

# Modelagem para Avaliação de Desempenho e Confiabilidade

Paulo Maciel

Centro de Informática

## - Interpretações do Tempo -

A noção de tempo pode ser representada de diversas maneiras nos sistemas computacionais.

- **Tempo Lógico** é definido a partir de relações de precedência entre eventos permitindo estabelecer ordens causais entre conjunto de eventos.
- **Tempo Físico** é um tempo métrico que permite representar quantitativamente a distância entre eventos e estabelecer ordens totais entre eventos.
- **Tempo Contínuo** segue a natureza uniforme e contínua do tempo físico e é isomorfo ao conjunto dos reais.
- **Tempo Discreto** é uma simplificação do tempo contínuo onde a relação de isomorfismo é com o conjunto dos naturais.
- **Tempo Global** fornece uma única referência temporal para todos os componentes do sistema.
- **Tempo Local** é a noção em que cada componente do sistema tem sua própria referência temporal.

## Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho



## Análise de Desempenho

- **Modelagem**
  - Determinística
    - Melhor e pior casos
  - Probabilística
    - Valores prováveis
  - Operacional
    - Informações observáveis
- **Simulação**
  - Análise exaustiva
- **Medição**
  - Medidas obtidas do sistema real
  - Protótipos

## Modelos Temporizados

- Com todos estes pontos de vistas, diversos modelos têm sido propostos na literatura para tratar (modelar e analisar) os sistemas sob o ponto de vista temporal.
- Dentre os modelos temporais, podemos ressaltar:
  - **Lógicas Temporais:** *Linear Time Temporal Logic, Causal Temporal Logic*
  - **Álgebras de Processos Temporais:** *Timed CSP*
  - **Autômatos Temporizados**
  - **Cadeias de Markov**
  - **Redes de Fila**
  - **Redes de Petri Temporizadas:** *Timed PN, Time PN, SPN, GSPN, DSPN*

## Modelos Temporizados

- **Modelagem para Análise de Desempenho**
  - Análise Operacional
  - Modelos para Simulação
  - Modelos Analíticos
    - Cadeias de Markov
      - Teoria das Filas
    - Redes de Petri Estocásticas
    - Álgebras de Processo Estocásticas

## Modelos Temporizados

- Algumas destas classes de modelos temporizados possibilitam a análise temporal dos sistemas seja sob o ponto de vista determinístico ou sob o ponto de vista probabilístico. Para modelagem e avaliação de sistemas críticos, são de particular interesse os modelos que possibilitem a representação de tempos físicos e não apenas o tempo lógico.
- Os modelos que possibilitam a especificação do tempo físico, podem representar os tempo de foras distintas, por exemplo:
  - por **Intervalos**
  - de forma **Determinística**
  - de forma **Probabilística**

## Modelagem para Análise de Desempenho

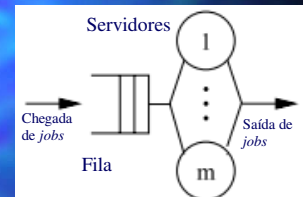
- **Algumas Medidas**
  - Tempo de resposta
  - *Throughput*
  - Utilização
  - Capacidade
  - Confiabilidade
  - Taxa de descarte

## Análise Operacional

- Informações observáveis
- Jeff Buzzen and Peter Denning

## Notação de Kendall

- **A/B/m/K**
  - **A** – distribuição do tempo entre chegadas.
  - **B** – distribuição do tempo de serviço.
  - **m** – número de servidores.
  - **K** = capacidade de armazenamento.



$A, B = \{M, D, G, E\}$   
 • M - Markovian,  
 • D - Determinística,  
 • G - General  
 • E - Erlangian

## Notação de Kendall

- **A/B/m/K**
  - **A** – distribuição do tempo entre chegadas.
  - **B** – distribuição do tempo de serviço.
  - **m** – número de servidores.
  - **K** = capacidade de armazenamento.

Exemplos:  
 M/M/1  
 M/M/1/K  
 M/G/2

• Muitas vezes quando K e m são ∞, estes termos são omitidos ou usa-se //

## Análise Operacional

- **Variáveis operacionais**
  - **T**: Período de observação
  - **K**: Número de recursos do sistema
  - **A<sub>i</sub>**: Número total de solicitações (ex.:chegadas) do recurso i no período T.
  - **A<sub>0</sub>**: Número total de solicitações (ex.:chegadas) ao sistema no período T.
  - **C<sub>i</sub>**: Número total de serviços finalizados pelo recurso i no período T.
  - **C<sub>0</sub>**: Número total de serviços finalizados pelo sistema no período T.
  - **B<sub>i</sub>**: Tempo de ocupação do recurso i no período T.

## Análise Operacional

- Métricas derivadas (*derived measures*)
  - $S_i$ : Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso  $i$ ;  $S_i = B_i/C_i$
  - $U_i$ : Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso  $i$ ;  $U_i = B_i/T$
  - $X_i$ : *throughput* (ex.: finalizações por unidade de tempo) do recurso  $i$ ;  $X_i = C_i/T$
  - $\lambda_i$ : taxa de chegada (ex.: chegadas por unidade de tempo) ao recurso  $i$ ;  $\lambda_i = A_i/T$
  - $X_0$ : *throughput* do sistema;  $X_0 = C_0/T$
  - $V_i$ : Número médio de visitas ao recurso  $i$  por solicitação;  $V_i = C_i/C_0$

## Análise Operacional

- Exemplo
 

Suponha que ao se monitorar um processador por um período de 1 min, verificou-se que o recurso esteve ocupado por 36s. O número total de transações que chegaram ao sistema é 1800. O sistema também finalizou a execução de 1800 transações no mesmo período.

  1. Qual a taxa de chegada ao sistema ( $\lambda_0$ )?
  2. Qual é o throughput do sistema ( $X_0$ )?
  3. Qual é a utilização da CPU ( $U_{CPU}$ )?
  4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas pelo sistema ( $S_0$ )?

## Análise Operacional

- Exemplo
 

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

Handwritten notes for the example:

$T = 1 \text{ min}$        $B_{CPU} = 36 \text{ s}$

$A_0 = 1800 \text{ transações}$

$C_0 = 1800 \text{ transações}$

$A_0 = A_i$        $S_0 = S_i = S_{CPU}$

$C_0 = C_i$        $U_0 = U_i = U_{CPU}$

$X_0 = X_i = \frac{1800}{60} = 30 \text{ tps}$        $X_0 = X_i = X_{CPU}$

$X_0 = X_i = \frac{1800}{60} = 30 \text{ tps}$

## Análise Operacional

- Exemplo
 

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

Handwritten calculations:

$U_0 = U_{CPU} = \frac{B_{CPU}}{T} = \frac{36 \text{ s}}{60 \text{ s}} = 0,6$

$S_0 = S_i = \frac{B_{CPU}}{C_{CPU}} = \frac{36}{1800} = 0,02 \text{ s}$

## Análise Operacional

- Utilization Law
 
$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{B_i}{T} \times \frac{C_i}{C_i} = \frac{B_i}{C_i} \times \frac{C_i}{T} = S_i \times X_i$$

Relacionamento da utilização de um dispositivo com o seu throughput.

## Análise Operacional

- Utilization Law
 
$$U_i = S_i \times X_i$$

Exemplo: Considere que 125 pacotes por segundo chegam a um roteador e que o roteador leva em média 2 milissegundos para tratar o pacote. Portanto:

$$U_i = 0,002 \times 125 = 25\%$$

## Análise Operacional

- Exemplo 2:

A banda passante de um *link* de comunicação é 56000 bps. Pacotes de 1500 bytes são transmitidos ao link a uma taxa de 3 pacotes por segundo

- Qual é a utilização do link?

## Análise Operacional

- Exemplo 2:

Handwidth 56000 bps      Time to send 1 bit (Tsb)

$T_{sb} = 1/\text{bandwidth} = 1/56000$

(TSP) Time to send 1 byte = 8 x Tsb =

Packet size = 1500 bytes

Time to send 1 packet (TSP) = 1500 x Tsb =

Arrival rate ( $\lambda$ ) = 3 packets/s

$U = TSP \times \lambda = 0,214286 \times 3 =$

## Análise Operacional

- Forced Flow Law

$$X_i = \frac{C_i}{T} = \frac{C_i}{T} \times \frac{C_0}{C_0} = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{C_0}{T} = V_i \times X_0$$

Uma maneira interessante de relacionar o throughput do sistema ao throughput dos recursos.

## Análise Operacional

- Forced Flow Law

$$X_i = V_i \times X_0$$

Exemplo: suponha que toda vez que executa uma transação faz-se 2 acessos a uma unidade de disco. Se 5,6 transações são finalizadas por segundo, portanto:

$$X_i = 2 \times 5,6 = 11,2 \text{ tps}$$

## Análise Operacional

- Service Demand Law

– *Service demand* de um recursos é o tempo médio total que uma transação passa em no recurso.

Da *Utilization Law*, tem-se:

$$U_i = X_i \times S_i$$

Da *Forced Flow Law*, tem-se:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Portanto:

## Análise Operacional

- Service Demand Law

$$U_i = V_i \times X_0 \times S_i = D_i \times X_0$$

Portanto:

$$D_i = \frac{U_i}{X_0}$$

## Análise Operacional

□ *Service Demand Law*

$$X_i = \frac{c_i}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{c_i}{X_i} = T$$

$$B_i = U_i \times T$$

$$U = \sum X_i$$

$$D_i = U_i \times S_i = \frac{c_i}{e_0} \times S_i = \frac{c_i}{e_0} \times \frac{U_i}{X_i} = \frac{c_i}{e_0} \times \frac{U_i}{\frac{c_i}{T}} = T \times \frac{U_i}{e_0} = \frac{B_i}{e_0}$$

And by rule,  $c_0 T = X_0$ , then  $\frac{e_0}{e_0} = \frac{U_i}{X_0}$

$$D_i = U_i \times S_i = \frac{B_i}{e_0} = \frac{U_i}{X_0}$$

## Análise Operacional

■ Exemplo

Para ilustrar o conceito de *Service Demand* considere o caso em que 6 transações fazem 3 acessos (cada uma) a uma unidade de disco. Os tempos de cada acesso são apresentados em ms.

		Transaction No.					
I/O No.		1	2	3	4	5	6
1	10	15	13	10	12	14	
2	12	12	12	11	13	12	
3	11	14	11	11	11	13	
Sum	33	41	36	32	36	39	

## Análise Operacional

■ Exemplo

Considere que um *Web Server* foi monitorado por 10 min e que a CPU esteve ocupada por 90%. O *log* do *Web Server* registrou 30.000 solicitações processadas. Qual é a CPU *Service Demand* ( $D_{CPU}$ ) relativa as solicitações ao *Web Server*?

$$X_0 = \frac{C_0}{T} = \frac{30000}{10 \times 60} = 50 \text{ sol/s}$$

$$D_{CPU} = U_{CPU} / X_0 = 0,9 / 50 = 0,018 \text{ s/sol.}$$

ou

$$B_{CPU} = U_{CPU} \times T = 0,9 \times 600 = 540 \text{ s}$$

$$D_{CPU} = \frac{B_{CPU}}{X_0} = \frac{540}{30000} = 0,018 \text{ s/sol.}$$

## Análise Operacional

■ *Little's Law*

$$N = X \times R$$

Onde,  $R = W + S$

- $R$  – Response time
- $W$  – Waiting time
- $S$  – Service time

$N$  – Número de clientes no sistema  
 $X$  – Troughput

## Análise Operacional

■ *Little's Law*

$$N = X \times R$$

Quando não há fila e considera apenas um servidor a Little's law corresponde a Utilization law:  
 $e = R \times S$

## Análise Operacional

■ Leis Operacionais (*derived measures*)

**Utilization Law:**  $U_i = X_i \times S_i = \lambda_i \times S_i$

**Forced Flow Law:**  $X_i = V_i \times X_0$

**Service Demand Law:**  $D_i = V_i \times S_i = U_i / X_0$

**Little's Law:**  $N = X \times R$

**Interactive Response Time Law:**  $R = \frac{M}{X_0} - Z$

## Modelagem de Fenômenos Aleatórios



## Modelo de Probabilidade

1. Espaço amostral ( $\Omega$ ): um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementar) de um fenômeno aleatório.
2. Conjunto de eventos ( $S$ ): um conjunto de todos os possíveis eventos de interesse.
3. Probabilidade dos eventos ( $P$ ): a probabilidade de ocorrência de um evento observável.

PM é a tupla:  $PM = (\Omega, S, P)$ .

## Espaço Amostral

- A probabilidade de um evento representa a chances de que o resultado de um experimento resulte na ocorrência do evento.
- Assume-se que os experimentos são aleatório.
- Um experimento aleatório pode ter muito resultados. Cada resultado é um ponto amostral (evento elementar) e tem uma probabilidade.
- Um espaço amostral  $\Omega$  : um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementar) de um fenômeno aleatório.
  - Finito (ex.: execução das ações associadas a opções de um **if**; dois resultados)
  - Countável (ex.: número de vezes que "corpo" de um laço **while** é executado; O espaço amostral por ser finito ou contável infinito.)
  - Contínuo (ex.: tempo de falha de componente)

## Eventos

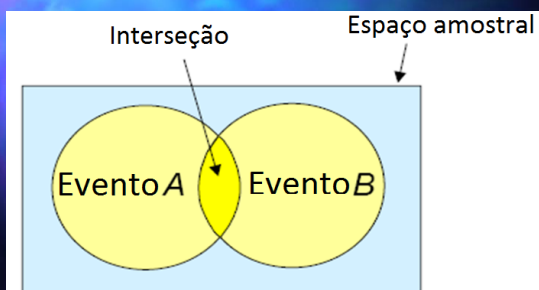
- Um evento  $E$  é uma coleção de zero ou mais pontos amostrais (evento elementar) de  $\Omega$ . Um evento  $E$  é um sub-conjunto de  $\Omega$ .

$$E \subseteq \Omega$$

- $\Omega$  é o evento universal e o conjunto vazio é apresentado por  $\emptyset$

$$\begin{aligned} \Omega \in S \\ A \in S \Rightarrow \bar{A} \in S \\ A, B \in S \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in S \end{aligned}$$

## Diagrama de Venn União e Inteseção de Eventos



## Probabilidade

- *Probabilidade* é um valor numérico que representa a chance de que um evento ocorra.
- Os valores de uma Probabilidade estão entre 0 e 1.
- A probabilidade próxima de 0 representa grande improbabilidade de ocorrência do evento.
- A probabilidade próxima de 1 denota que a ocorrência do evento é quase certa.

## Eventos e suas Probabilidades

- Um evento é uma coleção de pontos amostrais. A probabilidade de um evento é a somada probabilidades dos pontos amostrais.
- Se pudermos identificar todos os pontos amostrais (eventos elementares) de um experimento e associar probabilidades a eles, podemos calcular a probabilidade de qualquer evento.

## Terminologia e Definições

### $\Omega$ e $\mathcal{E}$

- $\bar{E}_1 = \Omega - E_1$  - Complemento
- $E_3 = E_1 \cap E_2$ , interseção
- $E_4 = E_1 \cup E_2$ , União

Para  $n$  eventos

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup E_2 \dots \cup E_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n E_i = E_1 \cap E_2 \dots \cap E_n$$

## Álgebra

- O espaço amostral é um conjunto. Os eventos são subconjuntos desse conjunto.
- Eventos mutuamente exclusivos (disjuntos)
  - Dois eventos são mutuamente exclusivos sse

$$A \cap B = \emptyset$$



Um conjunto de  $n$  eventos ( $n > 2$ ) é mutuamente exclusivo sse

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

## Axiomas

### Espaço de Probabilidade: $OS = (\Omega, S, P)$

Para qualquer evento  $A$ , a probabilidade de  $A$  é:

- $1 \geq P(A) \geq 0, \forall A \in S$

- $P(\Omega) = 1$

- Se  $A$  e  $B$  são disjuntos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

## Consequências

### Espaço de Probabilidade: $OS = (\Omega, S, P)$

Sejam  $A$  e  $\bar{A}$  (seu complemento) eventos

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- Se  $A$  e  $B$  são dois eventos que não são mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## Consequências: Eventos não mutuamente exclusivos

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i>j} P(A_i A_j) + \sum_{i>j>k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^n P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

Princípio da inclusão e exclusão (acima)

Um método muito melhor é:

- Soma dos Produtos Disjuntos (SDP):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \dots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)$$

## Exemplo

Fenômeno aleatório:

Dois resultados de um teste de condição em um **if statement**:

```
if B then T;  
else E;
```

$\Omega = \{T, E\}$ ; Conjunto de resultados

$S = \{\emptyset, \{E\}, \{T\}, \{T, E\}\}$ ; Conjunto de todos os eventos

$P = \{0, 1/2, 1/2, 1\}$ ; probabilidade atribuídas

## Variáveis Aleatórias Resumo

- **Variáveis Aleatórias** é uma função que confere um número real a cada resultado (do espaço amostral) de um experimento aleatório.
- **Variável Aleatória** é uma função que reflete o resultado de um experimento aleatório.  $X: \omega \rightarrow \mathfrak{R}$ .  
 $\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \quad x \in \mathfrak{R}$ .

## Variáveis Aleatórias Resumo

- **Variáveis aleatórias contínuas** assumem quaisquer valores no intervalo  $[a, b]$ , onde  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$
- **Variáveis aleatórias discretas** assumem apenas valores discretos.

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Propriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

## Variáveis Aleatórias Resumo

- **Probability mass function (pmf)** – Seja  $\Omega$  um espaço amostral discreto.  $p(x)$ , que denota uma pmf de uma variável aleatória  $X$ , é definida por  $p(x) = P[X=x]$ , onde  $x$  assume valores de  $\Omega$ .

## Variáveis Aleatórias Resumo

- **Função de Distribuição de Probabilidade Acumulativa (CDF)** de uma variável aleatória  $X$ , denotada por  $F(X)$ , é definida por  $F(x) = P[X \leq x] \quad \forall x \in \mathfrak{R}$
- $F(x)$  é uma função monotônica não-decrescente tal que  $0 \leq F(x) \leq 1$ , onde  $F(-\infty) = 0$  e  $F(+\infty) = 1$
- $F(x) = \sum_{y \leq x} p(y) \Rightarrow F(+\infty) = \sum_{y \in \Omega} p(y) = 1$



## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis ( $X=0, X=1$ ).
    - pmf (probability mass function) de  $X$  é dada por:  $P(X=0) = 1-p$  e  $P(X=1) = p$ ,  $0 \leq p \leq 1$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Binomial
    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados  $n$  vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se tem resultado 1.
    - pmf de  $X$  é dada por:  $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$   
 $k=0,1,\dots,n$ .

Ver slides de medição

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados  $n$  vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se realiza o experimento para se ter o primeiro resultado 1.
    - pmf de  $X$  é dada por:  $P(X=k) = p (1-p)^{n-k}$   
 $k=0,1,\dots$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\bar{X} = E[X] = \sum_{v,k} k \cdot P(X=k)$
  - Uma função de uma variável aleatória ( $Y=f(X)$ ) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[f(X)] = \sum_{v,k} f(k) \cdot P(X=k)$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - $n$ -ésimo momento (em torno da origem) de uma variável aleatória  $X$  é o valor esperado da  $n$ -ésima potência de  $X$ 
    - $\bar{X}^n = E[X^n] = \sum_{v,k} k^n \cdot P(X=k)$
  - $n$ -ésimo momento central de uma variável aleatória  $X$  é o valor esperado da  $n$ -ésima potência da diferença entre  $X$  e o valor esperado de  $X$  ( $E(X) = \bar{X}$ )
    - $\overline{(X-\bar{X})^n} = \sum_{v,k} (k-\bar{X})^n \cdot P(X=k)$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - O primeiro momento é o valor esperado.
  - O primeiro momento central é 0
  - O segundo momento central (variância)
    - $\text{var}(X) = \sigma^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \sum_{v,k} (k-\bar{X})^2 \cdot P(X=k)$
  - O coeficiente de variação é a normalização do desvio padrão
    - $c_x = \sigma / \bar{X}$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - Dada uma variável aleatória  $X$ , a função geratriz de momento  $M_X(t)$  de sua distribuição de probabilidade é o valor esperado de  $e^{tX}$ .
  - $M_X(t) = E[e^{tX}]$
  - $= \sum_i e^{tx_i} \cdot p_X(x_i)$        $X$  discreta.
  - $= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx$        $X$  contínua.

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - $e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots + \frac{t^r X^r}{r!} + \dots$

$$f(t) = e^{(-a \cdot t)}$$

$$= 1 - at + \frac{a^2 t^2}{2} - \frac{a^3 t^3}{6} + \frac{a^4 t^4}{24} - \frac{a^5 t^5}{120} + \frac{a^6 t^6}{720} - \frac{a^7 t^7}{5040} + \frac{a^8 t^8}{40320} - \frac{a^9 t^9}{362880} + \dots$$

Para  $a=2$ , tem-se:

$$= 1 - 2t + 2t^2 - \frac{4t^3}{3} + \frac{2t^4}{3} - \frac{4t^5}{15} + \frac{4t^6}{45} - \frac{8t^7}{315} + \frac{2t^8}{315} - \frac{4t^9}{2835} + \dots$$

- Tomando a esperança:
  - $E[e^{tX}] = 1 + E[X] t + E[X^2] t^2/2! + E[X^r] t^r/r! + \dots$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Procedimento para obtenção dos momentos
  - Determine  $M_X(t)$  analiticamente para uma uma distribuição particular
  - Ache  $E[X^r] = d^r/dt^r M_X(t)|_{t=0}$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Parâmetro:  $p$ ;
    - Valor Esperado =  $p$ ,
    - Variância =  $p(1-p)$ ,
    - Coeficiente de variação =  $(1-p)/p$
    - Função geratriz de momentos
 
$$M_{X_j}(t) = q + pe^t$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Binomial
    - Parâmetros:  $n, p$ ;
    - Valor Esperado =  $np$ ,
    - Variância =  $np(1-p)$ ,
    - Coeficiente de variação =  $(1-p)/np$
    - Função geratriz de momentos
 
$$M_{X_j}(t) = (q + pe^t)^n$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Parâmetro:  $p$ ;
    - Valor Esperado =  $1/p$ ,
    - Variância =  $(1-p)/p^2$ ,
    - Coeficiente de variação =  $(1-p)$
    - Função geratriz de momentos
 
$$M_{X_j}(t) = pe^t/(1-qe^t)$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor no intervalo  $[a,b]$ , onde  $-\infty < a, b < +\infty$ , é denominada Variável Aleatória Contínua.
  - *Cumulative Distribution Function (CDF)*
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$ 
    - Se  $x < y$  então:  $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Cumulative Distribution Function (CDF)*
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$ 
    - Se  $x < y$  então:  $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$
  - *Probability density function (pdf)*
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Probability density function (pdf)*
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - Como  $F_X(x)$  não é decrescente, então  $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
    - $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$
    - $P(X=x) = \int_x^x f_X(x) dx = 0$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Valor Médio* ou *Valor Esperado*
    - $\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx$
  - Uma função de uma variável aleatória ( $g(X)$ ) é uma variável aleatória com *Valor Esperado*
    - $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *n-ésimo momento*
    - $\bar{X}^n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x) dx$
  - *n-ésimo momento central*
    - $\overline{(X-\bar{X})^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{X})^n \cdot f_X(x) dx$

## Variáveis Aleatórias Resumo

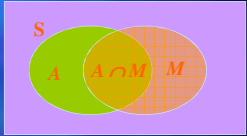
- Contínua
  - *O segundo momento central (variância)*
    - $\sigma^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{X})^2 \cdot f_X(x) dx$
  - *O coeficiente de variação e a normalização do desvio padrão*
    - $c_X = \sigma / \bar{X}$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Propriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

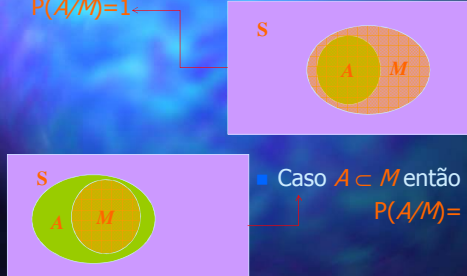
## Probabilidade Condicional

- Seja  $A$  um evento arbitrário em um espaço amostral  $S$ . A probabilidade de que ocorra um evento  $A$  uma vez que  $M$  tenha ocorrido é denotado por  $P(A/M)$  que é definido por:
  - Caso  $M \subset A$  então  $P(A/M)=1$
  - Caso  $A \subset M$  então  $P(A/M) = \frac{P(A)}{P(M)}$



## Probabilidade Condicional

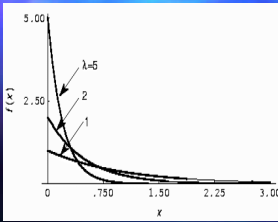
- Caso  $M \subset A$  então  $P(A/M)=1$
- Caso  $A \subset M$  então  $P(A/M) = \frac{P(A)}{P(M)}$



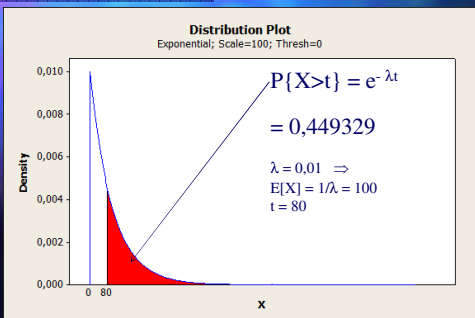
## Distribuição Exponencial

### Variável Aleatória Exponencial

- fdp exponencial  $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, 0 \leq t < \infty$
- CDF(t) =  $\begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \leq t < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- Valor Esperado  $E(X) = 1/\lambda$
- Variância:  $\text{var}(X) = 1/\lambda^2$
- Propriedade: Não possui memória

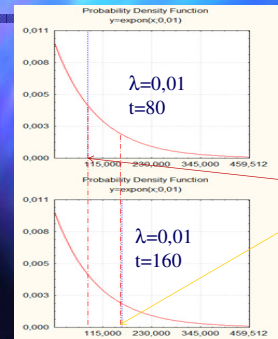


## Distribuição Exponencial



$P\{X>t\} = e^{-\lambda t}$   
 $= 0,449329$   
 $\lambda = 0,01 \Rightarrow E[X] = 1/\lambda = 100$   
 $t = 80$

## Distribuição Exponencial



$P\{X>t\} = e^{-\lambda t}$   
**Probabilidade Condicional**

## Distribuição Exponencial

Um exemplo:

$$P\{X>80\} = e^{-0,01 \times 80} = 0,449329$$

$P\{X>(80+80) | X > 80\} = \frac{P\{X>(80+80) \wedge X>80\}}{P\{X>80\}}$   
 $P\{X>(80+80) | X > 80\} = \frac{P\{X>160\}}{P\{X>80\}}$   
 $P\{X>(80+80) | X > 80\} = \frac{e^{-0,01 \times (80+80)}}{e^{-0,01 \times 80}} = e^{-0,01 \times 80} = 0,449329$

Probabilidade Condicional

$P\{X>160|X>80\} = P\{X>80\} = 0,449329$

## Distribuição Exponencial

### Variável Aleatória Exponencial

$$P\{X>t\} = e^{-\lambda t}$$

$P\{X>t+u | X > t\} = \frac{P\{X>t+u \wedge X>t\}}{P\{X>t\}}$   
 $P\{X>t+u | X > t\} = \frac{P\{X>t+u\}}{P\{X>t\}}$   
 $P\{X>t+u | X > t\} = \frac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda u} = P\{X>u\}$

Probabilidade Condicional

## Variáveis Aleatórias Resumo

### Contínua

- Exponencial
  - Parâmetro:  $\lambda$ ,
  - Valor Esperado:  $1/\lambda$ ,
  - Variância:  $1/\lambda^2$ ,
  - Coefficiente de variação: 1
  - Função geratriz de momentos  
 $M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-1}$

## Variáveis Aleatórias Resumo

### Hiperexponencial

Parâmetros:  $k, \mu_j, q_j$

Valor Esperado:

$$E(X) = \bar{X} = \sum_{j=1}^k q_j / \mu_j$$

$F_X(x) = \sum_{j=1}^k q_j (1 - e^{-\mu_j x})$ ,  $t \geq 0$   
 $f_X(x) = \sum_{j=1}^k q_j \mu_j e^{-\mu_j x}$ ,  $t \geq 0$

Coefficiente de variação:  $\sqrt{2 \times (1/\bar{X})^2 \times \sum_{j=1}^k q_j / \mu_j^2 - 1} \geq 1$

Variância:  $2 \sum_{j=1}^k q_j / \mu_j^2 - \bar{X}^2$

## Variáveis Aleatórias Resumo

Exponencial  $\lambda=0,01$

$$E(t) = \int_0^{\infty} t \times f_3[t] dt = 100$$

$$\sigma = \sqrt{\int_0^{\infty} (t^2 \times f_3[t]) dt - m^2} = 200$$

Hiperexponencial

$\lambda_1 = 1/250$   
 $q_1 = 0,4$   
 $f_3[t] := (r1 \times \lambda \times e^{-\lambda t})$

## Variáveis Aleatórias Resumo

### Hiperexponencial

Uma distribuição desconhecida de  $\bar{X}$  e  $c \geq 1$  pode ser aproximada por uma

Parâmetros:  $k=2, \mu_1, \mu_2, q_1, q_2$

$$\mu_1 = 1/\bar{X} \cdot (1 - \sqrt{(q_2/q_1 \cdot (c^2 - 1)/2)})^{-1}$$

$$\mu_2 = 1/\bar{X} \cdot (1 + \sqrt{(q_1/q_2 \cdot (c^2 - 1)/2)})^{-1}$$

$$q_1 + q_2 = 1, q_1, q_2 \geq 0, \mu_1, \mu_2 > 0$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

■ Erlang-k

$1$       $2$       $k$  fase

$$F_X(x) = 1 - e^{-k\mu t} \sum_{j=0}^{k-1} (k\mu t)^j / j!, t \geq 0$$

$$f_X(x) = [(k\mu(k\mu t)^{k-1}) / (k-1)!] e^{-k\mu t}, t \geq 0, k=1,2,\dots$$

- Parâmetros:  $k, \mu$ ;
- Valor Esperado:  $k/\mu$
- Variância:  $k/\mu^2$
- Coeficiente de variação:  $1/\sqrt{k} \leq 1$
- Função geratriz de momentos  

$$M_X(t) = (1 - t/\lambda)^{-k}$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

■ Erlang-K

■ Uma distribuição desconhecida de  $\bar{X}$  e  $c \leq 1$  pode ser aproximada por uma

- $k = [1/c^2]$
- $\mu = 1 / (c^2 k \bar{X})$

## Variáveis Aleatórias Resumo

■ Erlang-K (*Shape = fase, Scale = valor da fase*)

## Variáveis Aleatórias Resumo

A distribuição **hipo-exponencial** é uma generalização da distribuição de **Erlang** quando se admite fases com taxas diferentes.

Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com duas fases  $\mu_1 \neq \mu_2$ , tem-se:

- $F_X(x) = 1 - [\mu_2 / (\mu_2 - \mu_1)] e^{-\mu_1 t} + [\mu_1 / (\mu_2 - \mu_1)] e^{-\mu_2 t}$ ,  $t \geq 0$
- $f_X(x) = [(\mu_1 \mu_2) / (\mu_1 - \mu_2)] (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t})$ ,  $t \geq 0$

## Variáveis Aleatórias Resumo

■ Hipo-exponencial

- Parâmetros:  $\mu_1, \mu_2$
- Valor Esperado:  $1/\mu_1 + 1/\mu_2$
- Variância:  $1/\mu_1^2 + 1/\mu_2^2$
- Coeficiente de variação:  $[\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} / (\mu_1 + \mu_2)] < 1$

## Variáveis Aleatórias Resumo

■ Contínua

■ Uma distribuição desconhecida de  $\bar{X}$  como valor esperado e  $0.5 \leq c^2 < 1$  pode ser aproximada por uma Hipo-exponencial

$$\mu_1 = (2/\bar{X}) \{1 + \sqrt{1 + 2(c^2 - 1)}\}^{-1}$$

$$\mu_2 = (2/\bar{X}) \{1 - \sqrt{1 + 2(c^2 - 1)}\}^{-1}$$

## Variáveis Aleatórias Resumo



- Contínua
  - Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com k fases e taxas  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  tem-se:

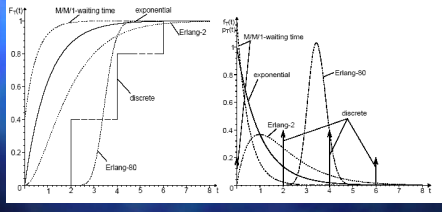
$$f_x(x) = \sum_{j=1}^k a_j \mu_j e^{-\lambda_j t}, \quad t \geq 0$$

$$a_j = \prod_{i=1, i \neq j}^k [\mu_i / (\mu_j - \mu_i)], \quad 1 \leq i \leq k$$

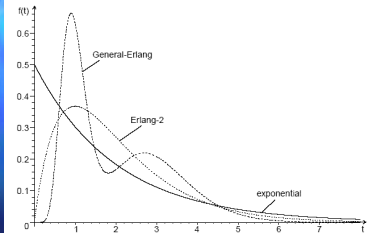
$$\text{Valor Médio} = \sum_{j=1}^k 1/\mu_j$$

## Variáveis Aleatórias Resumo



## Variáveis Aleatórias Resumo



## Variáveis Aleatórias Resumo


- Uma função de uma variável aleatória ( $Y=f(X)$ ) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[f(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \cdot P(X=k)$
- Uma função de uma variável aleatória ( $Y=g(X)$ ) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx$

Função densidade de Probabilidade de X

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Se  $f(X) = X$ 
  - Valor Esperado
    - $E[f(X)] = E(X) = \mu$
  - Variância
    - $\text{Var}\{f(X)\} = E\{[f(X) - E(f(X))]^2\}$
    - $= E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2$  (Variância de X)
    - $= \text{Var}(X) = \sigma^2$

## Variáveis Aleatórias Resumo



- Se  $f(X) = aX + b$ 
  - Valor Esperado
    - $E[f(X)] = aE(X) + b$
  - Variância
    - $\text{Var}\{f(X)\} = a^2 \text{Var}(X)$
  - Prova:  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ .

Por definição  $\text{Var}(aX + b) = E\{(aX + b) - E(aX + b)\}^2$

$$= E[aX + b - (aE(X) + b)]^2$$

$$= E(aX - aE(X))^2$$

$$= E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 E(X - E(X))^2 = a^2 \text{Var}(X).$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

2. Se  $f(X) = b$

- Valor Esperado
  - $E(b) = b$
- Variância
  - $Var(b) = 0$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Exemplo

Suponha que  $X$  seja uma variável aleatória tal que  $E(X) = 3$  e  $Var(X) = 5$ . Além disso, seja  $Y(X) = 2X - 7$ .

Portanto:

$$E(Y(X)) = [2 \times E(X)] - 7 = -1$$

$$Var(Y(X)) = 2^2 \times Var(X) = 20$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

Quando  $Y=f(X)$  é muito complicada, os cálculos de  $E(f(X))$  e  $Var(f(X))$  podem ser difíceis. Pode-se obter aproximações de  $E(f(X))$  e  $Var(f(X))$  expandindo-se  $Y=f(X)$  (série de Taylor) até três termos (para a média).

$$Y = f(E(X)) + [(X - E(X)) \times f'(E(X))] + [(1/2) \times (X - E(X))^2 \times f''(E(X))] + R$$

Resto da expansão

## Variáveis Aleatórias Resumo

- $Y = f(E(X)) + (X - E(X)) f'(E(X)) + [(1/2) \times (X - E(X))^2 \times f''(E(X))] + R$ . Portanto:  $R = 0$
- $E(f(X)) = E[f(E(X))] + E[(X - E(X)) f'(E(X))] + E[(1/2) \times (X - E(X))^2 \times f''(E(X))] + E(R) = E[f(E(X))] + E[(1/2) \times f''(E(X)) \times E[(X - E(X))^2]] + E(R) = f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) + E(R) \cong f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) \Rightarrow E(f(X)) \cong f(E(X)) + [(1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X)]$

## Variáveis Aleatórias Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatórias que são função de variáveis aleatórias.

- Seja  $X$  uma variável aleatória com  $E[X]$  e  $Var(X)$ . Suponha que  $Y=f(X)$ . Portanto:
  - $E[Y] \cong f(E[X]) + (f''(E[X]) \times Var(X))/2$
  - $Var(Y) \cong (f'(E[X]))^2 \times Var(X)$

## Variáveis Aleatórias Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatórias que são função de variáveis aleatórias.

- Suponha uma variável aleatória  $t$ , onde  $E[t]=20s$  e  $Var(t)=5s$ . Considere uma função  $v(t)=dt^{-1} = 10^3 t^{-1}$
- $v'(t) = -10^3 t^{-2}$  e  $v''(t) = 2 \times 10^3 t^{-3}$
- $E[v(t)] = v(E[t]) + (v''(E[t]) \times Var(t))/2$
- $E[v(t)] = v(20) + (v''(20) \times 5)/2 = 50,625 \text{ m/s}$
- $Var(v(t)) = [v'(E[t])]^2 \times Var(t)$
- $Var(v(t)) = [v'(20)]^2 \times 5 = 12,5 \text{ m/s}$

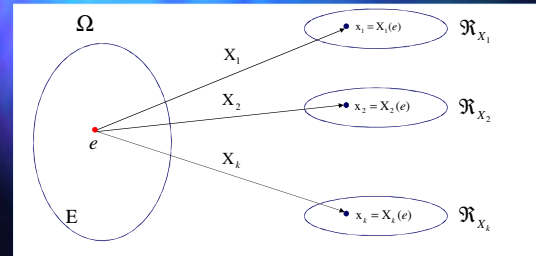


## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Múltiplas Variáveis Aleatórias**
  - Seja  $\Omega$  o espaço amostral associado a um experimento  $E$ .  $e \in E$  é um resultado do experimento  $E$ .
  - Seja  $X_1, X_2, \dots, X_k$  variáveis aleatórias que associam um número real  $X_1(e), X_2(e), \dots, X_k(e)$  a cada resultado  $e$ .
  - $[X_1, X_2, \dots, X_k]$  é chamado de vetor aleatório  $k$ -dimensional.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Múltiplas Variáveis Aleatórias**

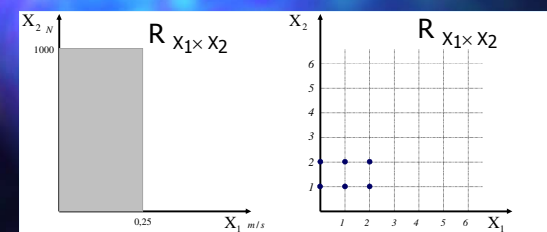


## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Variáveis Aleatórias Bidimensionais** (vetores aleatórios bidimensionais)
  - Se os valores possíveis de  $[X_1, X_2]$  formam um conjunto finito ou infinito enumerável,  $[X_1, X_2]$  é um **vetor aleatório discreto bidimensional**.
  - Se os valores possíveis de  $[X_1, X_2]$  formam um conjunto não enumerável do plano euclidiano,  $[X_1, X_2]$  é um **vetor aleatório contínuo bidimensional**.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Variáveis Aleatórias Bidimensionais** (vetores aleatórios bidimensionais)



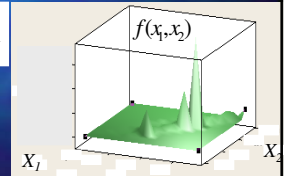
## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Probabilidade Bivariada**
    - Caso Discreto: a cada resultado  $[x_1, x_2]$  de  $[X_1, X_2]$  associamos um número  $p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ , onde  $p(x_1, x_2) \geq 0, \forall x_1, x_2$
    - Distribuição de probabilidade de  $[X_1, X_2]$
- $$\sum_{x_1} \sum_{x_2} p(x_1, x_2) = 1$$
- $$([x_1, x_2], p(x_1, x_2)), \forall x_1, x_2$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- **Probabilidade Bivariada**
  - Caso Contínuo: Se  $[X_1, X_2]$  é um vetor aleatório contínuo,  $f(x_1, x_2) \geq 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{X_1 \times X_2}$  é a função de densidade conjunta.

$$\iint_{\mathbb{R}^{X_1 \times X_2}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$



## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Discreto : a distribuição marginal de  $X_1$  é

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2), \forall x_1$$

A distribuição marginal de  $X_2$  é

$$p_2(x_2) = \sum_{x_1} p(x_1, x_2), \forall x_2$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

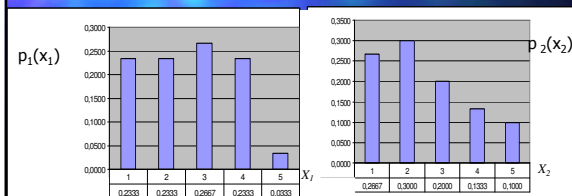


- Probabilidade Marginal: Caso Discreto

$x_1 \backslash x_2$	1	2	3	4	5	$p_2(x_2)$
1	1/30	1/30	2/30	3/30	1/30	8/30
2	1/30	1/30	3/30	4/30		9/30
3	1/30	2/30	3/30			6/30
4	1/30	3/30				4/30
5	3/30					3/30
$p_1(x_1)$	7/30	7/30	8/30	7/30	1/30	$\sum p(x) = 1$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal: Caso Discreto



## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Contínuo : a distribuição marginal de  $X_1$  é

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

A distribuição marginal de  $X_2$  é

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$$Z = X + Y.$$

$$\text{Portanto } E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias discretas, temos que :

$$E[Z] = E[X + Y] =$$

$$\sum_x \sum_y (x + y) p(x + y) = \text{(Ver exemplo da página seguinte)}$$

$$\sum_x x p_x(x) + \sum_y y p_y(y) =$$

$$E[X] + E[Y]$$

### Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

Ver  
Tabela  
Origem!

■ Linearidade do Valor Esperado

x2,x1	0	1	2	3	4	p2(x2)	x2 p(x2)
0	0,0333	0,0333	0,0667	0,1000	0,0333	0,2667	0
1	0,0333	0,0333	0,1000	0,1333		0,3000	0,3
2	0,0333	0,0667	0,1000			0,2000	0,4
3	0,0333	0,1000				0,1333	0,4
4	0,1000					0,1000	0,4
p1(x1)	0,2333	0,2333	0,2667	0,2333	0,0333	2,0000	1,5000
1,6000	0	0,233333	0,533333	0,7	0,133333	x1 p(x1)	E[X2]
E[X1]						E[X1+X2]=	3,1000

### Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

■ Linearidade do Valor Esperado  
Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias contínuas, temos que:

$$E[Z] = E[X + Y] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) f(x + y) dx dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + y) dy dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + y) dx dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy =$$

$$E[X] + E[Y]$$

### Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

■ Linearidade do Valor Esperado  
De forma mais geral, considere Z, Y e X variáveis aleatórias contínuas, onde

$$Z(X, Y) = aX + bY, \text{ e } a \text{ e } b \text{ são constantes.}$$

■  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

### Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

■ Linearidade do Valor Esperado  
Prova:

$$E(aX + bY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [axf(x, y) + byf(x, y)] dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} axf(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} byf(x, y) dx dy$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right] dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$$

$$= aE(X) + bE(Y).$$

### Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

■ Linearidade do Valor Esperado  
Este resultado pode ser generalizado de forma que:  
para  $a_1, \dots, a_n$  constantes e qualquer variável aleatória multivariada  $(X_1, \dots, X_n)$

$$E \left( \sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

Se  $E(X_i)$  não divergem.

### Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

■ Linearidade do Valor Esperado  
Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e seja

$$Z = XY.$$

Portanto  $E[Z] = E[XY] = E[X]E[Y]$

Prova:  $E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p(x_i, y_j) =$

$$\sum_i \sum_j x_i y_j p_X(x_i) p_Y(y_j) \quad (\text{dado que são independentes})$$

$$\sum_i x_i y_j p_X(x_i) \sum_j y_j p_Y(y_j) =$$

$$E[X]E[Y]$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

### Soma de Variâncias

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$$Z = X + Y$$

$$\text{Portanto } \text{Var}[Z] = \text{Var}[X + Y]$$

$$= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2 \times \text{Cov}(X, Y)$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

### Soma de Variâncias

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= E[(X + Y) - E[X + Y]]^2 \\ &= E[(X + Y) - E[X] - E[Y]]^2 \\ &= E[(X - E[X]) + (Y - E[Y])]^2 \\ &= E[(X - E[X])^2 + (Y - E[Y])^2 + 2(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] + E[2(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

### Soma de Variâncias

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[XY - YE[X] - XE[Y] + E[X]E[Y]] \end{aligned}$$

Devido à propriedade de linearidade do valor esperado, temos:

$$\begin{aligned} &= E[XY] - E[YE[X]] - E[XE[Y]] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \quad (\text{Se } X \text{ e } Y \text{ forem independentes}) \\ &= 0 \quad (\text{devido à linearidade}) \end{aligned}$$

*Ver também o slide 101*

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

### Soma de Variâncias

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Dado que se X e Y forem independentes, tem-se  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .  
Portanto:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

### Soma de Variâncias

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

O teorema acima pode generalizado para n variáveis aleatórias mutuamente independentes  $X_1, \dots, X_n$  com constantes  $a_1, \dots, a_n$

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}[X_i]$$

*Ver também o slide 77*

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

### Soma de Variâncias

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

$$\text{Dado que } \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}[X_i]$$

Pois  $a_x = 1$  e  $a_y = -1$

$$\text{Var}[X - Y] = a_x^2 \text{Var}[X] + a_y^2 \text{Var}[Y]$$

$$= (1)^2 \text{Var}[X] + (-1)^2 \text{Var}[Y]$$

$$= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

## Processos Estocásticos

- **Processo Estocástico** é definido por um conjunto de variáveis aleatórias,  $\{X(t) : t \in T\}$ , onde  $X(t)$  é uma variável aleatória para cada  $t \in T$ .  $t$  é denominado parâmetro e cada valor de  $X(t)$  são estados.
- **Processo Estocástico Markoviano** é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- **Tipos de Processos Estocásticos**
  - Processos de espaço de estados e tempo discretos (*Discret Time Markov Chain - DTMC*)
  - Processos de espaço de estados contínuo e tempo discreto
  - Processos de espaço de estados discreto e tempo contínuo (*Continuous Time Markov Chain - CTMC*)
  - Processos de espaço de estados e tempo contínuos

## Processos Estocásticos

- **Classificação de Estados:**
  - Estado Alcançável (*reachable*): um estado  $s_j$  é um alcançável de um estado  $s_i$  se  $p_{ij} > 0$ .
  - Um sub-conjunto de estado  $S$  é definido como fechado (*closed*) se  $\forall s_i \in S, p_{ij} = 0, \forall s_j \notin S$ .
  - Um estado é absorvente se ele é o único membro de conjunto fechado de estados  $S$ .
  - Um conjunto fechado de estado  $S$  é dito irredutível se  $p_{ij} > 0 \forall s_i, s_j \in S$  (todo estado  $s_j$  é alcançável de qualquer estado  $s_i$ ).

## Processos Estocásticos

- **Processo Estocástico Markoviano** é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- **Observam-se dois aspectos associados a ausência de memória:**
  1. Todo estado passado é irrelevante.
  2. O tempo que o processo passa em um estado é irrelevante.
- **Processo Estocástico Semi-Markoviano** é uma extensão de um processo Markoviano onde a restrição 2 é relaxada.

## Continuous Time Markov Chain

- **Equação de Chapman-Kolmogorov**  
 Considere uma CTMC (não-homogênea)  $\{X(t); t \geq 0\}$  com espaço de estado  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Vamos usar  $i, j$  e  $k$  para denotar estados típicos e  $s, u$  e  $t$  para denotar parâmetro de tempo.  
 Para  $0 \leq s \leq t$ , considere  $p_{ij}(s, t) = P\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$ . Pode ser representada na forma matricial por  $H(s, t) = [p_{ij}(s, t)]$   
 A equação de Chapman-Kolmogorov  

$$p_{ij}(s, t) = \sum_k p_{ik}(s, u) p_{kj}(u, t); 0 \leq s \leq u \leq t$$
  
 Na forma matricial, temos:  

$$H(s, t) = H(s, u) H(u, t); 0 \leq s \leq u \leq t$$

## Continuous Time Markov Chain

- **Equação de Chapman-Kolmogorov**  

$$H(s, t) = H(s, u) H(u, t); 0 \leq s \leq u \leq t$$
  
 Substituindo  $u$  por  $t$  e  $t$  por  $t+h$ , então:  

$$H(s, t+h) = H(s, t) H(t, t+h)$$
  
 Subtraindo-se ambos os lados por  $H(s, t)$ , temos:  

$$H(s, t+h) - H(s, t) = H(s, t) [H(t, t+h) - I]$$
  
 Dividindo-se por  $h$  e aplicando-se o limite  $h \rightarrow 0$ , tem-se:  

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(s, t+h) - H(s, t)}{h} = H(s, t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(t, t+h) - I}{h}$$
  
 Levando à equação diferencial parcial  $\frac{\partial H(s, t)}{\partial t} = H(s, t) Q(t)$

## Continuous Time Markov Chain

- **Equação de Chapman-Kolmogorov**  

$$\frac{\partial H(s, t)}{\partial t} = H(s, t) Q(t) \quad (\text{forward Kolmogorov eq.})$$
  
 Onde  $Q(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(t, t+h) - I}{h}$   
 Os elementos de  $Q(t)$  são dados por  

$$q_{ii}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(t, t+h) - 1}{h}$$
  

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t+h)}{h} \quad i \neq j$$

## Continuous Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$$1 - p_{ii}(t, t+h) = -hq_{ii}(t) + o(h)$$

$$p_{ij}(t, t+h) = hq_{ij}(t) + o(h)$$

Onde  $o(h)$  é uma função de converge para zero mais rápido que  $h$ .

Dado que  $\sum_j p_{ij}(s, t) = 1, \forall i$ , portanto:

$$\sum_j q_{ij}(s, t) = 0, \forall i$$

Ou seja, a soma de elementos de uma linha de  $Q$  é zero.

## Continuous Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{\partial H(s, t)}{\partial t} = H(s, t)Q(t) \quad (\text{forward Kolmogorov eq.})$$

Para cadeias homogêneas, tem-se:

$$Q(t) = Q \quad \text{e} \quad H(s, t) = \Pi(t)$$

## Continuous Time Markov Chain

- Steady State Analysis

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \quad (\text{homogêneas})$$

Em estado estacionário ( $t \rightarrow \infty$ ), pode ser que

$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t) = \Pi(t)$  exista.

Caso exista, então  $\sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = 0, \text{ então } \Pi Q = 0$$

## Continuous Time Markov Chain

- Soluções para Steady-States

$$\Pi Q = 0$$

$$\sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$$

Onde  $\pi_{s_i}$  fornece a *steady-state probability* de um sistema estar no estado  $s_i$

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$$

Onde  $\pi(t)_{s_i}$  é probabilidade de se estar na estado  $s_i$  no instante  $t$

## Continuous Time Markov Chain

- Uma CTMC é dita irredutível se  $p_{ij} > 0 \forall s_i, s_j \in S$  (todo estado  $s_j$  é alcançável de qualquer estado  $s_i$ ).

- Uma CTMC finita, irredutível e homogênea é dita ergódica (*ergodic*) se o vetor de probabilidade estacionária (*steady-state probability vector*)  $\Pi$  existe.

## Continuous Time Markov Chain

- Soluções para Steady-States

$$\Pi Q = 0 \quad \sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$$

- Métodos diretos

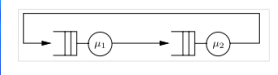
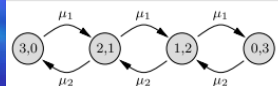
- Eliminação de Gauss
- Decomposição LU
- Método de Grassmann

- Métodos Iterativos

- Power Method
- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel

## Continuous Time Markov Chain

- Número de jobs K = 3
- $\mu_1 = 1/5$ ,
- $\mu_2 = 1/2,5$
- FCFS

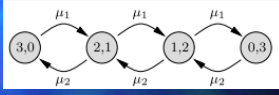
$$Q = \begin{pmatrix} -\mu_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2) & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu_1 + \mu_2) & \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

$\pi(3,0)\mu_1 = \pi(2,1)\mu_2$ ,  
 $\pi(2,1)(\mu_1 + \mu_2) = \pi(3,0)\mu_1 + \pi(1,2)\mu_2$ ,  
 $\pi(1,2)(\mu_1 + \mu_2) = \pi(2,1)\mu_1 + \pi(0,3)\mu_2$ ,  
 $\pi(0,3)\mu_2 = \pi(1,2)\mu_1$ .

$\pi(3,0) = 0.5333$ ,  $\pi(2,1) = 0.2667$ ,  $\pi(1,2) = 0.1333$ ,  $\pi(0,3) = 0.0667$

## Continuous Time Markov Chain


- Número de jobs K = 3
- $\mu_1 = 1/5$ ,
- $\mu_2 = 1/2,5$
- FCFS



$\pi(3,0) = 0.5333$ ,  $\pi(2,1) = 0.2667$ ,  $\pi(1,2) = 0.1333$ ,  $\pi(0,3) = 0.0667$

- Utilização:  $\rho_1 = 1 - \pi_1(0) = 0.9333$ ,  $\rho_2 = 1 - \pi_2(0) = 0.4667$ .
- Throughput  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \rho_1\mu_1 = \rho_2\mu_2 = 0.1867$ .

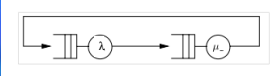
## Continuous Time Markov Chain

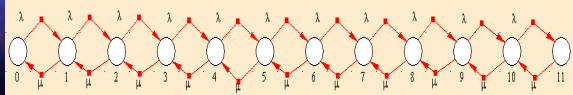


Sharpe  
(chame via Desktop)

C:\Sharpe-Gui\SHARPE GUI Example\A  
 MarkovPerformance model\A  
 A queue with transmission delay\A  
 p239\_240.rpl


- Número de jobs K = 11
- $\lambda = 1$ ,
- $\mu = 1$ .
- FCFS





State probability of State i=(0,1,...,11)  
 State\_Prob(i): 8.33333333e-002

## Continuous Time Markov Chain



Sharpe  
(chame via Desktop)

C:\Sharpe-Gui\SHARPE GUI Examples  
 MarkovDegradeable

### Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios: **CPU\_OK**, **Degradeable** e **Faulty\_CPU**.
- As taxas entre os estados são:  
 CPU\_OK para Degradeable é (**OK\_D\_rate**) 100, Degradeable para CPU\_OK (**D\_OK\_rate**) é 20, Degradeable para Faulty\_CPU (**D\_F\_rate**) é 5, Faulty\_CPU para Degradeable (**F\_D\_rate**) é 10, CPU\_OK para Faulty\_CPU (**OK\_F\_rate**) é 1 e do estado Faulty\_CPU para CPU\_OK (**F\_OK\_rate**) é 1.

## Continuous Time Markov Chain

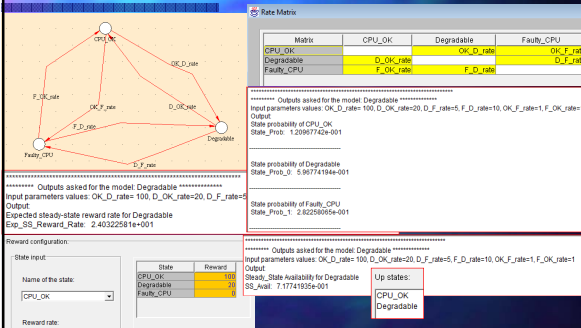
### Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios: **CPU\_OK**, **Degradeable** e **Faulty\_CPU**. As taxas entre os estados são:
- CPU\_OK para Degradeable é (**OK\_D\_rate**) 100, Degradeable para CPU\_OK (**D\_OK\_rate**) é 20, Degradeable para Faulty\_CPU (**D\_F\_rate**) é 5, Faulty\_CPU para Degradeable (**F\_D\_rate**) é 10, CPU\_OK para Faulty\_CPU (**OK\_F\_rate**) é 1 e do estado Faulty\_CPU para CPU\_OK (**F\_OK\_rate**) é 1.



## Continuous Time Markov Chain

### Sistema Computacional com degradação



Matrix	CPU_OK	Degradeable	Faulty_CPU
CPU_OK		OK_D_rate	OK_F_rate
Degradeable	D_OK_rate		D_F_rate
Faulty_CPU	F_OK_rate	F_D_rate	

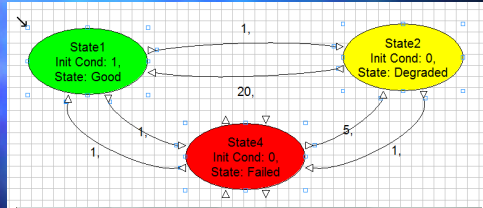
\*\*\*\*\* Outputs asked for the model: Degradeable \*\*\*\*\*  
 Input parameters values: OK\_D\_rate=100, D\_OK\_rate=20, D\_F\_rate=5, F\_D\_rate=10, OK\_F\_rate=1, F\_OK\_rate=1  
 Output:  
 State probability of CPU\_OK  
 State\_Prob: 1.20997742e+001  
 State probability of Degradeable  
 State\_Prob: 5.90774184e-001  
 State probability of Faulty\_CPU  
 State\_Prob: 1.28225805e-001  
 \*\*\*\*\* Outputs asked for the model: Degradeable \*\*\*\*\*  
 Input parameters values: OK\_D\_rate=100, D\_OK\_rate=20, D\_F\_rate=5, F\_D\_rate=10, OK\_F\_rate=1, F\_OK\_rate=1  
 Output:  
 Expected steady-state reward rate for Degradeable  
 Exp\_SS\_Reward\_Rate: 2.40322581e+001

## Continuous Time Markov Chain

- Suponha um sistema representado por um autômato estocástico, onde:
  - $S = \{0, 1, 2\}$
  - $E = \{a, d\}$
  - $f(0,a)=1, f(1,a)=2, f(2,a)=2, f(2,d)=0$
  - $\Gamma(0) = \{a\}, \Gamma(1) = \{a\}, \Gamma(2) = \{a, d\}$
  - Os eventos  $a$  ocorrem com taxa igual  $\lambda$ ,
  - Os eventos  $d$  ocorrem com taxa igual  $\mu$



## Continuous Time Markov Chain



Identifier	Description	Input State	Output State	Transition Reward	Rate	Cost
1	Transition1	State1	State2	Loss	1,000000	0,00
2	Transition2	State2	State1	Loss	20,000000	20,00
3	Transition3	State2	State4	Loss	1,000000	0,00
4	Transition4	State4	State2	Loss	5,000000	20,00
5	Transition5	State1	State4	Loss	1,000000	0,00
6	Transition6	State4	State1	Loss	1,000000	40,00

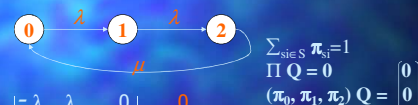
## Continuous Time Markov Chain

Steady State Results:	Value	Result	Value
Result		Result	
Availability	0,857143	Availability	0,857143
Cost Per Unit Time	765,714286	Cost Per Unit Time	765,714286
MTTR	1,355857	Failure Rate	NA
	0,955557	Mean Cost	765,714286
		Mean Unavailability	0,142857
		Reliability	0,857143
		Total Cost	765714,285714
		Total Downtime	142,857143
		Total Lifetime	857,142857
		Unavailability	1,000000

Type	Availability	Cost Per Unit Time	Failure Rate	Mean Cost	Mean Unavailability	Reliability	Total Cost	Total Downtime	Total Lifetime	Unavailability
0	1,000000	1000,000000	0,000000	1,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
100,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	2601,071429	14,285714	100,000000	0,000000
200,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	131171,379411	14,285714	100,000000	0,000000
300,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	23794,607912	14,285714	100,000000	0,000000
400,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	36013,236143	14,285714	100,000000	0,000000
500,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	49389,093286	14,285714	100,000000	0,000000
600,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	63991,593857	14,285714	100,000000	0,000000
700,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	79809,122143	14,285714	100,000000	0,000000
800,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	96891,693857	14,285714	100,000000	0,000000
900,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	115209,321429	14,285714	100,000000	0,000000
1000,00	0,857143	765,714286	NA	0,857143	0,142857	0,857143	134829,000000	14,285714	100,000000	0,000000

## Continuous Time Markov Chain

### State Transition Rate Diagram



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 1 \\ \mu & 0 & -\mu & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi_0 = \pi_1 = \mu / (2\mu + \lambda)$$

$$\pi_2 = \lambda / (2\mu + \lambda)$$

$$\sum_{i \in S} \pi_{si} = 1$$

$$\Pi Q = 0$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\lambda \pi_0 + \mu \pi_2 = 0$$

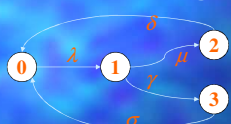
$$\lambda \pi_0 - \lambda \pi_1 = 0$$

$$-\lambda \pi_1 - \mu \pi_2 = 0$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

## Continuous Time Markov Chain

### State Transition Rate Diagram



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) & \mu & \gamma & 1 \\ \delta & 0 & -\delta & 0 & 2 \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i \in S} \pi_{si} = 1$$

$$\Pi Q = 0$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = 1 / (\pi_0 \times \lambda) \text{ - Tempo médio}$$

## Continuous Time Markov Chain

- Métricas - Métricas de interesse pode ser calculadas através da soma ponderada das probabilidades de estado.

- Reward rate em estado estacionário

$$E[Z] = \sum_i r_i \pi_i$$

- Reward rate instantânea

$$E[Z(t)] = \sum_i r_i \pi_i(t)$$

\*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]



## Continuous Time Markov Chain

- Métricas – a probabilidade acumulada de que se esteja num estado é dada por:

$$L_i(t) = \int_0^t \pi_i(u) du$$

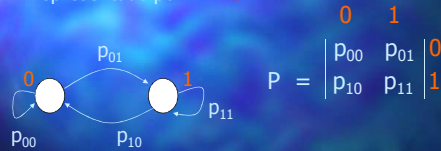
Portanto,  $L_i(t)$  tempo médio (esperado) que se permanece no estado  $i$  durante o intervalo  $[0,t)$ .

\*Ver métricas nas páginas 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

## Discrete Time Markov Chain

- O comportamento de uma rede estocástica é representado por DTMC

Matriz de Probabilidades de Próximo Estados



$$P = \begin{array}{cc|c} & 0 & 1 & \\ \hline p_{00} & p_{01} & 0 & \\ p_{10} & p_{11} & 1 & \end{array}$$

## Discrete Time Markov Chain

- Estado transiente: um estado é transiente se a probabilidade de não se retornar ao estado é diferente de zero.
- Estado recorrente (*recurrent*): o estado  $i$  é chamado de recorrente se a probabilidade de se sair de  $i$  e retornar a  $i$  é 1.
- MRT (*mean recurrence time*):  $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n \times f_{ii}(n)$   
 $f_{ii}$  é a probabilidade de se retornar a  $i$  após  $n$  passos.

## Discrete Time Markov Chain

- Estado recorrente não nulo (*recurrent non null*): um estado é classificado como recorrente não nulo se  $\mu_i < \infty$ , caso contrário é classificado como recorrente nulo (*recurrent null*).
- Se um estado é recorrente e  $\pi_{ii}(n) > 0$ , e seja  $d$  o período. Se  $d = 1$  o estado é aperiódico, se  $d > 1$  é periódico.

## Discrete Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$$P = \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_1 = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13}) \\ A_2 = (a_{21} \ a_{22} \ a_{23}) \\ A_3 = (a_{31} \ a_{32} \ a_{33}) \end{array}$$

$$a_{ij} - \text{probabilidade} \quad \sum_{s_i \in S} a_{ij} = 1$$

$\Pi \cdot P = \Pi$ ,  $\sum_{s_i \in S} \pi_i = 1$ , onde  $\pi_i$  fornece o número relativo de visitas ao estado  $s_i$

## Discrete Time Markov Chain

- Soluções para Transiente

$$\begin{aligned} \Pi(1) &= \Pi(0) P, \\ \Pi(2) &= \Pi(1) P = \Pi(0) P^2 \end{aligned}$$

$$\Pi(k) = \Pi(0) P^k, \quad k=1,2,\dots$$

## Continuos Time Markov Chain

### Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q, \quad \Pi(0) = (\pi_0(0), \dots, \pi_{n-1}(0))$$

Onde  $\pi_i(t)$  é probabilidade de se estar no estado  $s_i$  no instante  $t$

### Métodos de Solução:

- Solução via Sistemas de Eq. Diferencial Ordinária
- Solução através de transformada de Laplace
- Runge-Kutta
- Uniformização (Transformar CTMC em DTMC)

## Continuos Time Markov Chain

### Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q, \quad \Pi(0) = (\pi_0(0), \dots, \pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt}$$

Pela série de Taylor/MacLaurin, temos:

$$e^{Qt} = I + Qt/1! + (Qt)^2/2! + (Qt)^3/3! + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$$

## Continuos Time Markov Chain

### Soluções Transientes

$$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0) \sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$$

- Problemas de arredondamento ocorrem devido aos valores positivos e negativos que  $Q$  contém.
- A matriz  $(Qt)^k$  se torna não-esparso o que requer capacidade muito maior.

Para evitar estes problemas aplica-se o método chamado de uniformização (ou aleatorização - *Randomization*) também chamado de método de Jensen

## Continuos Time Markov Chain

### Uniformização



$$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$$

$$\lambda \geq \max_{s \in S} \{\Lambda(s)\}$$

Sabe-se também que:

$$p_{ij} = q_{ij} / \Lambda(i) \quad \text{e} \quad p_{ik} = q_{ik} / \Lambda(i)$$

Considere que tomemos uma taxa uniforme  $\lambda \geq \Lambda(i)$  onde:  
 $\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$  ( $\lambda - \Lambda(i) = \nu$ )  
 e  $\nu \geq 0$  é a taxa de arbitrária de um evento fictício que não muda o estado  $i$ .

Tempo de permanência no estado  $i$ :  
 $1/(-q_{ii}) = 1/\Lambda(i)$

## Continuos Time Markov Chain

### Uniformização



$$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$$

Sabe-se também que:

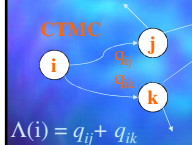
$$p_{ij} = q_{ij} / \Lambda(i) \quad \text{e} \quad p_{ik} = q_{ik} / \Lambda(i)$$

Em todos os estados na CTMC que tiverem tempo de permanência igual a  $1/(-q_{ii})$ , não teremos transição (auto-laço) na DTMC. Para os estados que tiverem tempo de permanência maior, ou seja uma época não é longa o suficiente, estes estados **devem ser revisitados** (auto-laço).

Tempo de permanência no estado  $i$ :  
 $\Delta t = 1/(-q_{ii}) = 1/\Lambda(i)$

## Continuos Time Markov Chain

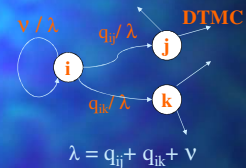
### Uniformização



$$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$$

Sabe-se também que:

$$p_{ij} = q_{ij} / \Lambda(i) \quad \text{e} \quad p_{ik} = q_{ik} / \Lambda(i)$$



$$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$$

$$\lambda \geq \max_{s \in S} \{\Lambda(s)\}$$

### Continuos Time Markov Chain

Uniformização

- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + v$$

$$\lambda \geq \max_{i \in S} \{-q_{ij}\}$$

### Continuos Time Markov Chain

Uniformização

- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + v$$

$$\lambda \geq \max_{i \in S} \{-q_{ij}\}$$

Outra interpretação:  
 Considerando  $1/\lambda = \Delta t$  como uma época (time-step),  $P = I + Q \Delta t$  que é igual aos dois primeiros termos da expansão de Taylor, portanto a cadeia uniformizada é uma aproximação de primeira ordem da CTMC.

### Continuos Time Markov Chain

Uniformização

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{i \in S} \{|q_{ij}|\}$

### Continuos Time Markov Chain

Soluções Transientes

$$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)e^{\lambda t P - \lambda t I}$$

$$= \Pi(0)e^{\lambda P t} e^{-\lambda t} = \Pi(0)e^{\lambda P t} e^{-\lambda t} =$$

$$\Pi(0) e^{-\lambda t} e^{\lambda P t} = \Pi(0) e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda P t)^n / n! =$$

$$\Pi(0) e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n / n!, n \in \mathbb{N}$$

Na matriz P os valores estão entre 0 e 1. Não há valores negativos, o que evita os erros de arredondamento que ocorrem na expansão com a matriz Q.

### Continuos Time Markov Chain

Soluções Transientes

$$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0) e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n / n!, n \in \mathbb{N}$$

$$\psi(\lambda t, n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n] / n!, n \in \mathbb{N}$$

$$\Pi(t) = \Pi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t, n) P^n, n \in \mathbb{N}$$

### Continuos Time Markov Chain

Soluções Transientes

$$\Pi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t, n) \Pi(0) P^n, n \in \mathbb{N}$$

Uma solução iterativa:

$$\Pi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t, n) \hat{\Pi}(n), n \in \mathbb{N}$$

$$\hat{\Pi}(0) = \Pi(0), \hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P, n \in \mathbb{N}$$

Podemos truncar a série de maneira que a se atinja uma exatidão  $1-\epsilon$  ( $\epsilon = \text{erro}$ ).

### Continuos Time Markov Chain

Soluções Transientes

$$\Pi(t) = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t, n) \Pi(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\|\Pi(t) - \Pi(t)\|_{\infty} = \left\| \left[ \Pi(0) e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n / n! \right] - \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t, n) \Pi(n) \right\|_{\infty} \leq \left\| \left[ \Pi(0) e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n / n! \right] \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! \leq \epsilon$$

A desigualdade ocorre, pois  $\{P_{ij}^n\}$  são menores ou iguais a um.

### Continuos Time Markov Chain

Soluções Transientes

Dado que  $\psi(\lambda t, n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!]$  é uma distribuição discreta (Poisson), portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t, n) = 1 = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t, n) + \sum_{n=ke+1}^{\infty} \psi(\lambda t, n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Do slide anterior, tem-se:

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! \leq \epsilon$$

Desta forma:

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! = [1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n / n!] \leq \epsilon$$

### Continuos Time Markov Chain

Soluções Transiente

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! = [1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n / n!] \leq \epsilon$$

$$\sum_{n=0}^{ke} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n! \geq 1 - \epsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n / n! \geq (1 - \epsilon) e^{\lambda t}$$

### Continuos Time Markov Chain

Solução Transiente (exemplo)

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$P = I + Q / \lambda$   
 $Q = \lambda(P - I)$   
 $\lambda \geq \max_{i \in S} \{ |q_{ij}| \}$

Considere  $\epsilon = 10^{-4}$

### Continuos Time Markov Chain

Solução Transiente (exemplo)

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n / n! \geq (1 - \epsilon) e^{\lambda t}$$

Dado  $\lambda = 6$  e considerando  $\epsilon = 10^{-4}$

### Continuos Time Markov Chain

Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado  $\lambda = 6$  e considerando  $\epsilon = 10^{-4}$

Para  $t = 0.1$ , tem-se:  $(1 - \epsilon) e^{\lambda t} = (1 - 10^{-4}) e^{0.6} = 1,8219$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n / n! \geq (1 - \epsilon) e^{\lambda t}$$

$$\sum_{n=0}^4 (0,6)^n / n! = 1,8214$$

$$\sum_{n=0}^5 (0,6)^n / n! = 1,8221$$

## Continuos Time Markov Chain

### Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para  $t=0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(\lambda t, n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n] / n! , n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{\Pi}(t) = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t, n) \hat{\Pi}(n) , n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

## Continuos Time Markov Chain

### Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para  $t=0.1 \Rightarrow ke = 5$  Portanto:

$$\hat{\Pi}(0) = \Pi(0) = (1, 0, 0) \text{ obtêm-se:}$$

$$\hat{\Pi}(1), \hat{\Pi}(2), \hat{\Pi}(3), \hat{\Pi}(4), \hat{\Pi}(5) \text{ através de}$$

$$\hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P , n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

## Continuos Time Markov Chain

### Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para  $t=0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(0.6, n) = [e^{-0.6} (0.6)^n] / n! , n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^5 \psi(0.6, n) \hat{\Pi}(n) , n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

## Continuos Time Markov Chain

### Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para  $t=0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(0.6, n) = [e^{-0.6} (0.6)^n] / n! , n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\psi(0.6, 0) = [e^{-0.6} (0.6)^0 / 0!]$$

$$\psi(0.6, 1) = [e^{-0.6} (0.6)^1 / 1!]$$

$$\psi(0.6, 2) = [e^{-0.6} (0.6)^2 / 2!]$$

$$\psi(0.6, 3) = [e^{-0.6} (0.6)^3 / 3!]$$

$$\psi(0.6, 4) = [e^{-0.6} (0.6)^4 / 4!]$$

$$\psi(0.6, 5) = [e^{-0.6} (0.6)^5 / 5!]$$

## Continuos Time Markov Chain

### Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para  $t=0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(0.6, n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n] / n! , n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^5 \psi(0.6, n) \hat{\Pi}(n) , n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

## Continuos Time Markov Chain

### Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

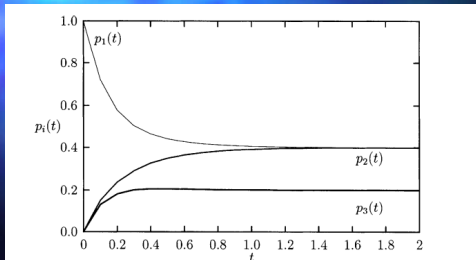
Para  $t=0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^5 \psi(0.6, n) \hat{\Pi}(n) , n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = (0.71, 0.1502, 0.1268)$$

## Continuous Time Markov Chain

### Solução Transiente (exemplo)



## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Considere uma DTMC, contudo também considere um tempo de permanência (no domínio contínuo:  $t \in \mathbb{R}$ ), em cada estado  $i \in S$  da DTMC, com distribuição  $F_i(t)$  e densidade  $f_i(t)$ .

- Este modelo é denominado SMC.

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- SMC é caracterizada por:
  - matriz de probabilidade de 1 passo ( $P$ ),
  - vetor de probabilidade inicial ( $\Gamma(0)$ ) e
  - o vetor de distribuições de permanência nos estados ( $F(t) = (F_1(t), \dots, F_i(t), \dots, F_{|S|}(t))$ ).

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Interpretação
  - Em cada instante em que ocorrem mudanças de estados, a SMC tem comportamento igual ao da correspondente DTMC (comportamento descrito por  $P$ ) e é independente do passado.
  - Quando se alcança um estado  $i$ , um tempo distribuído conforme  $F_i(t)$  deve se passar para que ocorra nova transição entre estados.

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Encontre a solução estacionária para DTMC embutida (caracterizada por  $P$ ):
    - $\Omega P = \Omega$
    - $\sum_{i \in S} \omega_i = 1$
  - Calcule o tempo médio de permanência ( $h_i$ ) em cada estado  $i$ :
    - $h_i = \int_0^{\infty} t f_i(t) dt$

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - A probabilidade de estado estacionário da SMC é obtida por:
    - $\pi_i = (\omega_i \times h_i) / (\sum_{j \in S} \omega_j \times h_j), \forall i$
  - Em muitas aplicações,  $h_i$  é fornecido diretamente.
- Solução transiente é mais sofisticada.

### Semi-Markovian Chain (SMC)

■ Solução Estacionária

– Exemplo:

$\Omega P = \Omega$   
 $\sum_{i \in S} \omega_i = 1$   
 $h_0=10, h_1=5$

Tempo médio de permanência

### Semi-Markovian Chain (SMC)

■ Solução Estacionária

– Exemplo:

Matriz de Probabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 1 & 0,7 & 0,3 & 1 \end{array}$$

$\Omega P = \Omega$   
 $\sum_{i \in S} \omega_i = 1$   
 $h_0=10, h_1=5$

$\omega_0=0,5385$   
 $\omega_1=0,4615$

### Semi-Markovian Chain (SMC)

■ Solução Estacionária

– Exemplo:

Matriz de Probabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 1 & 0,7 & 0,3 & 1 \end{array}$$

$\omega_0=0,5385$   
 $\omega_1=0,4615$

$$\pi_i = \frac{(\omega_i \times h_i)}{(\sum_{j \in S} \omega_j \times h_j)}, \forall i \in S$$

$$\pi_0 = \frac{(0,5385 \times 10)}{(0,5385 \times 10) + (0,4615 \times 5)}$$

$$\pi_1 = \frac{(0,4615 \times 5)}{(0,5385 \times 10) + (0,4615 \times 5)}$$

### Semi-Markovian Chain (SMC)

■ Solução Estacionária

– Exemplo:

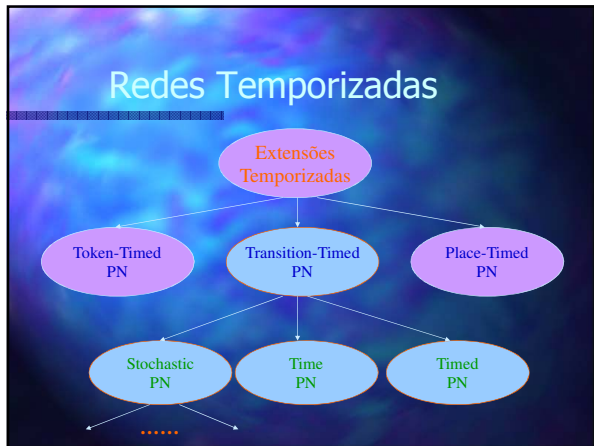
Matriz de Probabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 1 & 0,7 & 0,3 & 1 \end{array}$$

$\omega_0=0,5385$   
 $\omega_1=0,4615$

$$\pi_0 = \frac{(0,5385 \times 10)}{(0,5385 \times 10) + (0,4615 \times 5)} = 0,7$$

$$\pi_1 = \frac{(0,4615 \times 5)}{(0,5385 \times 10) + (0,4615 \times 5)} = 0,3$$

- ## Redes Temporizadas
- Ramchandani, 1973 - Transition Timed Net
  - Merlin, 1976 - Transition Time Net
  - Sifakis, 1977 - Place Timed Net

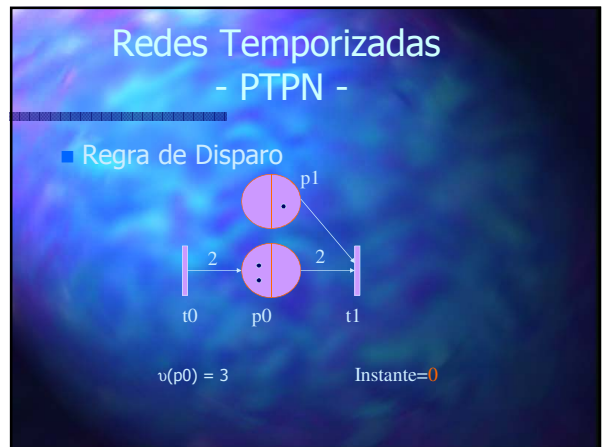
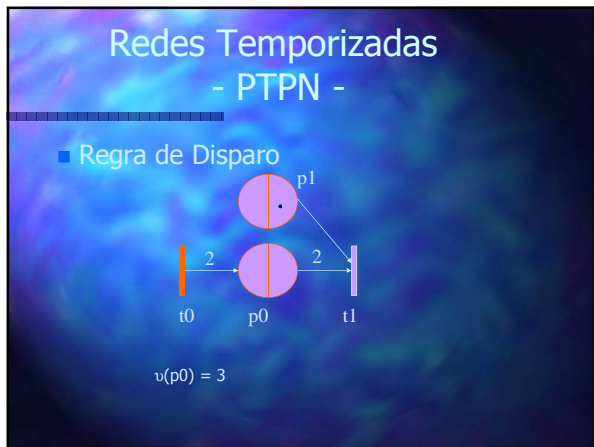
## Redes Temporizadas Estocásticas

- ⊗ Natkin - 1980
- ⊗ Molloy - 1981
- ⊗ Marsan et al. - 1984

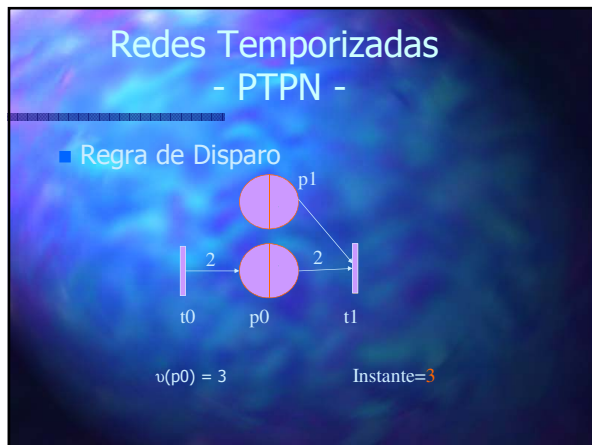
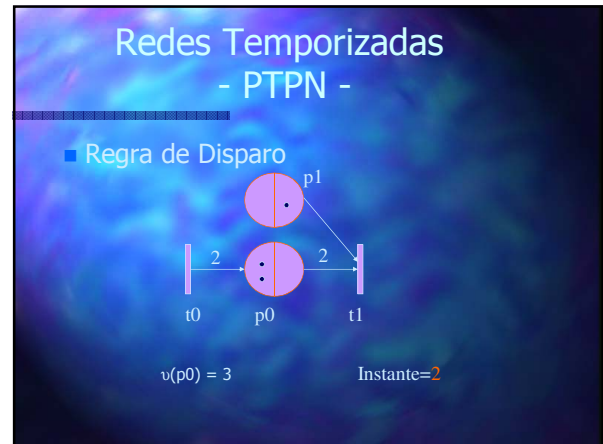
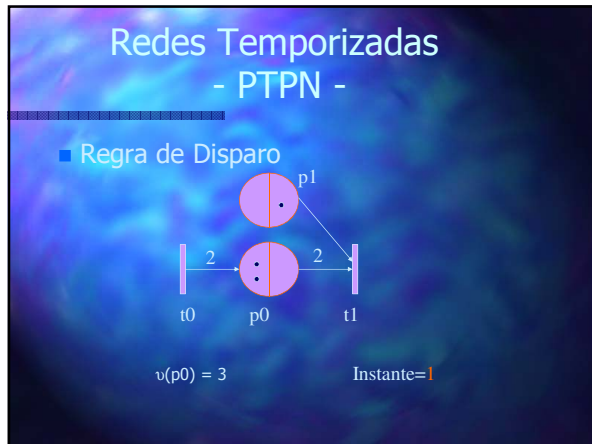
É uma rede temporizada onde o *delay* associado à transição é uma variável aleatória de distribuição exponencial

## Redes Temporizadas

- **Redes de Petri com Lugares Temporizados (PTPN)** (Sifakis77)
- Definição:  $PTPN = (P, T, F, K, W, M_0, \Gamma, \nu)$ , onde
  - $P$  é o conjunto de lugares,
  - $T$  o conjunto de transições,
  - $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  uma relação que representa os arcos
  - $W$  - Valoração (peso dos arcos) -  $W: F \rightarrow \mathbb{N}$
  - $M_0$  - Marcação inicial -  $M_0: P \rightarrow \mathbb{N}$
  - $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, \dots\}$  números reais denominada base de tempo.
  - $\nu: P \rightarrow \Gamma$  um mapeamento que  $\nu(p) = \gamma_j$







- ### Redes de Petri Temporizadas - Tempo Associado às Transições -
- Conceitos Básicos:
- **Duração (disparo em três fases)**
    - Marcas são consumidas dos lugares de entrada
    - Há uma duração
    - Marcas são geradas nos lugares de saída
  - **Disparo atômico**
    - As marcas permanecem nos lugares de entrada pelo período igual ao *delay* associada à transição. Após o *delay* as marcas são consumidas e geradas nos lugares de saída imediatamente.

- ### Redes de Petri Temporizadas - Tempo Associado às Transições -
- Conceitos Básicos:
- **Duração (disparo em três fases)**
    - Pode ser representada por uma rede com disparo atômico
    - Modelo mais compacto
    - O estado é uma informação mais complexa do que o modelo não-temporizado
  - **Disparo atômico**
    - Pode representar o modelo com duração
    - O conjunto de marcações alcançáveis é um sub-conjunto das marcações do modelo não-temporizado.

- ### Redes de Petri Temporizadas - Tempo Associado às Transições -
- Conceitos Básicos:
- **Regras de Seleção:**
    - **Pré-seleção:** (duração e *delay*)
      - Prioridade
      - Probabilidade
    - **Race (corrida):** (*delay*)
      - Transições habilitadas com menor *delays* são disparadas

## Redes de Petri Temporizadas

### - Tempo Associado às Transições -

#### ■ Conceitos Básicos:

- Quando uma das transições conflitantes é desabilitada pelo disparo da outra, o que acontece com o *timer* da que ficou desabilitada quando a mesma tornar-se habilitada outra vez?

## Redes de Petri Temporizadas

### - Tempo Associado às Transições -

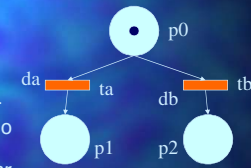
- Como fica a memorização do tempo de habilitação anterior?

#### ■ *Continue*

- O *timer* associado à transição mantém o valor atual e quando a transição se tornar novamente habilitada o valor do *timer* iniciará daquele valor.

#### ■ *Restart*

- Quando a transição for novamente habilitada o *timer* será re-iniciado.



## Redes de Petri Temporizadas

### - Tempo Associado às Transições -

#### ■ Conceitos Básicos:

- O que acontece com o *timer* das transições habilitadas após o disparo de uma transição?

- Todas as transições. Não somente as transições conflitantes.

• Algumas políticas de memória podem ser construídas

## Redes de Petri Temporizadas

### - Tempo Associado às Transições -

#### ■ Conceitos Básicos:

##### - *Resampling*

- Após cada disparo os *timers* de **TODAS as transições são re-iniciado** (*restart*)

Não há memória

Após descartar todos os *timers*, os valores iniciais são associados a todas as transições que se tornarem habilitadas na nova marcação.

## Redes de Petri Temporizadas

### - Tempo Associado às Transições -

#### ■ Conceitos Básicos:

##### - *Enabling Memory*

- Após cada disparo os *timers* das **transições que ficaram desabilitadas** são re-iniciados (*restart*)
- As **transições que permaneceram habilitadas** com o disparo matêm seus valores presentes (*continue*)

## Redes de Petri Temporizadas

### - Tempo Associado às Transições -

#### ■ Conceitos Básicos:

##### - *Age Memory*

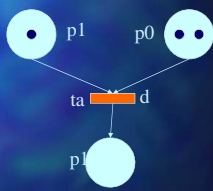
- Após cada disparo os *timers* de **todas** as transições são mantidos em seus valores presentes (*continue*)

## Redes de Petri Temporizadas

- Tempo Associado às Transições -

■ **Conceitos Básicos:**

- **Grau de Habilitação (Enabling Degree)**
  - É o número de vezes que uma determinada transição pode ser disparada, numa determinada marcação, antes de se torna desabilitada.
  - Quando o grau de habilitação é **maior que um**, atenção especial à semântica de temporização deve ser considerada.



## Redes de Petri Temporizadas

- Tempo Associado às Transições -

■ **Conceitos Básicos:**

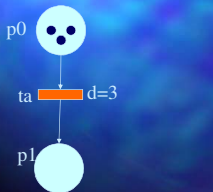
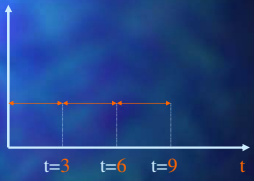
- Semântica de Temporização
  - *Single-server firing semantics*
  - *Infinite-server firing semantics*
  - *Multiple-server firing semantics*
    - K é o máximo grau de paralelismo. Quando  $k \rightarrow \infty$ , *Multiple-server firing semantics* é igual a *infinite-server firing semantics*.

## Redes de Petri Temporizadas

- Tempo Associado às Transições -

■ **Conceitos Básicos:**

- *Single-server firing semantics*

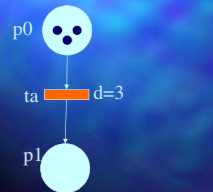
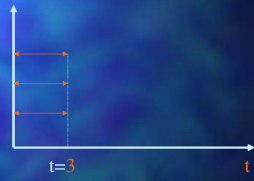



## Redes de Petri Temporizadas

- Tempo Associado às Transições -

■ **Conceitos Básicos:**

- *Infinite-server firing semantics*

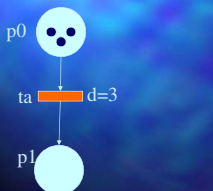
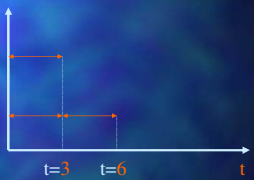



## Redes de Petri Temporizadas

- Tempo Associado às Transições -

■ **Conceitos Básicos:**

- *Multiple-server firing semantics k=2*


The SPN = (P, T, I, O, H, II, G, M<sub>0</sub>, Attrs) be a stochastic Petri net, where

- P = {p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, ..., p<sub>n</sub>} is the set of places,
- T = {t<sub>1</sub>, t<sub>2</sub>, ..., t<sub>m</sub>} is the set of transitions,
- I ∈ (N<sup>n</sup> → N<sup>m</sup>)<sup>\*\*\*</sup> is a matrix of marking-dependent multiplicities of input arcs, where I<sub>ij</sub> entry of I gives the (possibly marking-dependent) arc multiplicity of input arcs from place p<sub>j</sub> to transition t<sub>i</sub> (I ⊆ (P × T) × (T × P) → set of arcs),
- O ∈ (N<sup>m</sup> → N<sup>n</sup>)<sup>\*\*\*</sup> is a matrix of marking-dependent multiplicities of output arcs, where o<sub>ij</sub> entry of O specifies the possibly marking-dependent arc multiplicity of output arcs from transition t<sub>i</sub> to place p<sub>j</sub>,
- H ∈ (N<sup>m</sup> → N<sup>n</sup>)<sup>\*\*\*</sup> is a matrix of marking-dependent multiplicities describing the inhibitor arcs, where h<sub>ij</sub> entry of H returns the possibly marking-dependent arc multiplicity of an inhibitor arc from place p<sub>j</sub> to transition t<sub>i</sub>,
- II ∈ (N<sup>m</sup> → N<sup>n</sup>)<sup>\*\*\*</sup> is a vector that assigns a priority level to each transition,
- G ∈ (N<sup>m</sup> → [true, false])<sup>\*\*</sup> is a vector that assigns a guard condition related to place markings to each transition. In the presence of an inhibitor arc, a transition is enabled to fire if each input place connected by a normal arc has a number of tokens equal to the arc weight, and if each input place connected by an inhibitor arc has no tokens),
- M<sub>0</sub> ∈ N<sup>n</sup> is a vector that contains the initial marking for each place (initial state),
- Attrs = (Dist, W, Markdep, Policy, Concurrency)<sup>m</sup> comprises the set of attributes for transitions, where
  - Dist ∈ [0, ∞) → F is a possibly marking dependent firing probability distribution function (this distribution can be marking dependent) (the domain of F is [0, ∞)),
  - W : T → IR is the weight function, that represents the weight (w<sub>i</sub>) of immediate transitions and the rate λ<sub>i</sub> of timed transitions, where:
    - w<sub>i</sub> ≥ 0, if it is an immediate transition;
    - λ<sub>i</sub> > 0, otherwise;
  - Markdep ∈ {constant, enabledep}, where the transition firing timing distribution could be marking independent (constant) or enabling dependent (enabledep, the distribution depends on the actual enabling condition).
- Policy ∈ {prel, prei} is the preemption policy (prel, preemtor repeat different means that when a preempted transition becomes enabled again the previous elapsed firing time is lost; prei—preemtor resume, in which the firing time related to a preempted transition is resumed when the transition becomes enabled again).
- Concurrency ∈ {s, i} is the concurrency degree of transitions, where s represents single server semantics and i depicts infinity server semantics in the same sense as in queuing models.

## Redes com Prioridade

**Definição:** PN=(P,T,I,O,H,II,M<sub>0</sub>)

**H** : P×T → κ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

**P,T,I,O** definidos como usualmente.

**II** : T → κ é uma função que mapeia às transições níveis de prioridade.

**M<sub>0</sub>**- Marcação inicial - M<sub>0</sub>: P → κ

## Redes com Prioridade

**PN=(P,T,I,O,H,II,M<sub>0</sub>)**

**Structural Causal relation**

**Indirect Conflict**

**Structural Conflict**

**Extended Conflict Set - ECS = {t<sub>1</sub>, t<sub>3</sub>, t<sub>4</sub>, t<sub>k</sub>}**

## Redes com Prioridade

**PN=(P,T,I,O,H,II,M<sub>0</sub>)**

**Structural Causal relation**

**Remoção da Confusão**

- π<sub>t<sub>1</sub></sub> = π<sub>t<sub>k</sub></sub>
- π<sub>t<sub>1</sub></sub>, π<sub>t<sub>3</sub></sub>, π<sub>t<sub>4</sub></sub> > π<sub>t<sub>k</sub></sub>

**Structural Conflict**

## Redes Estocásticas

**Definição:** SPN=(P,T,I,O,W,M<sub>0</sub>)

**P** é o conjunto de lugares,  
**T** o conjunto de transições,  
**I**: P×T → κ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,  
**O**: P×T → κ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições  
**W**: T → R<sup>+</sup> (ou W: T×M → R<sup>+</sup>) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

**M<sub>0</sub>**- Marcação inicial - M<sub>0</sub>: P → κ

## Redes Estocásticas

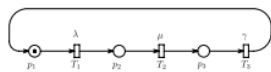
**Definição:** SPN=(P,T,I,O,H,W,M<sub>0</sub>)

**P** é o conjunto de lugares,  
**T** o conjunto de transições,  
**I**: P×T → κ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,  
**O**: P×T → κ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições  
**H**: P×T → κ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores  
**W**: T → R<sup>+</sup> (ou W: T×M → R<sup>+</sup>) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

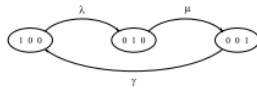
**M<sub>0</sub>**- Marcação inicial - M<sub>0</sub>: P → κ

## Redes Estocásticas

Rede Estocástica



Grafo de Marcações / CTMC



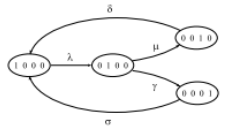
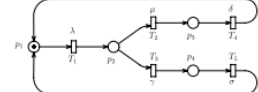
## Redes Estocásticas

### Semântica de Disparo de Transição

- Uma transição  $t_j$  é **disparável se estiver habilitada**
  - Regras de habilitação
 
$$M[t_j > , \quad M(p_i) \geq I(p_i, t_j) \quad \forall p_i \in P$$
- Transições com **delays menores** disparam primeiro (*Race*)
- Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo
 
$$\text{Se } M[t_j > M' \quad M'(p_i) = M(p_i) - I(p_i, t_j) + O(p_i, t_j), \quad \forall p_i \in P$$

## Redes Estocásticas

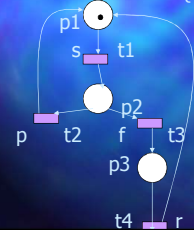
Conflito



## Redes Estocásticas

- Definição:  $SPN = (P, T, I, O, W, M_0)$
- Grafo de Marcações

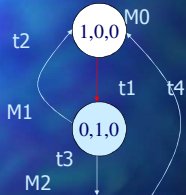
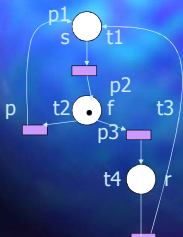
$$W : T \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$



## Redes Estocásticas

- Definição:  $SPN = (P, T, I, O, W, M_0)$
- Grafo de Marcações

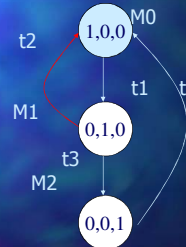
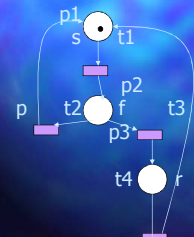
$$W : T \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$



## Redes Estocásticas

- Definição:  $SPN = (P, T, I, O, W, M_0)$
- Grafo de Marcações

$$W : T \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$



## Redes Estocásticas

- Definição:  
 $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$   
 $W : T \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- Grafo de Marcações

## Redes Estocásticas

- Definição:  
 $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$   
 $W : T \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- Grafo de Marcações

## Redes Estocásticas

- Definição:  
 $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$   
 $W : T \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- Grafo de Marcações

## Redes Estocásticas

- Definição:  
 $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$   
 $W : T \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- Grafo de Marcações

## Redes Estocásticas

### Semântica de Temporização

The diagram illustrates the semantics of timing in a Petri net. It shows a Petri net with a transition  $t_1$  and places  $p_1$  and  $p_2$ . The transition has a firing rate  $\lambda$ . The places have marking rates  $\mu_1$  and  $\mu_2$ . The SSS (Stochastic State Space) graph shows transitions between states  $(1,1)$ ,  $(0,2)$ , and  $(2,0)$  with rates  $\lambda$ ,  $\mu_1$ , and  $\mu_2$ . The ISS (Infinite State Space) graph shows transitions between states  $(1,1)$ ,  $(0,2)$ , and  $(2,0)$  with rates  $\lambda$ ,  $3\lambda$ , and  $2\mu_1$ .

## Redes Estocásticas

- Em geral, a CTMC associada a uma SPN é obtida da seguinte maneira:
  - O espaço de estados  $S = \{s_i\}$  corresponde ao *reachability set*  $RS(N, M_0) = \{M_i\}$  da rede marcada  $N$ .
  - As *transition rates* de cada estado  $s_i$  (corresponde a marcação  $M_i$ ) para cada estado  $s_j$  ( $M_j$ ) são obtidas pela *soma de todas as firing rates* associadas às *transições* que estão habilitadas em  $M_i$  e cujo disparo *levam a  $M_j$* .

## Redes Estocásticas

- Assumindo-se que todas as transições operam em *Single Server Semantics (SS)* e taxas (*rates*) independentes da marcação, tem-se:
 
$$q_i = \begin{cases} \sum_{\alpha_k \in e_i(M)} \omega_k & (i=j) \\ -q_j & (i \neq j) \end{cases}$$
- onde  $Q = [q_{ij}]$  gerador infinitesimal (matriz de taxas)
- $q_i = \sum_{\alpha_k \in e_i(M)} \omega_k$
- $\omega_k$  é a taxa de disparo de  $t_k$ .
- $e_i(M_i) = \{t_k \mid t_k \in e(M_i) \wedge M_i[t_k > M_j]\}$  é o conjunto de transições que estão habilitadas em  $M_i$  e cujo disparo levam a  $M_j$ .
- $e(M_i)$  conjunto de transições habilitadas em  $M_i$ .

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Definição:

$GSPN = (P, T, I, O, H, \Pi, W, M_0)$

$P, T, I, O$  definidos como usualmente.

$H: P \times T \rightarrow \mathcal{R}$  é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$\Pi: T \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ for temporizada (monótona)} \\ \mathcal{R}^+ & \text{se } t \text{ for imediata} \end{cases}$

$W: T \rightarrow \mathcal{R}^+$  (ou  $W: T \times M \rightarrow \mathcal{R}^+$ ) é uma função que associa **taxas de distribuição exponencial às transições temporizadas** e **pesos** usados na computação das probabilidades de disparo das **transições imediatas**

$M_0$  - Marcação inicial -  $M_0: P \rightarrow \mathcal{R}$

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

### Semântica de Disparo de Transição

- Regras de habilitação
 
$$M[t_i > , \quad M(p_i) \geq I(p_i, t_i) \\ \forall p_i \in P$$
- Uma transição  $t_i$  é **disparável se estiver habilitada**
- Transições com **ordens menores** disparam primeiro (*Race*)
- Transições **imediatas** disparam **instantaneamente** com **prioridades** sobre as temporizadas
- Diferentes **níveis de prioridade** podem ser associados às **transições imediatas**.
- Transições **imediatas** com **mesmo nível de prioridade** associada **disparam** de acordo com o **peso associado** a cada uma.
- Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo
 
$$\text{Se } M[t_i > M' \\ M'(p_i) = M_0(p_i) - I(p_i, t_i) + O(p_i, t_i), \quad \forall p_i \in P$$

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

### Reachability Set

$RS = VS \cup TS$

$VS \cap TS = \emptyset$

**VS – Vanishing set:**  
 Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

**TS – Tangible set:**  
 Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

### Grafo de Marcações

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

$P\{t_k \mid m_j\} = \omega_k / q_j$

$q_j = \sum_{\alpha_k \in e_j(M_j)} \omega_k$

$\omega_k$  é a taxa de disparo de  $t_k$ .

$e(M_j)$  conjunto de transições habilitadas em  $M_j$ .

Quando a marcação é *vanishing*,  $\omega_k$  é um peso (transição imediata).

Quando a marcação é *tangible*,  $\omega_k$  é a taxa.

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

Assumindo a ausência de confusão, o cálculo do ECS consiste em particionar as transições imediatas em conjuntos os quais a transição de cada conjunto possam estar em conflito.

Contudo, transições de diferentes ECS são concorrentes.

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

Quando transições de um único ECS são as únicas imediatas

$$P\{t_k | m_i\} = \omega_k / w_k(m_i)$$

$$w_k(m_i) = \sum_{t_j \in [ECS(t_k) \wedge e(M_i)]} \omega_j$$

Os pesos podem ser diferentes em diferentes marcações, mas a relação entre estes pesos é constante (sem confusão)

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Reachability Set

$$RS = VS \cup TS$$

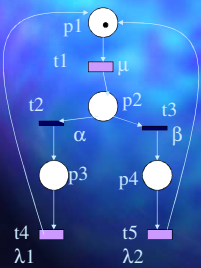
$$VS \cap TS = \emptyset$$

VS – Vanishing set:

Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

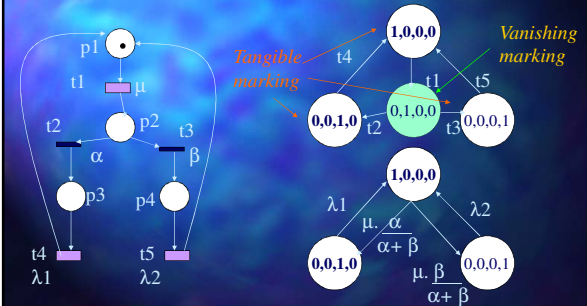
TS – Tangible set:

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.



## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Grafo de Marcações



## Redes Estocásticas

- Para garantir a existência de probabilidade estacionária, a rede deve ser:

- limitada (*bounded*)

- reversível e

- livre de bloqueios (*deadlock-free*)

$$\prod Q = 0, \sum_{M_i \in RS(N)} \pi_i = 1$$

Probabilidade estacionária de uma marcação  $M_i$

$$(\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_n) \quad Q = (0, \dots, 0, \dots, 0)$$

$$\sum_1^n \pi_i = 1$$

## Redes Estocásticas

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q, \quad \Pi(0) = (\pi_0(0), \dots, \pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt}$$



## Redes Estocásticas

- Dadas  $M_j \in \mathcal{TS}(N)$ , a probabilidade de se disparar  $t_k$  em  $M_j$  é:  

$$p(t_k, M_j) = \lambda_k / \lambda_j, \quad \lambda_j = \sum_{t \in T_j} \lambda_t$$

$T_j = \{t \mid M_j[t >]\}$   
 $\lambda_t$  é a taxa associada a transição  $t$  através da  $W$

## Redes Estocásticas

- Dadas  $M_i \in \mathcal{VS}(N)$ , a probabilidade de se disparar  $t_k$  em  $M_i$  é:  

$$p(t_k, M_i) = \omega_k / \omega_k(M_i),$$

$$\omega_k(M_i) = \sum_{j \in \{ECS(t_k) \cap M_i[t >]\}} \omega_j$$

$ECS(t_k)$  – *Extended Conflict Set*  
 $\omega_k(M_i)$  o peso associado à transição  $t_k$  na marcação  $M_i$ .

Caso haja mais de uma transição imediata, de diferentes ECS, habilitadas em uma marcação  $M_i$ , não importa a ordem de disparo, desde que a rede seja livre de confusão.

## Redes Estocásticas

- Tempo de permanência numa marcação (*sojourn time*)  

$$tm_j = 1/\lambda_j$$

$\lambda_j = \sum_{t \in T_j} \lambda_t$   
 $T_j = \{t \mid M_j[t >]\}$   
 $\lambda_t$  é a taxa associada a transição  $t$  através da  $W$

## Redes Estocásticas

- Probabilidade que um lugar  $p_j$  tenha  $k$  marcas
- Número esperado de marcas no lugar  $p_j$

$$p(p_j, k) = \sum_{i \in S_1} p_i$$
  
 $S_1 = \{i \in \{1, 2, \dots, S\} \mid M(p_j) = k\}$

$$Em(p_j) = \sum_{x=1}^K x \cdot p(p_j, x)$$
  
 $K$  é o número máximo de marcas que o lugar  $p_j$  pode conter

## Redes Estocásticas

- Throughput rate* de uma transição temporizada

$$TR(t_j) = \sum_{i \in S_2} p_i \cdot \lambda_j$$
  
 $S_2 = \{i \in \{1, 2, \dots, S\} \mid M_i[t_j >]\}$

- $p_i$  é a probabilidade estacionária de uma marcação  $M_i$  que habilita  $t_j$
- $\lambda_j$  é a taxa associada à transição  $t_j$

## Redes Estocásticas

- Tempo médio de disparo de uma transição

$$T = 1/TR(t_j) = 1/(\sum_{i \in S_2} p_i \cdot \lambda_j)$$
  
 $S_2 = \{i \in \{1, 2, \dots, S\} \mid M_i[t_j >]\}$

- $p_i$  é a probabilidade estacionária de uma marcação  $M_i$  que habilita  $t_j$
- $\lambda_j$  é a taxa associada à transição  $t_j$

## Redes Estocásticas

- Throughput rate** de uma transição imediata
  - Pode ser calculada de uma transição exponencial e a estrutura do modelo GSPN.

$$TR(t_j) = TR(t_i) \times (\omega_j / \omega_j + \omega_k)$$

*t<sub>j</sub> e t<sub>k</sub> são as únicas transições de um ECS.*

## Redes Estocásticas

- Little's law**

$$E[X] = \lambda E[s] \text{ (ergódico)}$$
  - E[X] - tamanho médio da fila.
  - E[s] - Tempo médio de serviço do sistema.
  - λ - taxa de chegada

## Redes Estocásticas

- Tempo médio de espera em um lugar**
  - $$Wait(p_i) = \frac{Em(p_i)}{\sum_{t_j \in O(p_i)} TR(t_j)} = \frac{Em(p_i)}{\sum_{t_j \in O(p_i)} TR(t_j)}$$
    - Em(p<sub>i</sub>) é o número médio de marcas no lugar p<sub>i</sub>.
    - TR(t<sub>j</sub>) throughput da transição t<sub>j</sub>.

## Redes Estocásticas

• Exemplo – Banco

Todas as transições têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.

Arriving\_Time = 2  
 Service\_Time = 4  
 Work\_Slot\_Time = 120  
 Resting\_Time = 15

Number\_of\_Client\_in\_the\_Queue = 74.8073013  
 System\_Time = 18.8035540  
 Probability\_of\_least\_one\_Server\_not\_being\_serving = 0.0  
 Waiting\_Time = 18.3623886  
 Probability\_Client\_Does\_Not\_Enter\_the\_Bank = 0.0

## Redes Estocásticas

### Análise Qualitativa

**Structural Analysis Output**

ESTRUCTURAL ANALYSIS

ECS: Does\_Not\_Enter\_Start\_Serving  
 Warning: inner confusion between Start\_Serving and Does\_Not\_Enter  
 Warning: direct external (inhibitor)confusion between Start\_Serving and Does\_N

The net contains 3 P-invariants:

Queue + Queue\_Capacity + OS  
 Servers\_Available + Servers\_Out\_of\_Service + Client\_Being\_Served + NS  
 Client + Client\_Arrive\_to\_Bank + Client\_Cannot\_Enter\_the\_Bank + NC

All places are covered by p-invariants.

EXTENDED CONFLICT SET

Priority Immediate Transitions

1 Enter  
 1 Does\_Not\_Enter\_Start\_Serving

Removing temporary files

Structural Analysis finished

**Estimate StateSpace Output**

Estimating stateSpace ...  
 Result of estimation (based on state equation with backtracking):  
 StateSpace = 1268  
 Time passed with computation: 7.11 s  
 Removing temporary files

Estimate StateSpace finished.

**Traps Output**

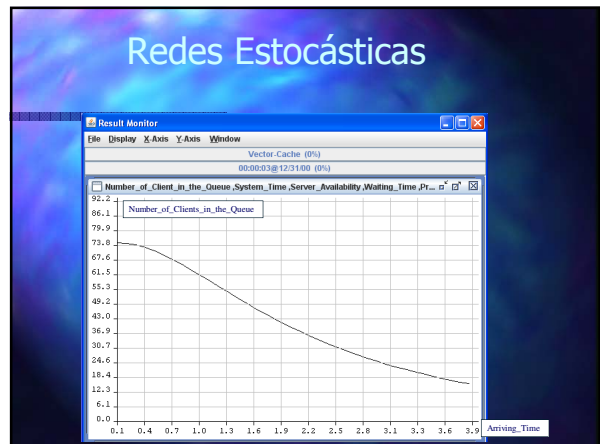
Removing temporary files  
 Calculation of traps:  
 Time passed with computation: 0.14 s  
 No. of traps = 3  
 MARKING: 2 { Servers\_Available Servers\_Out\_of\_Service Client\_Being\_Served }  
 MARKING: 1 { Client\_Arrive\_to\_Bank Client\_Cannot\_Enter\_the\_Bank }  
 MARKING: 75 { Queue Queue\_Capacity }

Traps finished

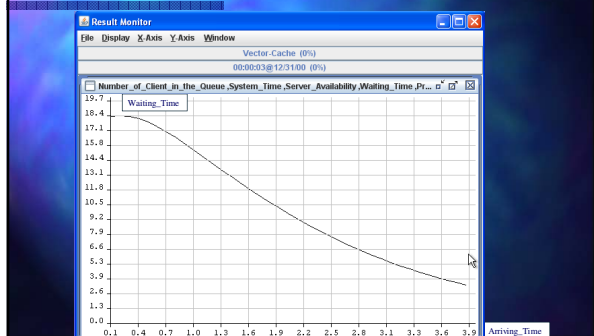
**Siphons Output**

Removing temporary files  
 Calculation of siphons:  
 Time passed with computation: 0.17 s  
 No. of siphons = 3  
 MARKING: 2 { Servers\_Available Servers\_Out\_of\_Service Client\_Being\_Served }  
 MARKING: 1 { Client\_Arrive\_to\_Bank Client\_Cannot\_Enter\_the\_Bank }  
 MARKING: 75 { Queue Queue\_Capacity }

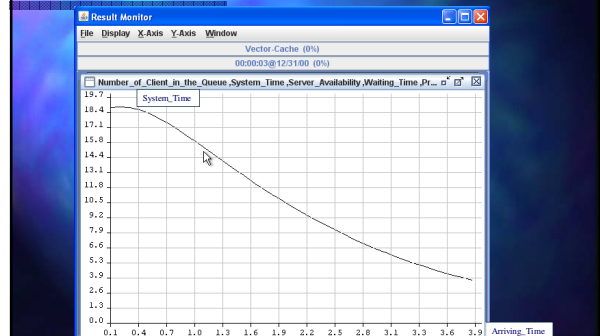
Siphons finished



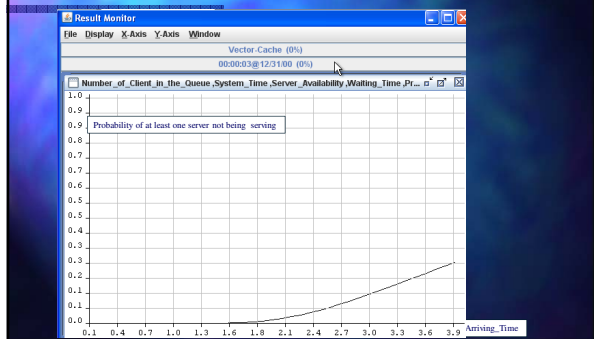
# Redes Estocásticas



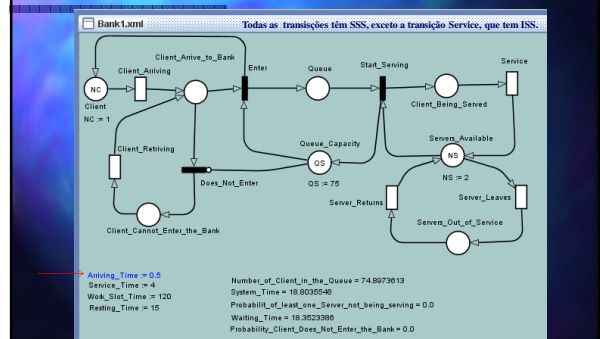
# Redes Estocásticas



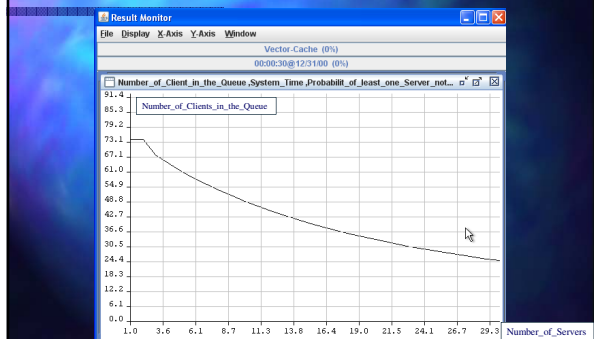
# Redes Estocásticas



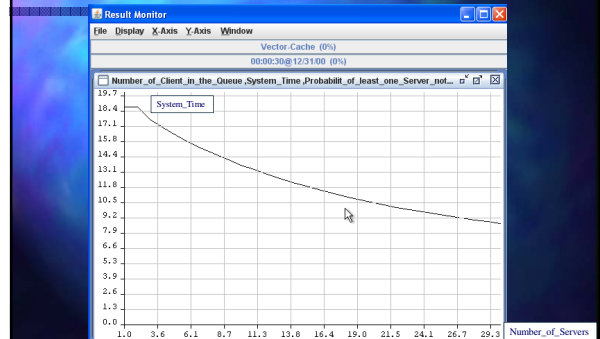
# Redes Estocásticas



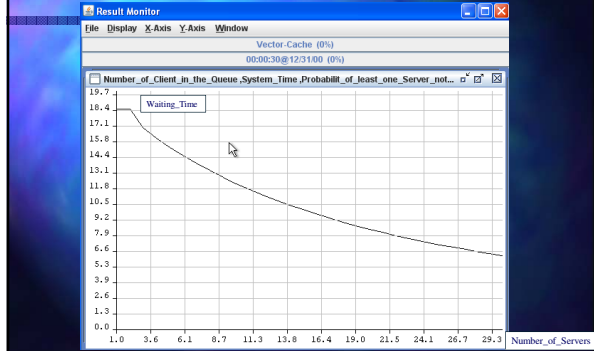
# Redes Estocásticas



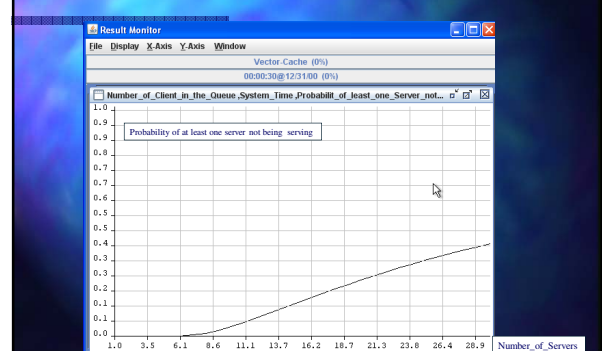
# Redes Estocásticas



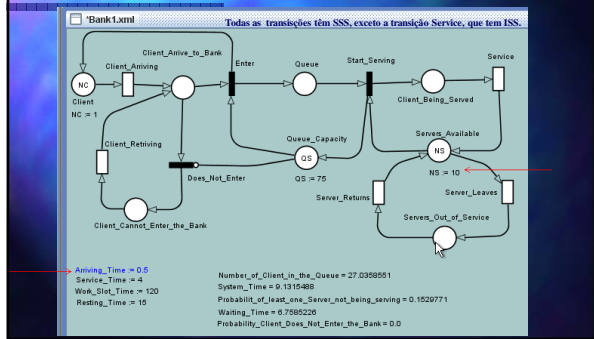
# Redes Estocásticas



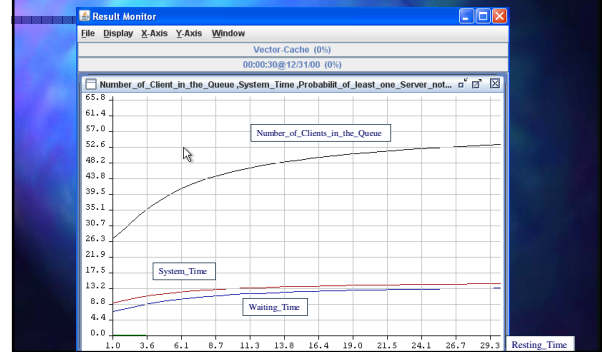
# Redes Estocásticas



# Redes Estocásticas

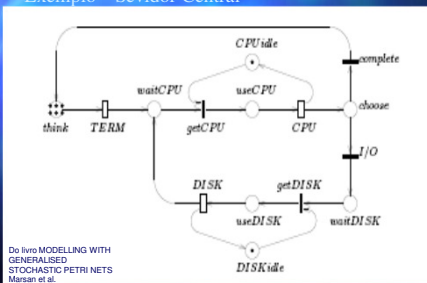


# Redes Estocásticas



# Redes Estocásticas

Exemplo – Sevidor Central



# Redes Estocásticas

## Aproximando Outras Distribuições

Variáveis Suplementares

Aproximação por Fases

Moment Matching

Para encontrar uma distribuição por fase adequada para uma distribuição genérica, duas atividades são fundamentais:

- Determinar o tipo de aproximação necessária.
- Encontrar os parâmetros numéricos da aproximação.

## Redes Estocásticas

- **Aproximação por Fases**

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- **Qualidade da aproximação:** quanto mais próximo for a distribuição por fase da distribuição real, melhor.
  - Medidas de aproximação:
    - *Moment matching*
    - Encontrar um pdf (ou cdf) que seguem a pdf real numa determinada região de interesse.

## Redes Estocásticas

- **Aproximação por Fases**

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- **Número de Estados da Aproximação:** é importante fazer com que o número de estados seja o menor possível.
- **Facilidade da obtenção do modelo markoviano resultante:** pode ser possível obter uma aproximação que gere excelentes resultados. No entanto, pode não ser fácil a integração no modelo markoviano resultante.

## Redes Estocásticas

- **Aproximação por Fases**

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- **Facilidade de obtenção dos parâmetros da aproximação:** quanto mais parâmetros sejam necessários para especificar a aproximação, mais difícil se torna para encontrá-los.

## Redes Estocásticas

*t, μ<sub>E</sub>, n (fases)*

- **Aproximação por Fases**
- **Distribuição de Erlang**

-  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  ( $\lambda_1 = 1/\mu_1, \lambda_2 = 1/\mu_2$ )

-  $f_{\tau}(t) = (f_{\tau_1} * f_{\tau_2})(t) = \lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) / (\lambda_1 - \lambda_2)$

- Generalizando para **n** fases iguais a  $\lambda$ .

- $f_{\tau}(t) = (\lambda^n t^{(n-1)} e^{-\lambda t}) / (n-1)!, t \geq 0$

Parâmetros:  $n, \lambda$ ; Valor Esperado:  $\mu_E = n/\lambda$   
 Variância:  $1/n\lambda^2$  ( $\lambda$  - de cada fase)

## Redes Estocásticas

**Distribuição Especificada (empírica)**

- **Moment Matching**

- Se  $\mu_D/\sigma_D = 1$  então uma transição exponencial é suficiente.  $\lambda_1 = 1/\mu_D$

## Redes Estocásticas

**Distribuição Especificada (empírica)**

- **Moment Matching**

- Se  $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1, x \in \mathbb{Z}$   
 $\gamma = (\mu_D/\sigma_D)^2 = x^2, \lambda = \gamma/\mu_D = x^2/\mu_D$

## Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases
- Distribuição de Hiperexponencial

$f\tau(t) = r_1 f\tau_1(t) + r_2 f\tau_2(t), t \geq 0$   
 $\sum_{j=1}^n r_j = 1$

Parâmetros:  
 Valor Esperado:  $\mu_H = \sum_j q_j / \lambda_j$   
 Variância:  $2 \sum_j q_j / \lambda_j^2 - \mu_H^2$

## Redes Estocásticas

### Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

$\mu_H = r_1 / \lambda_H$  (para esta Hiperexponencial)  
 $\sigma_H = [\text{sqrt}(2 r_1 - r_1^2)] / \lambda_H$   
 - Se  $\mu_D / \sigma_D < 1$  ( $c = \sigma_D / \mu_D > 1$ )

$r_1 = 2\mu_D^2 / (\mu_D^2 + \sigma_D^2), \quad r_2 = 1 - r_1$   
 $\lambda_h = 2\mu_D / (\mu_D^2 + \sigma_D^2),$

## Redes Estocásticas

### Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

- Se  $\mu_D / \sigma_D > 1$  e  $\mu_D / \sigma_D \notin \mathbb{Z}$   
 $(\mu_D / \sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D / \sigma_D)^2$   
 $\lambda_1 = 1/\mu_1, \mu_1 = \mu_D + \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1) \sigma_D^2 - \gamma \mu_D^2) / (\gamma+1)$   
 $\lambda_2 = 1/\mu_2, \mu_2 = \gamma \mu_D \pm \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1) \sigma_D^2 - \gamma \mu_D^2) / (\gamma+1)$

## Redes Estocásticas

### Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

$\mu_H = r_1 / \lambda_H$  (para esta Hiperexponencial)  
 $\sigma_H = [\text{sqrt}(2 r_1 - r_1^2)] / \lambda_H$   
 - Se  $\mu_D / \sigma_D < 1$  ( $c = \sigma_D / \mu_D > 1$ )

$r_1 = 2\mu_D^2 / (\mu_D^2 + \sigma_D^2), \quad r_2 = 1 - r_1$   
 $\lambda_h = 2\mu_D / (\mu_D^2 + \sigma_D^2),$

## Redes Estocásticas

### Distribuição Determinística

- *Moment Matching*

Aproxima-se, fazendo-se  $\sigma_D$  pequeno  
 $\Rightarrow \gamma$  torna-se grande.

- Se  $\mu_D / \sigma_D = x \neq 1, x \in \mathbb{Z}$  ( $c = \sigma_D / \mu_D < 1$ )  
 $\gamma = x^2, \lambda = x^2 / \mu_D$

## Redes Estocásticas

### Distribuição de Cox

Cox generalizou a idéia de composição de fase exponenciais para gera probabilidades e taxas complexas.

Nestes slides  $\mu_k$  são taxas (diferentemente dos anteriores)

## Redes Estocásticas

**Distribuição de Cox**

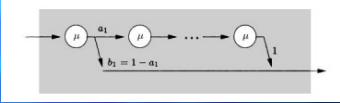
Nestes slides  $\mu$  é taxa (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso  $CV_X \leq 1$

$$\mu_j = \mu \quad j = 1, \dots, k,$$

$$a_j = 1 \quad j = 2, \dots, k-1.$$



$$\bar{X} = \frac{b_1 + k(1 - b_1)}{\mu}$$

$$\text{var}(X) = \frac{k + b_1(k - 1)(b_1(1 - k) + k - 2)}{\mu^2}$$

$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k - 1)(b_1(1 - k) + k - 2)}{[b_1 + k(1 - b_1)]^2}$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil \quad \text{> Número de fases}$$

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k - 2) - \sqrt{k^2 + 4 - 4kc_X^2}}{2(c_X^2 + 1)(k - 1)}$$

$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k - 1)}{X} \quad \text{> Taxa das fases}$$

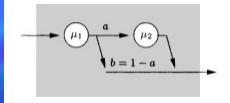
## Redes Estocásticas

**Distribuição de Cox**

Nestes slides  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são taxas (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso  $CV_X > 1$



$$\bar{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2}$$

$$\text{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2 - a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2}$$

$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2 - a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}$$

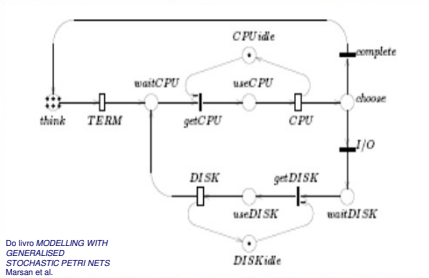
$$\mu_1 = \frac{2}{\bar{X}}$$

$$a = \frac{1}{2c_X^2}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\bar{X}c_X^2}$$

## Redes Estocásticas

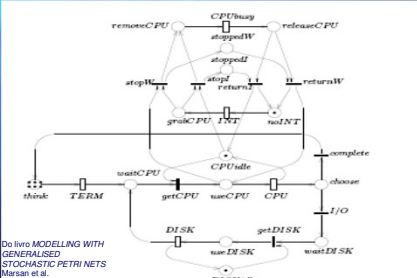
Exemplo – Servidor Central



Do livro MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS Marsan et al.

## Redes Estocásticas

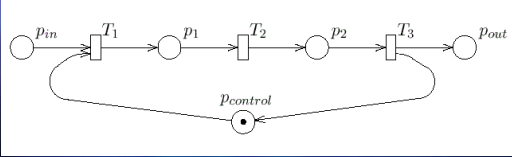
Exemplo – Servidor Central com Interrupção



Do livro MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS Marsan et al.

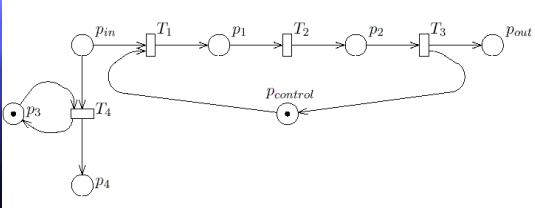
## Modelando Políticas de Memória

Erlang com 3 Fases



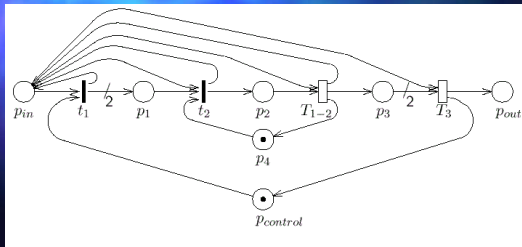
## Modelando Políticas de Memória

Conflito entre Erlang com 3 fases e exponencial



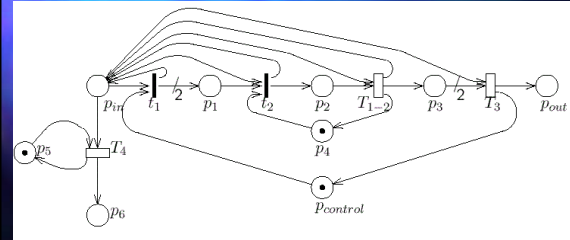
## Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 fases com interrupção



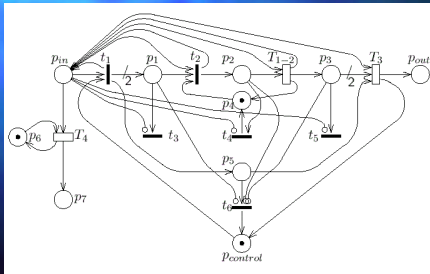
## Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política Age Memory



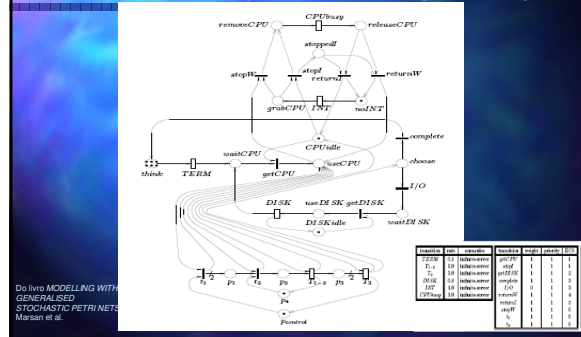
## Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política Enabling Memory



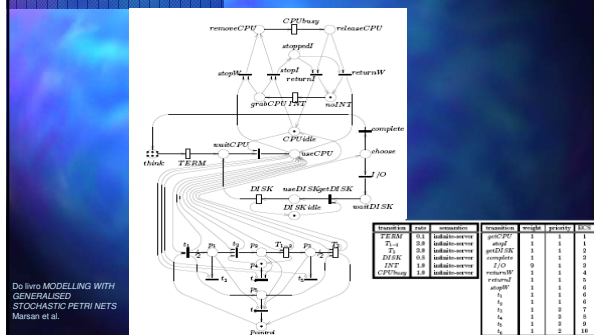
## Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política Enabling Memory



## Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política Enabling Memory



## DSPN – Deterministic and Stochastic PN

- Definição
- DSPN = (P, T, I, O, H, II, M<sub>0</sub>, D, W) - Marsan, Chiola 1987
  - P é o conjunto de lugares,
  - T = T<sub>im</sub> ∪ T<sub>st</sub> ∪ T<sub>det</sub>,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:
  - i<sub>k</sub>(t<sub>j</sub>): P × T → N, ∀ p<sub>k</sub> ∈ P, ∀ t<sub>j</sub> ∈ T
  - o<sub>k</sub>(t<sub>j</sub>): P × T → N, ∀ p<sub>k</sub> ∈ P, ∀ t<sub>j</sub> ∈ T
  - h<sub>k</sub>(t<sub>j</sub>): P × T → N, ∀ p<sub>k</sub> ∈ P, ∀ t<sub>j</sub> ∈ T
  - II: T<sub>im</sub> → N,
  - M<sub>0</sub> é marcação inicial,



### DSPN – Deterministic and Stochastic PN

- DSPN = (P,T,I,O,H,II,M<sub>0</sub>,D,W)
  - D: T<sub>exp</sub> ∪ T<sub>det</sub> → ℝ<sup>+</sup> ∪ {0} atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante às transições determinísticas,
  - W: T<sub>exp</sub> → ℝ<sup>+</sup> ∪ {0} atribui um peso às transições imeditadas.
- Quando T<sub>det</sub> = ∅ a DSPN é uma GSPN.
- Embora seja possível a análise de modelos com mais de uma transição determinística simultaneamente habilitadas, as ferramentas, normalmente, somente implementam métodos que considerem apenas uma transição determinística habilitada por marcação.

### DSPN – Deterministic and Stochastic PN

- Exemplo:
  - T<sub>im</sub> = {t<sub>1</sub>}
  - T<sub>exp</sub> = {t<sub>3</sub>, t<sub>4</sub>}
  - T<sub>det</sub> = {t<sub>2</sub>}

### EDSPN – Extended Deterministic and Stochastic PN

- Definição
- EDSPN = (P,T,I,O,H,II,M<sub>0</sub>,D,W) -
  - P é o conjunto de lugares,
  - T = T<sub>im</sub> ∪ T<sub>exp</sub> ∪ T<sub>det</sub>,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:
  - i<sub>k</sub>(t<sub>j</sub>): P × T × N<sup>|P|</sup> → N, ∀ p<sub>k</sub> ∈ P, ∀ t<sub>j</sub> ∈ T
  - o<sub>k</sub>(t<sub>j</sub>): P × T × N<sup>|P|</sup> → N, ∀ p<sub>k</sub> ∈ P, ∀ t<sub>j</sub> ∈ T
  - h<sub>k</sub>(t<sub>j</sub>): P × T × N<sup>|P|</sup> → N, ∀ p<sub>k</sub> ∈ P, ∀ t<sub>j</sub> ∈ T
  - II: T<sub>im</sub> → N,
  - M<sub>0</sub> é marcação inicial,

### EDSPN – Extended Deterministic and Stochastic PN

- EDSPN = (P,T,I,O,H,II,M<sub>0</sub>,D,W)
  - D: (T<sub>exp</sub> ∪ T<sub>det</sub>) × N<sup>|P|</sup> → ℝ<sup>+</sup> ∪ {0} atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante às transições determinísticas,
  - W: T<sub>im</sub> × N<sup>|P|</sup> → ℝ<sup>+</sup> ∪ {0} atribui um peso às transições imeditadas.

### EDSPN – Extended Deterministic and Stochastic PN

- Exemplo:
  - Modelo em DSPN para limpar p<sub>1</sub>.
  - Modelo em EDSPN para limpar p<sub>1</sub> (arcos dependentes de marcação).

### EDSPN – Extended Deterministic and Stochastic PN

- Tempos dependentes da carga
  - Diagram showing places p1, p2, p3, p4 and transitions t1, t2, t3, t4. p1 has 1 token, p2 has 2 tokens. t1 is between p1 and p2. t2 is between p2 and p4. t3 is between p2 and p3. t4 is between p3 and p4. There is a self-loop on p2 with weight 5. A transition n is between p4 and p2.
  - D(t<sub>4</sub>) = #p<sub>3</sub> × d

## Redes Estocásticas

- Considerações
  - ⊗ Redes de Petri estocásticas são uma representação compacta de alto nível das CTMC
  - ⊗ Equivalência com CTMC
  - Análise quantitativa
  - Análise qualitativa
  - ⊗ Modelagem de sistemas concorrentes, não-determinísticos e assíncronos. Modelagem de sincronismo, escolha, mútua exclusão etc

## Redes Estocásticas

- Algumas Referências:
  - ⊗ Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets, A. Marsan et al, John Wiley & Sons, 1995.
  - Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets, C. Lindermann, John Wiley & Sons, 1998.
- <http://www.daimi.au.dk/PetriNets>