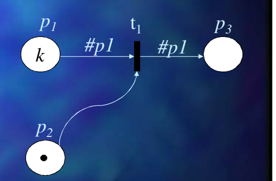


EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:



Modelo em DSPN para limpar p_1.



Modelo em EDSPN para limpar p_1 (arcos dependentes de marcação).

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W) -
  - P é o conjunto de lugares,
  - $T = T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

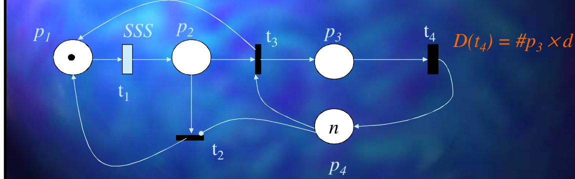
    $i_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$

    $o_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$

    $h_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$
  - Π: $T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - M_0, é marcação inicial,

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Tempos dependentes da carga



EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W)
  - D: $(T_{exp} \cup T_{det}) \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - W: $T_{im} \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.

Redes Estocásticas

- Considerações
  - Redes de Petri estocásticas são uma representação compacta de alto nível das CTMC
  - Equivalência com CTMC
  - Análise quantitativa
  - Análise qualitativa
  - Modelagem de sistemas concorrentes, não-determinísticos e assíncronos. Modelagem de sincronismo, escolha, mútua exclusão etc


Redes Estocásticas
Algumas Referências:
Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets, A. Marsan et al, John Wiley & Sons, 1995.
Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets, C. Lindermann, John Wiley & Sons, 1998.
http://www.daimi.au.dk/PetriNets