Modelagem para Avaliação de Desempenho e Confiabilidade

Paulo Maciel

Centro de Informática

- Interpretações do Tempo -

A noção de tempo pode ser representada de diversas maneiras nos sistemas computacionais.

- **Tempo Lógico** é definido a partir de relações de precedência entre eventos permitindo estabelecer ordens causais entre conjunto de eventos.
- **Tempo Físico** é um tempo métrico que permite representar quantitativamente a distância entre eventos e estabelecer ordens totais entre eventos.
- **Tempo Contínuo** segue a natureza uniforme e contínua do tempo físico e é isomorfo ao conjunto dos reais.
- **Tempo Discreto** é uma simplificação do tempo contínuo onde a relação de isomorfismo é com o conjunto dos naturais.
- **Tempo Global** fornece uma única referência temporal para todos os componentes do sistema.
- **Tempo Local** é a noção em que cada componente do sistema tem sua própria referência temporal.

Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

Análise de Desempenho

- Modelagem
  - Determinística
    - Melhor e pior casos
  - Probabilistica
    - Valores prováveis
  - Operacional
    - Informações observáveis
- Simulação
    - Análise exaustiva
- Medição
  - Medidas obtidas do sistema real
  - Protótipos

Modelos Temporizados

- Com todos estes pontos de vistas, diversos modelos têm sido propostos na literatura para tratar (modelar e analisar) os sistemas sob o ponto de vista temporal.
- Dentre os modelos temporais, podemos ressaltar:
  - **Lógicas Temporais:** ***Linear Time Temporal Logic, Causal Temporal Logic***
  - **Álgebras de Processos Temporais :** ***Timed CSP***
  - **Autômatos Temporizados**
  - **Cadeias de Markov**
  - **Redes de Fila**
  - **Redes de Petri Temporizadas:** ***Timed PN, Time PN, SPN, GSPN, DSPN***

Modelos Temporizados

- Modelagem para Análise de Desempenho
  - Análise Operacional
  - Modelos para Simulação
  - Modelos Analíticos
    - Cadeias de Markov
    - Teoria das Filas
    - Redes de Petri Estocásticas
    - Álgebras de Processo Estocásticas

Modelos Temporizados

- Algumas destas classes de modelos temporizados possibilitam a análise temporal dos sistemas seja sob o ponto de vista determinístico ou sob o ponto de vista probabilístico. Para modelagem e avaliação de sistemas críticos, são de particular interesse os modelos que possibilitem a representação de tempos físicos e não apenas o tempo lógico.
- Os modelos que possibilitam a especificação do tempo físico, podem representar os tempo de foras distintas, por exemplo:
  - por **Intervalos**
  - de forma **Determinística**
  - de forma **Probabilística**

Modelagem para Análise de Desempenho

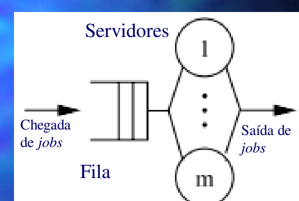
- Algumas Medidas
  - Tempo de resposta
  - *Throughput*
  - Utilização
  - Capacidade
  - Confiabilidade
  - Taxa de descarte

Análise Operacional

- Informações observáveis
- Jeff Buzzen and Peter Denning

Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.



A,B = {M,D,G,E}
- M - *Markovian*,
- D - Determinística,
- G – *General*
- E - *Erlangian*

Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.
- Muitas vezes quando K e m são ∞, estes termos são omitidos ou usa-se / /

- Exemplos:
  - M/M/1
  - M/M/1/K
  - M/G/2

Análise Operacional

- Variáveis operacionais
  - T: Período de observação
  - K: Número de recursos do sistema
  - A_i: Número total de solicitações (ex:.chegadas) do recurso i no período T.
  - A_0: Número total de solicitações (ex:.chegadas) ao sistema no período T.
  - C_i: Número total de serviços finalizados pelo recurso i no período T.
  - C_0: Número total de serviços finalizados pelo sistema no período T.
  - B_i: Tempo de ocupação do recurso i no período T.

Análise Operacional

- Métricas derivadas (*derived measures*)
  - Si: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; Si = Bi/Ci
  - Ui: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; Ui = Bi/T
  - Xi: *throughput* (ex.: finalizações por unidade de tempo) do recurso i; Xi = Ci/T
  - λi: taxa de chegada (ex.:, chegadas por unidade de tempo) ao recurso i; λi = Ai/T
  - X0: *throughput* do sistema; X0 = C0/T
  - Vi: Número médio de visitas ao recurso i por solicitação; Vi = Ci/C0

Análise Operacional

- Exemplo

Suponha que ao se monitorar uma processador por um período de 1 min, verificou-se que o recurso esteve ocupado por 36s. O número total de transações que chegaram ao sistema é 1800. O sistema também finalizou a execução de 1800 transações no mesmo período.

1. Qual a taxa de chegada ao sistema (λ_0)?
2. Qual é o throughput do sistema (X_0)?
3. Qual é a utilização da CPU(U_{CPU})?
4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas pelo sistema (S_0)?

Análise Operacional

- Exemplo

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

CPU

$T = 1 min$ $B_{CPU} = 36 s$

$A_0 = 1800$ transactions

$C_0 = 1800$ transactions

K=1

$A_0 = A_1$

$C_0 = C_1$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1800}{60} = 30 \, trs$

$X_0 = X_1 = \frac{1800}{60} = 30 \, trs$

$S_0 = S_1 = S_{CPU}$

$U_0 = U_1 = U_{CPU}$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_{CPU}$

$X_0 = X_1 = X_{CPU}$

Análise Operacional

- Exemplo

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

$U_0 = U_{CPU} = \frac{B_{CPU}}{T} = \frac{36 s}{60 s} = 0,6$

$S_0 = S_1 = \frac{B_{CPU}}{C_{CPU}} = \frac{36}{1800} = 0,02 s = S_{CPU}$

Análise Operacional

- *Utilization Law*

$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{B_i}{T} \times \frac{C_i}{C_i} = \frac{B_i}{C_i} \times \frac{C_i}{T} = S_i \times X_i$$

Relacionamento da utilização de um dispositivo com o seu throughput.

Análise Operacional

- *Utilization Law*

$U_i = S_i \times X_i$

Exemplo: Considere que 125 pacotes por segundo chegam a um roteador e que o roteador leva em média 2 milisegundos para tratar o pacote. Portanto:

$U_i = 0{,}002 \times 125 = 25\%$

Análise Operacional

- Exemplo 2:

A banda passante de um *link* de comunicação é 56000 bps. Pacotes de 1500 bytes são transmitidos ao link a uma taxa de 3 pacotes por segundo

- Qual é a utilização do link?

Análise Operacional

- Exemplo 2:

bandwidth 56000 bps

Time to send 1 bit (TSb)

TSb = 1/bandwidth = 1,78571E-05

(TSB) Time to send 1 byte = 8 x TSb = 0,000143

Packet size = 15000 bytes

Time to send 1 packet (TSP) = 1500 x TSB = 0,214286

Arriving rate (λ) = 3 packets/s

U = TSP x λ = 0,214286 x 3 = 0,642857

Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$$X_i = \frac{C_i}{T} = \frac{C_i}{T} \times \frac{C_0}{C_0} = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{C_0}{T} = V_i \times X_0$$

Uma maneira interessante de relacionar o trhoughput do sistema ao throughput dos recursos.

Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$X_i = V_i \times X_0$

Exemplo: suponha que toda vez que executa uma transação faz-se 2 acessos a uma unidade de disco. Se 5,6 transações são finaziladas por segundo, portanto:

$X_i = 2 \times 5{,}6 = 11{,}2\ tps$

Análise Operacional

- *Service Demand Law*
  - *Service demand de um recursos* é o tempo médio total que uma transação passa em no recurso.

Da *Utilization Law, tem-se:*

$$U_i = X_i \times S_i$$

Da *Forced Flow Law*, tem-se:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Portanto:

Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$$U_i = V_i \times X_0 \times S_i = D_i \times X_0$$

Portanto: $D_i = \dfrac{U_i}{X_0}$

Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$X_i = \frac{C_i}{T} \Rightarrow \frac{C_i}{X_i} = T$

$B_i = U_i \times T$

$U_i = X_i \times S_i$

$D_i = V_i \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{U_i}{X_i} = \frac{C_i}{X_i} \times \frac{U_i}{C_0} = T \times \frac{U_i}{C_0} = \frac{B_i}{C_0}$

And, since $C_0/T = X_0$, then $D_i = U_i/X_0$

Therefore, $\boxed{D_i = V_i \times S_i = \frac{B_i}{C_0} = \frac{U_i}{X_0}}$

Análise Operacional

- Exemplo

Para ilustrar o conceito de *Service Demand* considere o caso em que 6 transações fazem 3 acessos (cada uma) a uma unidade de disco. Os tempos de cada acesso são apresentados em ms.

	Transaction No.					
I/O No.	1	2	3	4	5	6
1	10	15	13	10	12	14
2	12	12	12	11	13	12
3	11	14	11	11	11	13
Sum	33	41	36	32	36	39

Qual é a *Service Demand* do sistema?

Análise Operacional

- Exemplo

Considere que um *Web Server* foi monitorado por 10 min e que a CPU esteve ocupada por 90%. O *log* do *Web Server* registrou 30.000 solicitações processadas. Qual é a CPU *Service Demand* (D_{CPU}) relativa as solicitações ao *Web Server*?

$$X_0 = \frac{C_0}{T} = \frac{30000}{10 \times 60} = 50\ sol/s$$

$$D_{CPU} = U_{CPU}/X_0 = 0,9/50 = 0,018\ s/sol.$$

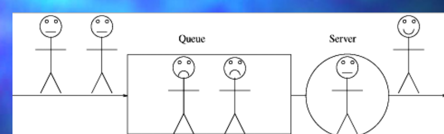
ou

$$B_{CPU} = U_{CPU} \times T = 0,9 \times 600 = 540s$$

$$D_{CPU} = \frac{B_{CPU}}{\ } = \frac{540}{\ } = 0,018\ s/sol$$

Análise Operacional

- *Little's Law*



$$N = X \times R$$

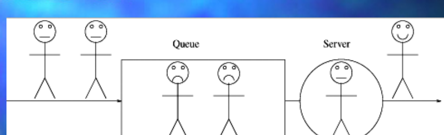
$Onde, R = W + S$

R – Response time
W – Waiting time
S – Service time

N – Número de clientes no sistema
X – Throughput

Análise Operacional

- *Little's Law*



$$N = X \times R$$

Quando não há fila e considera apenas um servidor a Little's law corresponde a Utilization law:
e R=S

Análise Operacional

- Leis Operacionais (*derived measures*)

Utilization Law:

$$U_i = X_i \times S_i = \lambda_i \times S_i$$

Forced Flow Law:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Service Demand Law:

$$D_i = V_i \times S_i = U_i/X_0$$

Little's Law:

$$N = X \times R$$

Interactive Response Time Law

$$R = \frac{M}{X_0} - Z$$

Modelagem de Fenômenos Aleatórios

Modelo de Probabilidade

1. Espaço amostral (Ω): um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementar) de um fenômeno aleatório.
2. Conjuto de eventos (S): um conjunto de todos os possíveis eventos de interesse.
3. Probabilidade dos eventos (P): a probailidade de ocorrência de um evento observável.

PM é a tupla: PM = (Ω, S, P).

Espaço Amostral

- A probabilidade de um evento representa a chance de que o resultado de um experimento resulte na ocorrência do evento.
- Assume-se que os experimentos são aleatório.
- Um experimento aleatório pode ter muito resultados. Cada resultado é um ponto amostral (evento elementar) e tem uma probailidade.
- Um espaço amostral Ω : um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementares) de um fenômeno aleatório.
  - Finito (ex.: execução das ações associadas a opções de um **if**; dois resultados)
  - Countável (ex.: número de vezes que "corpo" de um laço **while** é executado; O espaço amostral por ser finito ou contável infinito.)
  - Contínuo (ex.: tempo de falha de componente)

Eventos

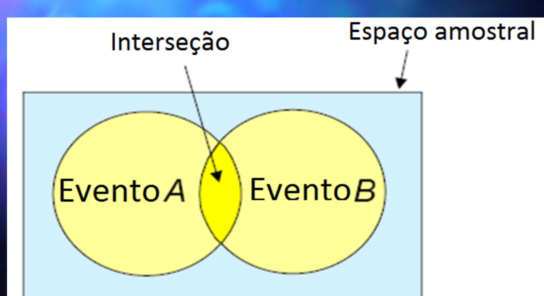
- Um evento E é uma coleção de zero ou mais pontos amostrais (evento elementar) de Ω. Um evento E é um sub-conjunto de Ω.

$$E \subseteq \Omega$$

- Ω é o evento universal e o conjunto vazio é presentado por $\emptyset$

$$\Omega \in S$$
$$A \in S \Rightarrow \bar{A} \in S$$
$$A, B \in S \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in S$$

Diagrama de Venn
União e Inteseção de Eventos



Probabilidade

- *Probabilidade* é um valor numérico que representa a chance de que um evento ocorra.
- Os valores de uma Probabilidade estão entre 0 e 1.
- A probabilidade próxima de 0 representa grande improbabilidade de ocorrência do evento.
- A probabilidade próxima de 1 denota que a ocorrência do evento é quase certa.

Eventos e suas Probabilidades

- Um evento é uma coleção de pontos amostrais. A probabilidade de um evento é a soma das probabilidades do pontos amostrais.
- Se pudermos identificar todos os pontos amostrais (eventos elementares) de um experimento e associar probabilidades a eles, podemos calcular a probabilidade de qualquer evento.

Terminologia e Definições

- *Ω* e *E*

  - $\overline{E_1} = \Omega - E_1$- *Complemento*
  - $E_3 = E_1 \cap E_2$, *interseção*
  - $E_4 = E_1 \cup E_5$, *União*

Para n eventos $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 ... \cup E_n$

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 ... \cap E_n$$

Álgebra

- Eventos mutuamente exclusivos (disjuntos)
  - Dois eventos são mutuamente exclusivos sse

$A \cap B = \emptyset$

Um conjunto de *n* eventos (*n>2*) é mutuamente exclusivo sse

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

Axiomas

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω,S,*P*)
  - Para qualquer evento A, a proabilidade de A é:

1. 1≥P(A)≥0, ∀ A ∈ S
2. P(Ω)=1
3. Se A e B São disjuntos, então:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Consequências

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω,S,*P*)

Sejam A e $\overline{A}$ (seu complemento) eventos

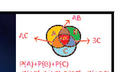
$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

4. Se A e B são dois eventos que não são mutuamente exclusivos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

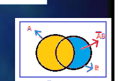
Consequências:
Eventos não mutuamente exclusivos



$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i>j} P(A_i A_j) + \sum_{i>j>k} P(A_i A_j A_k) - ... + (-1)^n P(A_1 A_2 ... A_n)$$

Princípio da inclusão e exclusão (acima)

Um método muito melhor é:



5. Soma dos Produtos Disjuntos (SDP):

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \cdots + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n).$$

Exemplo

Fenômeno aleatório:

Dois resultados de um teste de condição em um **if** *statement*:

if *B* **then** *T*;
else *E*;

$\Omega = \{T,E\}$; Conjunto de resultados

$S = \{\Phi, \{E\}, \{T\}, \{T,E\}\}$; Conjunto de todos os eventos

$P = \{0, ½, ½, 1\}$; probabilidade atribuídas

Variáveis Aleatórias Resumo

- Variáveis Aleatórias é uma função que confere um número real a cada resultado (do espaço amostral) de um experimento aleatório.
- Variável Aleatória é uma função que reflete o resultado de um experimento aleatório. $X: \omega \rightarrow \Re$. $\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ $x \in \Re$.

Variáveis Aleatórias Resumo

- Variáveis aleatórias contínuas assumem quaisquer valores no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$
- Variáveis aleatórias discretas assumem apenas valores discretos.

Variáveis Aleatórias Resumo

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Variáveis Aleatórias Resumo

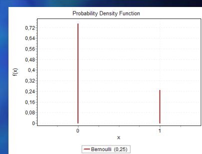
- *Probability mass function (pmf)* – Seja Ω um espaço amostral discreto. $p(x)$, que denota uma pmf de uma variável aleatória X, é definida por $p(x) = P[X=x]$, onde x assume valores de Ω.

Variáveis Aleatórias Resumo

- Função de Distribuição de Probabilidade Acumulativa (CDF) de uma variável aleatória X, denotada por $F(X)$, é definida por $F(X) = P[X \leq x]\ \forall\ x \in \Re$
- $F(X)$ é uma função monotônica não-decrescente tal que $0 \leq F(X) \leq 1$, onde $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$
- $F(X) = \sum_{y \leq x} p(y) \Rightarrow F(\infty) = \sum_{\forall y} p(y) = 1$

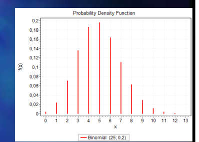
Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli



    - Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis ($X=0, X=1$).
    - pmf(*probability mass function*) de X é dada por: $P(X=0) = 1-p$ e $P(X=1) = p$, $0 \leq p \leq 1$

Variáveis Aleatórias Resumo



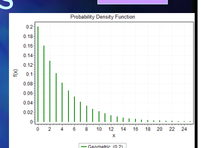
Discreta

- Binomial
  - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se tem resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$.

Ver slides de medição

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica



    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se realiza o experimento para se ter o primeiro resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = p\,(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\overline{X} = E[X] = \Sigma_{\forall k}\, k \,.\, P(X=k)$
  - Uma função de uma variável aleatória ($Y=f(X)$) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[f(X)] = \Sigma_{\forall k}\, f(k) \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - n-ésimo momento (em torno da origem) de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência de X
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \Sigma_{\forall k}\, k^n \,.\, P(X=k)$
  - n-ésimo momento central de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência da diferença entre X e o valor esperado de X ($E(X) = \overline{X}$)
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \Sigma_{\forall k}\, (k-\overline{X})^n \,.\, P(X=k)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - O primeiro momento é o valor esperado.
  - O primeiro momento central é 0
  - O segundo momento central (variância)
    - $var(X) = \sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \Sigma_{\forall k}\, (k-\overline{X})^2 \,.\, P(X=k)$
  - O coeficiente de variação é a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - Dada uma variável aleatória X, a função geratriz de momento $M_X(t)$ de sua distribuição de probabilidade é o valor esperado de e^{tX}.
  - $M_X(t)=E[e^{tX}]$
  - $=\sum_i e^{tx_i}\, p_X(x_i)$ X discreta.
  - $=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$ X contínua.

Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - $e^{tX} = 1 + tX + t^2X^2/2! + \ldots + t^rX^r/r! + \ldots$

$$f(t) = e^{(-a\,t)}$$

$$= 1 - a\cdot t + \frac{a^2\cdot t^2}{2} - \frac{a^3\cdot t^3}{6} + \frac{a^4\cdot t^4}{24} - \frac{a^5\cdot t^5}{120} + \frac{a^6\cdot t^6}{720} - \frac{a^7\cdot t^7}{5040} + \frac{a^8\cdot t^8}{40320} - \frac{a^9\cdot t^9}{362880} + \ldots$$

Para a=2, tem-se:

$$= 1 - 2\cdot t + 2\cdot t^2 - \frac{4\cdot t^3}{3} + \frac{2\cdot t^4}{3} - \frac{4\cdot t^5}{15} + \frac{4\cdot t^6}{45} - \frac{8\cdot t^7}{315} + \frac{2\cdot t^8}{315} - \frac{4\cdot t^9}{2835} + \ldots$$

  - Tomando a esperança:
  - $E[e^{tX}] = 1 + E[X]\, t + E[X^2]\ t^2/2! + E[X^r]\, t^r/r! + \ldots$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Procedimento para obtenção dos momentos
  - *Determine* $M_X(t)$ *analiticamente para uma uma distribuição particular*
  - *Ache* $E[X^r] = d^r/dt^r\, M_X(t)|_{t=0}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado $= p$,
    - Variância$= p(1-p)$,
    - Coeficiente de variação$= (1-p)/p$
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = q + pe^t$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Binomial
    - Parâmetros: n,p;
    - Valor Esperado$= np$,
    - Variância$= np(1-p)$,
    - Coeficiente de variação$= (1-p)/np$
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = (q + pe^t)^n$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado$= 1/p$,
    - Variância$= (1-p)/p^2$,
    - Coeficiente de variação$= (1-p)$
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = pe^t/(1-qe^t)$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a, b \leq +\infty$, é denominada Variável Aleatória Contínua.
  - *Cumulative Distribution Function* (CDF)

  $F_X(x) = P(X \leq x)$
    - Se $x < y$ então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Cumulative Distribution Function* (CDF)

  $F_X(x) = P(X \leq x)$
    - Se $x < y$ então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - Como $F_X(x)$ não é decrescente, então $f_X(x) \geq 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$
    - $P(x1 \leq X \leq x2) = \int_{x1}^{x2} f_X(x)\, dx$
    - $P(X=x) = \int_{x}^{x} f_X(x)\, dx = 0$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$
  - Uma função de uma variável aleatória (g(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - n-ésimo momento
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx$
  - n-ésimo momento central
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^n \cdot f_X(x)\, dx$

Variáveis Aleatórias Resumo

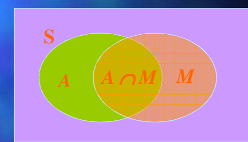
- Contínua
  - O segundo momento central (variância)
    - $\sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{X})^2 \cdot f_X(x)\, dx$
  - O coeficiente de variação e a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

Probabilidade Condicional

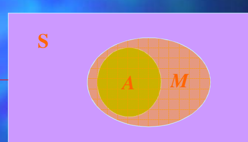
- Seja *A* um evento arbitrário em um espaço amostral *S*. A probabilidade de que ocorra um evento *A* uma vez que *M* tenha ocorrido é denotado por P(*A*/*M*) que é definido por:
- $P(A/M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)}$

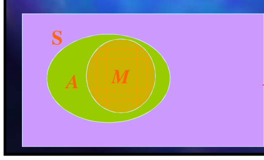


- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$
- Caso $A \subset M$ então $P(A/M) = \dfrac{P(A)}{P(M)}$

Probabilidade Condicional

- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$





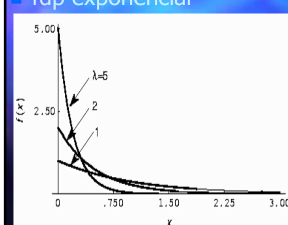
- Caso $A \subset M$ então $P(A/M) = \dfrac{P(A)}{P(M)}$

Distribuição Exponencial

Mathematica

Variável Aleatória Exponencial

- fdp exponencial

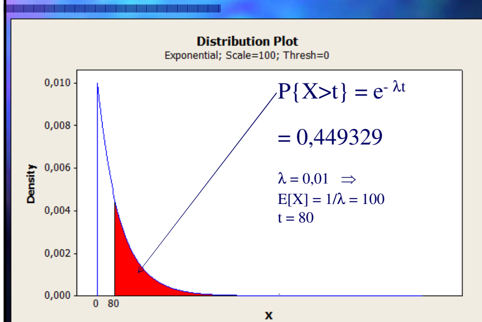


- $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $0 \le t < \infty$
- $CDF(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \le t < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- Valor Esperado
  - $E(X) = 1/\lambda$
- Variância: $var(X) = 1/\lambda^2$
- Propriedade:
  - Não possui memória

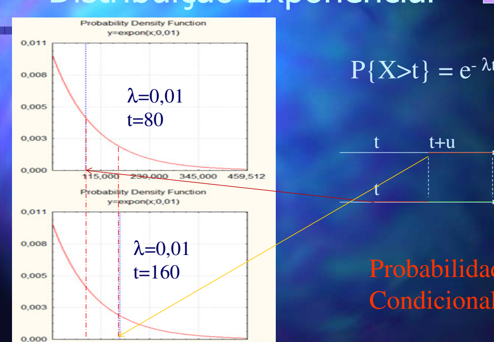
Distribuição Exponencial

Exponential

Mathematica

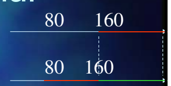


Distribuição Exponencial



Probabilidade Condicional

Distribuição Exponencial



Um exemplo:

$P\{X>80\} = e^{-0{,}01\times 80} = 0{,}449329$

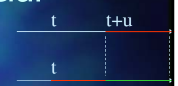
- $P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{P\{X>(80+80) \wedge X>80\}}{P\{X>80\}}$
- $P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{P\{X>160\}}{P\{X>80\}}$

Probabilidade Condicional

$P\{X>(80+80) \mid X > 80\} = \dfrac{e^{-0{,}01\times(80+80)}}{e^{-0{,}01\times 80}} = e^{-0{,}01\times 80} = 0{,}449329$

$\boxed{P\{X>160|X>80\} = P\{X>80\} = 0{,}449329}$

Distribuição Exponencial



Variável Aleatória Exponencial

$\boxed{P\{X>t\} = e^{-\lambda t}}$

- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u \wedge X>t\}}{P\{X>t\}}$
- $P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{P\{X>t+u\}}{P\{X>t\}}$

Probabilidade Condicional

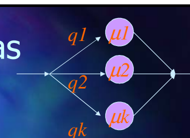
$P\{X>t+u \mid X > t\} = \dfrac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda t}} = \boxed{e^{-\lambda u} = P\{X>u\}}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Exponencial
    - Parâmentro: λ,
    - Valor Esperado: $1/\lambda$,
    - Variância: $1/\lambda^2$,
    - Coeficiente de variação: 1
    - Função geratriz de momentos

$M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-1}$

Variáveis Aleatórias Resumo



Hiperexponencial

- Parâmentros: k, μ_j, q_j;
- Valor Esperado:

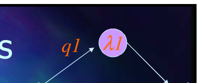
$E(X)=\overline{X}=\sum_{j=1}^{k} q_j/\mu_j$

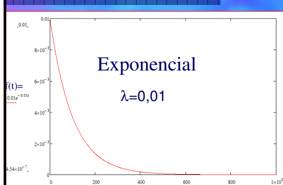
$F_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j(1-e^{-\mu_j t})$, $t\geq 0$

$f_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j\mu_j e^{-\mu_j t}$, $t\geq 0$

- Coeficiente de variação: $\mathrm{sqrt}(2\times(1/\overline{X})^2\times\Sigma_{j=1} q_j/\mu_j^2 - 1) \geq 1$
- Variância: $2\sum_{j=1}^{k} q_j/\mu_j^2 - \overline{X}^2$

Variáveis Aleatórias Resumo



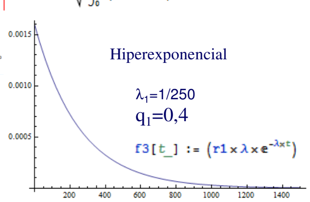


$E(t)= \int_0^\infty t \times f1[t]\, dt$

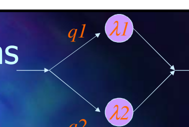
$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty t^2 \times f1[t]\, dt - m^2}$

$E(t)= \int_0^\infty t \times f3[t]\, dt = 100$

$\sigma = \sqrt{\int_0^\infty (t^2 \times f3[t])\, dt - m3^2} = 200$



Variáveis Aleatórias Resumo



Hiperexponencial

- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e $c>1$ pode ser aproximada por uma
  - Parâmentros: $k=2$, μ_1, μ_2, q_1, q_2

$\mu_1=1/\overline{X} \,.\, (1 - \mathrm{sqrt}(q_2/q_1 \,.\, (c^2 -1)/2))^{-1}$

$\mu_2=1/\overline{X} \,.\, (1 + \mathrm{sqrt}(q_1/q_2 \,.\, (c^2 -1)/2))^{-1}$

$q_1+q_2=1$, $q_1, q_2\geq 0$ $\mu_1, \mu_2>0$

Variáveis Aleatórias Resumo

Mathematica

- Erlang-k

$F_X(x)=1-e^{-k\mu t}\sum_{j=0}^{k-1}(k\mu t)^j/j!,\ t\geq 0$

$f_X(x)=[(k\mu(k\mu t)^{k-1})/(k-1)!]e^{-k\mu t}$, $t\geq 0$, $k=1.2,\ldots$

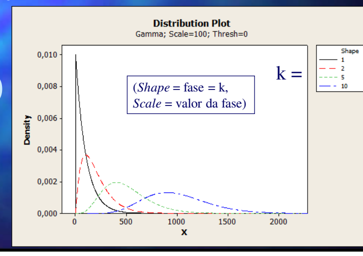
- Parâmentros: k, μ;
- Valor Esperado: k/μ
- Variância: k/μ^2
- Coeficiente de variação: $1/\text{sqrt}(k) \leq 1$
- Função geratriz de momentos

$M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-k}$

Variáveis Aleatórias Resumo

Mathematica

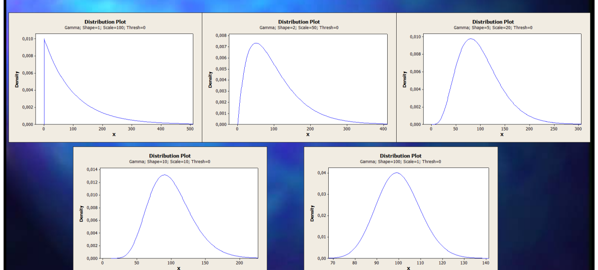
- Erlang-K
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e $c\leq 1$ pode ser aproximada por uma
  - $k=[1/c^2]$
  - $\mu=1/(c^2k\overline{X})$



Variáveis Aleatórias Resumo

Mathematica

- Erlang-K (*Shape* = fase, *Scale* = valor da fase)



Variáveis Aleatórias Resumo

A distribuição hipo-exponencial é uma generalização da distribuição de Erlang quando se admite fases com taxas diferentes.

- Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com duas fases $\mu_1 \neq \mu_2$, tem-se:
  - $F_X(x)=1-[\mu_2/(\mu_2-\mu_1)e^{-k\mu_1 t}]+[\mu_1/(\mu_2-\mu_1)e^{-k\mu_2 t}]$, $t\geq 0$
  - $f_X(x)=[(\mu_1\mu_2)/(\mu_1-\mu_2)](e^{-\mu_2 t}-e^{-\mu_1 t})$, $t\geq 0$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Hipo-exponencial
  - Parâmentros: μ_1, μ_2,
  - Valor Esperado: $1/\mu_1 + 1/\mu_2$
  - Variância: $1/\mu^2_1 + 1/\mu^2_2$
  - Coeficiente de variação: $[\text{sqrt}(\mu^2_1 + \mu^2_2)/(\mu_1+\mu_2)] < 1$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ como valor esperado e $0.5\leq c^2 < 1$ pode ser aproximada por uma
  - Hipo-exponencial
    - $\mu_1=(2/\overline{X})\{1+\text{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$
    - $\mu_2=(2/\overline{X})\{1-\text{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com k fases e taxas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ tem-se:

$f_X(x)= \sum_{j=1}^{k} a_i \mu_i e_1^{\lambda_i t}$, $t \geq 0$

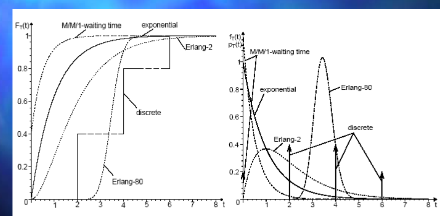
$a_i= \prod_{j=1, j\neq i}^{k} [\mu_j/(\mu_j-\mu_i)]$, $1 \leq i \leq k$

Valor Médio = $\sum_{j=1}^{k} 1/\mu_i$

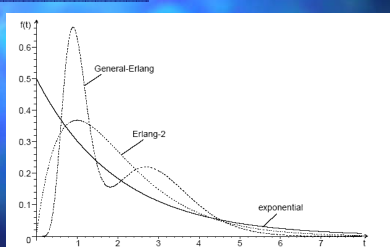
Variáveis Aleatórias Resumo

Exp

Erl



Variáveis Aleatórias Resumo



Variáveis Aleatórias Resumo

- Uma função de uma variável aleatória (Y=f(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[f(X)] = \sum_{\forall k} f(k) \cdot P(X=k)$
- Uma função de uma variável aleatória (Y= g(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado

Função densidade de Probabilidade de X

  - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$

Variáveis Aleatórias Resumo

- Se f(X) = X
  - Valor Esperado
    - $E[f(X)] = E(X) = \mu$
  - Variância
    - $Var[f(X)]=E([f(X) - E(f(X))]^2]$
    $=E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$ (Variância de X)
    $=Var(X) = \sigma^2$

Variáveis Aleatórias Resumo

1. Se f(X) = aX + b
   - Valor Esperado
     - $E[f(X)] = aE(X) + b$
   - Variância
     - $Var[f(X)] = a^2 Var(X)$
     - Prova: $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$

Por definição $\mathrm{Var}(aX+b) = E\left[(aX+b) - E(aX+b)\right]^2$

$$= E\left[aX+b-(aE(X)+b)\right]^2$$
$$= E\left(aX-aE(X)\right)^2$$
$$= E(a^2(X-E(X))^2 = a^2E(X-E(X))^2 = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Variáveis Aleatórias Resumo

2. Se $f(X) = b$
   - Valor Esperado
     - $E(b) = b$
   - Variância
     - $Var(b) = 0$

Variáveis Aleatórias Resumo

– Exemplo

Suponha que X seja uma variável aleatória tal que $E(X) = 3$ e $Var(X) = 5$. Além disto, seja $Y(X) = 2X - 7$.

Portanto:

$E(Y(X)) = [2 \times E(X)] - 7 = -1$

$Var(Y(X)) = 2^2 \times Var(X) = 20$

Variáveis Aleatórias Resumo

Quando $Y=f(X)$ é muito complicada, os cálculos de $E(f(X))$ e $Var(f(X))$ podem ser difíceis. Pode-se obter aproximações de $E(f(X))$ e $Var(f(X))$ expandindo-se $Y=f(X)$ (série de Taylor) até três termos (para a média).

$$Y = f(E(X)) + [(X - E(X)) \times f'(E(X))] + [(1/2)\times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + \underbrace{R}_{\textit{Resto da expansão}}$$

Variáveis Aleatórias Resumo

- $Y = f(E(X)) + (X - E(X))\, f'(E(X)) + [(1/2) \times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + R$. Portanto:
- $E(f(X)) = E[f(E(X))] + \underbrace{E[(X - E(X))\, f'(E(X))]}_{=0} + E[(1/2) \times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + E(R) =$

$E[f(E(X))] + E[(1/2)] \times E[f''(E(X))] \times E[(X - E(X))^2] + E(R) =$

$f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) + E(R)$

$\cong f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) \Rightarrow$

$$\boxed{E(f(X)) \cong f(E(X)) +[\, (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X)\,]}$$

Variáveis Aleatórias Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

– Seja X uma variável aleatória com $E[X]$ e $Var(X)$. Suponha que $Y=f(X)$. Portanto:

➢ $E[Y] \cong f(E[X]) + (f''(E[X]) \times Var(X))/2$

➢ $Var(Y) \cong (f'(E[X])^2 \times Var(X)$

Variáveis Aleatórias Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

– Suponha uma variável aleatória t, onde $E[t]=20s$ e $Var(t)=5s$. Considere uma função $v(t)=dt^{-1} = 10^3\, t^{-1}$

– $v'(t) = - 10^3\, t^{-2}$ e $v''(t)=2\times10^3\, t^{-3}$

– $E[v(t)] = v(E[t]) + (v''(E[t]) \times Var(t))/2$

– $E[v(t)] = v(20) + (v''(20) \times 5)/2 = 50{,}625$ m/s

– $Var(v(t))=[v'(E[t])]^2 \times Var(t)$

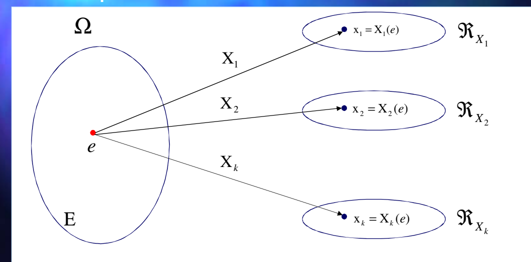
– $Var(v(t))= [v'(20)]^2 \times 5 = 12{,}5$ m/s

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias
  - Seja Ω o espaço amostral associado a um experimento E. e ∈ E é um resultado do experimento E.
  - Seja X_1, X_2, ..., X_k variáveis aleatórias que associam um número real $X_1(e)$, $X_2(e)$, ..., $X_k(e)$ a cada resultado e.
  - $[X_1, X_2, ..., X_k]$ é chamado de vetor aleatório k-dimensional.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias

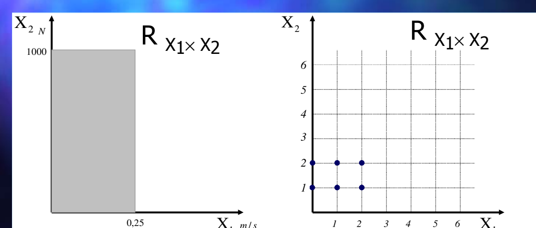


Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto finito ou infinito enumerável, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório discreto bidimensional.
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto não enumerável do plano euclidiano, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo bidimensional.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)



Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Bivariada
  - Caso Discreto: a cada resultado $[x_1, x_2]$ de $[X_1, X_2]$ associamos um número $p(x_1, x_2) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$, onde $p(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall\, x_1, x_2$

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2} p(x_1, x_2) = 1$$

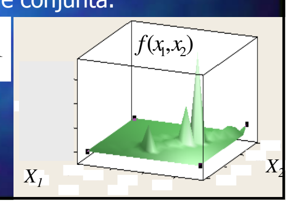
  - Distribuição de probabilidade de $[X_1, X_2]$

$$([x_1, x_2], p(x_1, x_2)), \forall x_1, x_2$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Bivariada
  - Caso Contínuo: Se $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo, $f(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall\, (x_1, x_2) \in R_{X_1 \times X_2}$ é a função de densidade conjunta.

$$\iint_{R_{X_1 \times X_2}} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1$$



Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Discreto : a distribuição marginal de X_1 é

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2), \forall x_1$$

A distribuição marginal de X_2 é

$$p_2(x_2) = \sum_{x1} p(x_1, x_2), \forall x_2$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

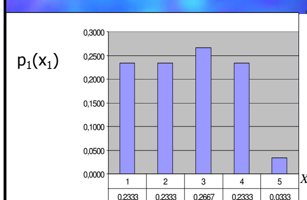
Retornar

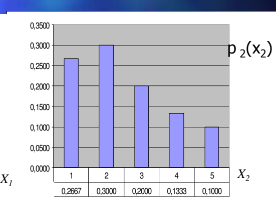
- Probabilidade Marginal: Caso Discreto

$x_2 \backslash x_1$	1	2	3	4	5	$p_2(x_2)$
1	1/30	1/30	2/30	3/30	1/30	8/30
2	1/30	1/30	3/30	4/30		9/30
3	1/30	2/30	3/30			6/30
4	1/30	3/30				4/30
5	3/30					3/30
$p_1(x_1)$	7/30	7/30	8/30	7/30	1/30	$\sum_x p(x) = 1$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal: Caso Discreto





Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Contínuo : a distribuição marginal de X_1 é

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

A distribuição marginal de X_2 é

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$Z = X + Y.$

Portanto $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias discreta, temos que :

$$E[Z] = E[X + Y] =$$

$$\sum_x \sum_y (x + y) p(x + y) =$$

(*Ver exemplo da página seguinte*)

$$\sum_x x\, p_x(x) + \sum_y y\, p_y(y) =$$

$$E[X] + E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

Ver Tabela Original

- Linearidade do Valor Esperado

x2,x1	0	1	2	3	4	p2(x2)	x2 p(x2)
0	0,0333	0,0333	0,0667	0,1000	0,0333	0,2667	0
1	0,0333	0,0333	0,1000	0,1333		0,3000	0,3
2	0,0333	0,0667	0,1000			0,2000	0,4
3	0,0333	0,1000				0,1333	0,4
4	0,1000					0,1000	0,4
p1(x1)	0,2333	0,2333	0,2667	0,2333	0,0333	2,0000	1,5000
1,6000	0	0,233333	0,533333	0,7	0,133333	x1 p(x1)	E[X2]
E[X1]						E[X1+X2]=	3,1000

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias contínuas, temos que:

$$E[Z] = E[X+Y] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x+y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)dydx + \int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+y)dxdy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy =$$

$$E[X]+E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

De forma mais geral, considere Z, Y e X variáveis aleatórias contínuas, onde

Z(X,Y) = aX+bY, e a e b são constantes.

- $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Prova:

$$\begin{aligned}
E(aX+bY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[axf(x,y)+byf(x,y)]dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}axf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}byf(x,y)dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right]dx + b\int_{-\infty}^{\infty}y\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right]dy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy \\
&= aE(X)+bE(Y).
\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Este resultado pode ser generalizado de forma que:

para $a_1,\ldots a_n$ constantes e qualquer variável aleatória multivariada $(X_1,\ldots X_n)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right) = \sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)$$

Se $E(X_i)$ não divergem.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Resumo

Retornar

- Linearidade do Valor Esperado

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e seja

$$Z = XY.$$

Portanto $E[Z] = E[XY] = E[X]E[Y]$

Prova: $E[XY] = \sum_i\sum_j x_iy_jp(x_i,y_j) =$

$$\sum_i\sum_j x_iy_jp_X(x_i)p_Y(y_j) = \text{(dado que são independentes)}$$

$$\sum_i x_iy_jp_X(x_i)\sum_j y_jp_Y(y_j) =$$

$$E[X]E[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$$Z = X + Y$$

Portanto $Var[Z] = \mathrm{Var}[X + Y]$

$$= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2 \times \mathrm{Cov}(X, Y)$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$\begin{aligned} Var[X+Y] &= E[((X+Y) - E[X+Y])^2] \\ &= E[((X+Y) - E[X] - E[Y])^2] \\ &= E[((X - E[X]) + (Y - E[Y]))^2] \\ &= E[(X - E[X])^2 + (Y - E[Y])^2 + 2(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] + E[2(X - E[X])(Y - E[Y]] \\ &= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y]] \\ &= Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y) \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y]]$$

$$= E(XY - YE[X] - XE[Y] + E[X]E[Y])$$

Devido à propriedade de linearidade do valor esperado, temos:

$$= E[XY] - E(YE[X]) - E(XE[Y]) + E[X]E[Y]$$

$$= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y]$$

$= E[XY] - E[X]E[Y]$ (Se X e Y forem independentes)

$= 0$ (devido à linearidade)

Ver também o slide 101

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X + Y) = Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y)$$

Dado que se X e Y forem independentes, tem-se Cov(X,Y)=0.
Portanto:

$$Var(X + Y) = Var[X] + Var[Y]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X + Y) = Var[X] + Var[Y]$$

O teorema acima pode generalizado para n variáveis aleatória Mutuamente independentes $X_1, \dots X_n$ com constantes $a_1, \dots a_n$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$$

Ver também o slide 77

Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X - Y) = Var[X] + Var[Y]$$

Dado que $Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$

Pois $a_x = 1$ e $a_y = -1$

$$Var[X - Y] = a_x^2 Var[X] + a_y^2 Var[Y]$$

$$= (1)^2 Var[X] + (-1)^2 Var[Y]$$

$$= Var[X] + Var[Y]$$

Processos Estocásticos

- Processo Estocástico é definido por um conjunto de variáveis aleatórias,

$\{X(t) : t \in T\}$, onde $X(t)$ é uma variável aleatória para cada $t \in T$.
t é denominado parâmetro e cada valor de $X(t)$ são estados.

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Tipos de Processos Estocásticos
  - Processos de espaço de estados e tempo discretos (*Discret Time Markov Chain* - DTMC)
  - Processos de espaço de estados contínuo e tempo discreto
  - Processos de espaço de estados discreto e tempo contínuo (*Continuos Time Markov Chain* - CTMC)
  - Processos de espaço de estados e tempo contínuos

Processos Estocásticos

- Classificação de Estados:
  - Estado Alcançável (*reachable*): um estado s_j é um alcancável de um estado s_i se $p_{ij} > 0$.
  - Um sub-conjunto de estado S é definido com fechado (*closed*) se $\forall s_i \in S$, $p_{ij} = 0$, $\forall s_j \notin S$.
  - Um estado é absorvente se ele é o único membro de conjunto fechado de estados S.
  - Um conjunto fechado de estado S é dito irredutível se $p_{ij} > 0 \ \ \forall s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).

Processos Estocásticos

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Observam-se dois aspectos associados a ausência de memória:
  1 Todo estado passado é irrelevante.
  2 O tempo que o processo passa em um estado é irrelevante.
- Processo Estocástico Semi-Markoviano é uma extensão de um processo Markoviano onde a restrição 2 é relaxada.

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

Considere uma CTMC (não-homogênea) $\{X(t): t \geq 0\}$ com espaço de estado $\{0,1,2,\ldots\}$. Vamos usar i,j e k para denotar estados típicos e s,u e t para denotar parâmetro de tempo.

Para $0 \leq s \leq t$, considere $p_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$. Pode ser representada na forma matricial por $H(s,t) = [\ p_{ij}(s,t)]$

A equação de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u)\ p_{kj}(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Na forma matricial, temos:

$$H(s,t) = H(s,u)\ H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$H(s,t) = H(s,u)\ H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$

Substituindo u por t e t por $t+h$, então:

$H(s,t+h) = H(s,t)\ H(t,t+h)$

Subtraindo-se ambos os lados por $H(s,t)$, temos:

$H(s,t+h) - H(s,t) = H(s,t)\ [H(t,t+h) - I]$

Dividindo-se por h e aplicando-se o limite $h \to 0$, tem-se:

$$\lim_{h \to 0} \frac{H(s,t+h) - H(s,t)}{h} = H(s,t)\ [\lim_{h \to 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}]$$

Levando à equação diferencial parcial $\dfrac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t) \qquad \textit{(forward Kolmogorov eq.)}$$

Onde $Q(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{H(t,t+h) - I}{h}$

Os elementos de $Q(t)$ são dados por

$$q_{ii}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h}$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} \qquad i \neq j$$

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$1 - p_{ii}(t,t+h) = -hq_{ii}(t) + o(h)$

$p_{ij}(t,t+h) = hq_{ij}(t) + o(h)$

Onde $o(h)$ é uma função de converge para zero mais rápido que h.

Dado que $\sum_j p_{ij}(s,t) = 1, \forall i$, portanto:

$$\sum_j q_{ij}(s,t) = 0, \forall i$$

Ou seja, a soma de elementos de uma linha de Q é zero.

Continuos Time Markov Chain

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t) \qquad \textit{(forward Kolmogorov eq.)}$$

Para cadeias homogêneas, tem-se:

$Q(t) = Q$ e $H(s,t) = \Pi(t)$

Continuos Time Markov Chain

- *Steady State Analysis*

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \qquad \text{(homogêneas)}$$

Em estado estacionário ($t \to \infty$), pode ser que

$\lim_{t\to\infty} \Pi(t) = \Pi(t)$ exista.

Caso exista, então $\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = 0$, então $\Pi Q = 0$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = 0$

$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

Onde π_{s_i} fornece a *steady-state probability* de um sistema estar no estado s_i

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$$

Onde $\pi(t)_{si}$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

Continuos Time Markov Chain

- Uma CTMC é dita irredutível se $p_{ij} > 0 \ \forall s_i, s_j \in S$ (todo estado s_j é alcançável de qualquer estado s_i).

- Uma CTMC finita, irredutível e homogênea é dita ergódica (*ergodic*) se o vetor de probabilidade estacionária (*steady-state probability vector*) Π existe.

Continuos Time Markov Chain

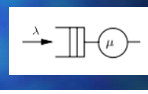
- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = \underline{0} \qquad \sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

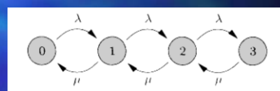
- **Métodos diretos**
  - Eliminação de Gauss
  - Decomposição LU
  - Método de Grassmann
- **Métodos Iterativos**
  - Power Method
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel

Continuos Time Markov Chain

- $\lambda = 0{,}2$,
- $\mu = 0{,}4$



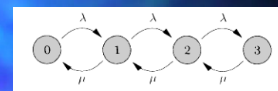
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$



$\pi(0) = \underline{0.5333}$, $\pi(1) = \underline{0.2667}$, $\pi(2) = \underline{0.1333}$, $\pi(3) = \underline{0.0667}$

Continuos Time Markov Chain

- $\lambda = 0{,}2$,
- $\mu = 0{,}4$



- Utilização: $\rho = 1 - \pi(0) = \underline{0.4667}$
- Throughput $tp = \pi(1)\times\mu + \pi(2)\times\mu + \pi(3)\times\mu$

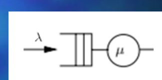
$tp = 0{,}2667 \times 0{,}4 + 0{,}1333 \times 0{,}4 + 0{,}0667 \times 0{,}4$

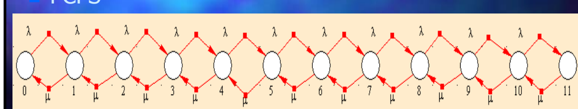
$tp = 0{,}18668$

Continuos Time Markov Chain

Sharpe (chame via Desktop)

- Tamanho do buffer=11
- λ
- μ
- FCFS





State probability of State i={0,1,…,11}
State_Prob(i):

Continuos Time Markov Chain

- Métricas - Métricas de interesse pode ser calculadas através da soma ponderada das probabilidades de estado.
  - *Reward rate* em estado estacionário

$$E[Z] = \sum_i r_i \pi_i$$

  - *Reward rate* instantânea

$$E[Z(t)] = \sum_i r_i \pi_i(t)$$

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

Continuos Time Markov Chain

- Métricas – a probabilidade acumulada de que se esteja num estado é dada por:

$$\mathbf{L}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\pi}(u)\,\mathrm{d}\,u$$

Portanto, $\mathbf{L}_i(t)$ tempo médio (esperado) que se permanece no estado i durante o intervalo [0,t).

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

Continuos Time Markov Chain

Sharpe (chame via Desktop)

Sistema Computacional com degradação

C:\Sharpe-Gui\SHARPE GUI Examples\Markov\Degradable

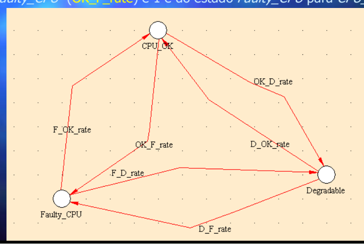
- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios: *CPU_OK*, *Degradable* e *Faulty_CPU*.
- As taxas entre os estados são:

CPU_OK para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20, *Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.

Continuos Time Markov Chain

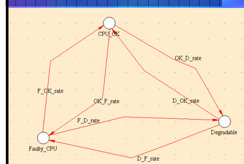
Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios*: CPU_OK, Degradable e Faulty_CPU.* As taxas entre os estados são:
- *CPU_OK* para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20, *Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.



Continuos Time Markov Chain

Sistema Computacional com degradação



Rate Matrix

Matrix	CPU_OK	Degradable	Faulty_CPU
CPU_OK		OK_D_rate	OK_F_rate
Degradable	D_OK_rate		D_F_rate
Faulty_CPU	F_OK_rate	F_D_rate	

```
******************************************************************************
*********  Outputs asked for the model: Degradable **************
Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5, F_D_rate=10, OK_F_rate=1, F_OK_rate=1
Output:
State probability of CPU_OK
State_Prob:   1.20967742e-001

----------------------------------------

State probability of Degradable
State_Prob_0:   5.96774194e-001

----------------------------------------

State probability of Faulty_CPU
State_Prob_1:   2.82258065e-001

----------------------------------------
```

```
******************************************************************************
*********  Outputs asked for the model: Degradable **************
Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5
Output:
Expected steady-state reward rate for Degradable
Exp_SS_Reward_Rate:   2.40322581e+001
```

Reward configuration:

State input:

Name of the state: CPU_OK

Reward rate: 100

State	Reward
CPU_OK	100
Degradable	20
Faulty_CPU	0

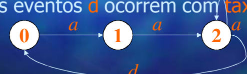
```
******************************************************************************
*********  Outputs asked for the model: Degradable **************
Input parameters values: OK_D_rate= 100, D_OK_rate=20, D_F_rate=5, F_D_rate=10, OK_F_rate=1, F_OK_rate=1
Output:
Steady_State Availability for Degradable
SS_Avail:   7.17741935e-001
```

Up states:

CPU_OK
Degradable

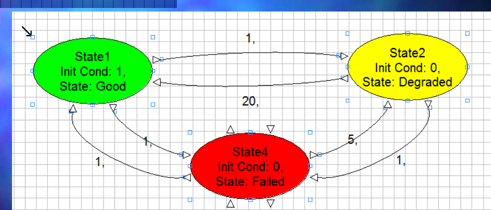
Continuos Time Markov Chain

- Suponha um sistema representado por um autômato estocástico, onde:
  - $S = \{0,1,2\}$
  - $E = \{a,d\}$
  - $f(0,a)=1,\ f(1,a)=2,\ f(2,a)=2,\ f(2,d)=0$
  - $\Gamma(0) = \{a\},\ \Gamma(1) = \{a\},\ \Gamma(2) = \{a,d\}$
  - Os eventos a ocorrem com taxa igual = λ,
  - Os eventos d ocorrem com taxa igual = μ



State Transition Diagram

Continuos Time Markov Chain



Markov Transitions

	Identifier	Description	Input State	Output State	Transition Reward	Rate	Cost
1	Transition1		State1	State2	Loss	1,000000	0,00
2	Transition2		State2	State1	Loss	20,000000	10,00
3	Transition3		State2	State4	Loss	1,000000	0,00
4	Transition4		State4	State2	Loss	5,000000	20,00
5	Transition5		State1	State4	Loss	1,000000	0,00
6	Transition6		State4	State1	Loss	1,000000	40,00

Continuos Time Markov Chain

Steady State Results:

Result	Value
Availability	0,857143
Cost Per Unit Time	765,714286
MTBF	1,166667
MTTR	0,166667

Results at time 1000,000000:

Result	Value
Availability	0,857143
Cost Per Unit Time	765,714286
Failure Rate	NA
Mean Availability	0,857163
Mean Cost	765,744808
Mean Unavailability	0,142837
Reliability	0,000000
Total Cost	765744,807972
Total Downtime	142,836554
Total Uptime	857,163446
Unreliability	1,000000

Time	Availability	Cost Per Unit Time	Failure Rate	Mean Availability	Mean Cost	Mean Unavailabi...	Reliability	Total Cost	Total Downtime	Total Uptime	Unreliabili
0	1,000000	1000,000000	1000000,000000	1,000000	1000,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,00000
100,00	0,857143	765,714286	NA	0,857349	766,019508	0,142651	0,000000	76601,950829	14,265126	85,734874	1,00000
200,00	0,857143	765,714286	NA	0,857246	765,866897	0,142754	0,000000	153173,379401	28,550840	171,449160	1,00000
300,00	0,857143	765,714286	NA	0,857211	765,816027	0,142789	0,000000	229744,807972	42,836554	257,163446	1,00000
400,00	0,857143	765,714286	NA	0,857194	765,790591	0,142806	0,000000	306316,236543	57,122269	342,877731	1,00000
500,00	0,857143	765,714286	NA	0,857184	765,775330	0,142816	0,000000	382887,665115	71,407983	428,592017	1,00000
600,00	0,857143	765,714286	NA	0,857177	765,765156	0,142823	0,000000	459459,093686	85,693697	514,306303	1,00000
700,00	0,857143	765,714286	NA	0,857172	765,757889	0,142828	0,000000	536030,522258	99,979412	600,020588	1,00000
800,00	0,857143	765,714286	NA	0,857169	765,752439	0,142831	0,000000	612601,950829	114,265126	685,734874	1,00000
900,00	0,857143	765,714286	NA	0,857166	765,748199	0,142834	0,000000	689173,379401	128,550840	771,449160	1,00000
1000,00	0,857143	765,714286	NA	0,857163	765,744808	0,142837	0,000000	765744,807972	142,836554	857,163446	1,00000

Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*

$$\sum_{si\in S} \pi_{si}=1$$

$$\Pi\, Q = 0$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)\, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $$Q = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{vmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} & \end{array}$$

$$-\lambda\, \pi_0 + \mu\, \pi_2 = 0$$

$$\lambda\, \pi_0 - \lambda\, \pi_1 = 0$$

$$-\lambda\, \pi_1 - \mu\, \pi_2 = 0$$

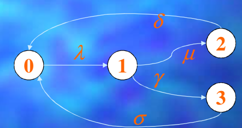
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$$\pi_0 = \pi_1 = \mu / (2\,\mu + \lambda)$$

$$\pi_2 = \lambda / (2\,\mu + \lambda)$$

Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*



- $$Q = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{cccc} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma+\mu) & \mu & \gamma \\ \delta & 0 & -\delta & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array}$$

$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

$\Pi\, Q = 0$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)\, Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T = 1 / (\pi_0 \times \lambda)$ - Tempo médic entre finalizações

Continuos Time Markov Chain

Data

$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{TS} = 1$

$E[ST] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$

State probability of 0: 5.16129024e-001

State probability of 1: 2.58064518e-001

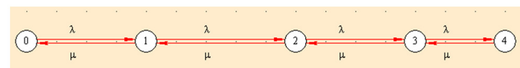
State probability of 2: 1.29032262e-001

State probability of 3: 6.45161314e-002

State probability of 4: 3.22580656e-002

Utilization= 0.483871

The CTMV (M/M/M/1/K=4)



Continuos Time Markov Chain

Data

$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$E[TBA] = 0.05s$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{ST} = 0.5$

$E[ST] = 0.025s$

Considering:

$$\gamma = \left(\frac{E[ST]}{\sigma_{ST}}\right)^2$$

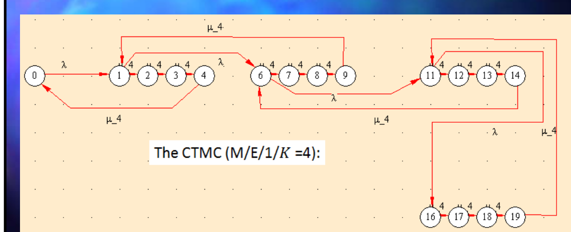
$$\mu_E = \left(\frac{\gamma}{E[ST]}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{0.025}{0.0125}\right)^2 = 4$$

$$\mu_E = \frac{4}{0.025} = 160$$

Therefore, the ST is represented by a Erlang(γ =4, $\mu_E = 160$).

Continuos Time Markov Chain



Continuos Time Markov Chain

State probability of 0:	6.36420144e-001
State probability of 1:	7.95525157e-002
State probability of 2:	7.95525156e-002
State probability of 3:	7.95525154e-002
State probability of 4:	7.95525151e-002
State probability of 6:	9.94406408e-003
State probability of 7:	9.94406433e-003
State probability of 8:	9.94406460e-003
State probability of 9:	9.94406484e-003

State probability of 11:	1.24300805e-003
State probability of 12:	1.24300813e-003
State probability of 13:	1.24300822e-003
State probability of 14:	1.24300830e-003
State probability of 16:	1.55376016e-004
State probability of 17:	1.55376027e-004
State probability of 18:	1.55376038e-004
State probability of 19:	1.55376046e-004

Utilization= 0.36358

Continuos Time Markov Chain

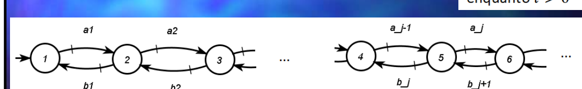
- *Birth-death chain*

Considere o automata

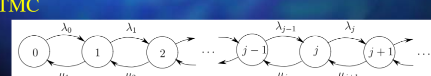
$f(i, a_i) = i + 1$

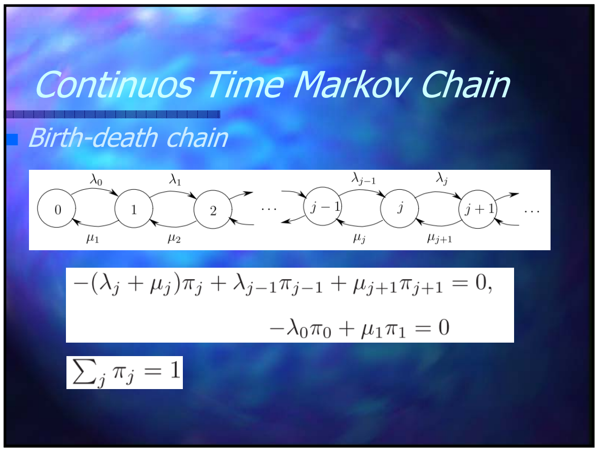
$f(i+1, b_i) = i$

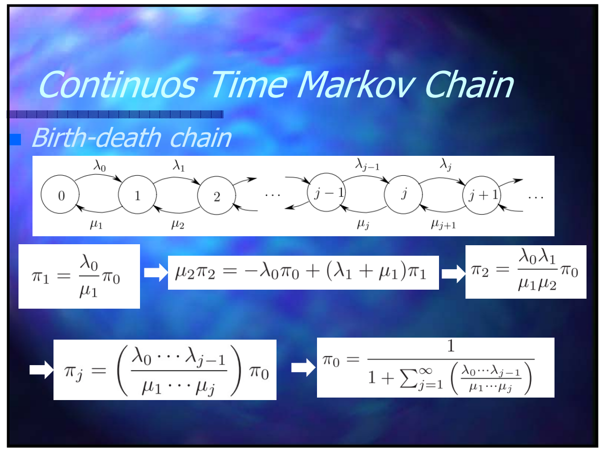
enquanto $i > 0$

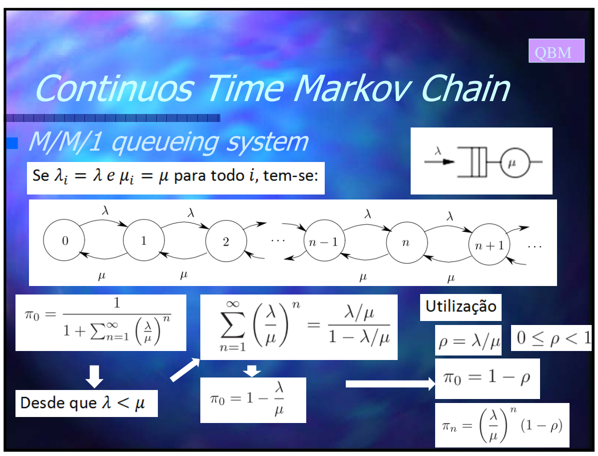


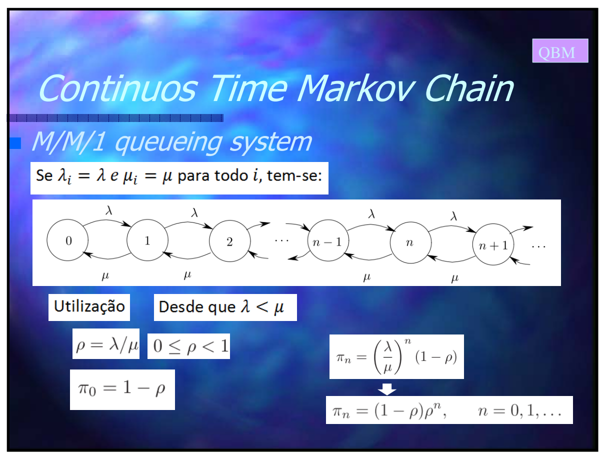
CTMC

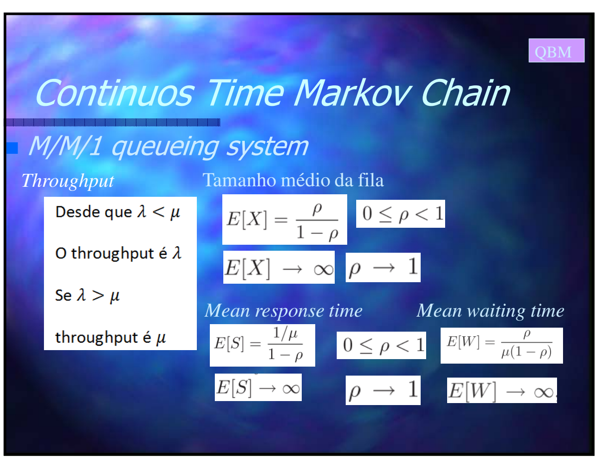


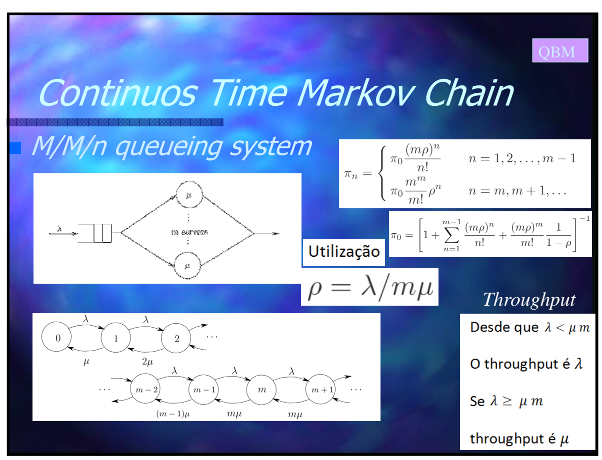

Continuos Time Markov Chain
Birth-death chain
$-(\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0,$
$-\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0$
$\sum_j \pi_j = 1$


Continuos Time Markov Chain
Birth-death chain
$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$
$\mu_2\pi_2 = -\lambda_0\pi_0 + (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1$
$\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$
$\pi_j = \left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}\right)\pi_0$
$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}\right)}$


QBM
Continuos Time Markov Chain
M/M/1 queueing system
Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo i, tem-se:
$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}$
Utilização
$\rho = \lambda/\mu$
$0 \le \rho < 1$
Desde que $\lambda < \mu$
$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
$\pi_0 = 1 - \rho$
$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1-\rho)$


QBM
Continuos Time Markov Chain
M/M/1 queueing system
Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo i, tem-se:
Utilização
Desde que $\lambda < \mu$
$\rho = \lambda/\mu$
$0 \le \rho < 1$
$\pi_0 = 1 - \rho$
$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1-\rho)$
$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, \ldots$


QBM
Continuos Time Markov Chain
M/M/1 queueing system
Throughput
Desde que $\lambda < \mu$
O throughput é λ
Se $\lambda > \mu$
throughput é μ
Tamanho médio da fila
$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho}$
$0 \le \rho < 1$
$E[X] \to \infty$
$\rho \to 1$
Mean response time
Mean waiting time
$E[S] = \frac{1/\mu}{1-\rho}$
$0 \le \rho < 1$
$E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
$E[S] \to \infty$
$\rho \to 1$
$E[W] \to \infty$


QBM
Continuos Time Markov Chain
M/M/n queueing system
$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \frac{(m\rho)^n}{n!} & n = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \frac{m^m}{m!}\rho^n & n = m, m+1, \ldots \end{cases}$
$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1}\frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$
Utilização
$\rho = \lambda/m\mu$
Throughput
Desde que $\lambda < \mu\, m$
O throughput é λ
Se $\lambda \ge \mu\, m$
throughput é μ

QBM

Continuos Time Markov Chain

M/M/n queueing system

Tamanho médio da fila

$E[X] = m\rho + \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\rho}{(1-r)^2}\pi_0$ $\lambda < \mu\, m$

$E[X] \rightarrow \infty$ $\lambda \geq \mu\, m$

Fórmula de Erlang

Probabilidade de um cliente chegar e não encontrar o servidor disponível

$P_Q = P[X \geq m] = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n$

$P_Q = \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\pi_0}{1-\rho}$

Mean response time

$E[S] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\pi_0}{m(1-\rho)^2}$ $\lambda < \mu\, m$

$E[S] \rightarrow \infty$ $\lambda \geq \mu\, m$

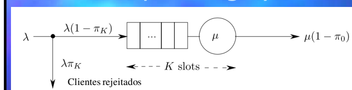
QBM

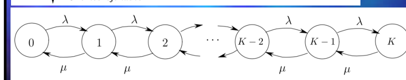
Continuos Time Markov Chain

M/M/1/K queueing system

$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$

$\pi_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n & \text{if } 0 \leq n \leq K \\ 0 & \text{if } n > K \end{cases}$





Utilização

Se $\lambda > \mu$ a utilização $\longrightarrow 1$

Se $\lambda < \mu$ a utilização $= \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Probabilidade de Descarte

$P_D = \pi_K = (1-\rho)\frac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$

QBM

Continuos Time Markov Chain

M/M/1/K queueing system

Tamanho médio da fila

$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right]$

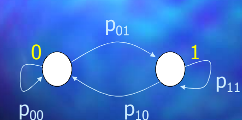
Mean response time

$E[S] = \frac{E[X]}{\lambda(1-\pi_K)}$

$\lambda(1-\pi_K)$- taxa de chegada dos clientes admitidos

Discrete Time Markov Chain

- O comportamento de uma rede estocástica é representado por DTMC



Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \end{array}$$
$$P = \begin{array}{c|cc|c} & 0 & 1 & \\ & p_{00} & p_{01} & 0 \\ & p_{10} & p_{11} & 1 \end{array}$$

Discrete Time Markov Chain

- Estado transiente: um estado é transiente se a probabilidade de não se retornar ao estado é diferente de zero.
- Estado recorrente (*recurrent*): o estado i é chamado de recorrente se a probabilidade de se sair de i e retornar a i é 1.
- MRT (*mean recurrence time*): $\mu_i = \sum_{i=1}^{n} n \times f_{ii}(n)$
  fii é a probabilidade de se retornar a i após n passos.

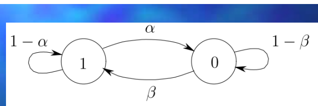
Discrete Time Markov Chain

- Estado recorrente não nulo (*recurrent non null*): um estado é classificado como recorrente não nulo se $\mu_i < \infty$, caso contrário é classificado como recorrente nulo (*recurrent null*).
- Seja i um estado é recorrente e pii(n)>0, e seja d o período. Se d =1 o estado é aperiódico, se d>1 é periódico.

Discrete Time Markov Chain

Considere uma máquina que pode estar em um dos dois estados, UP ou DOWN, onde 1 denota UP e 0 denota DOWN. O estado do máquina é verificada a cada hora, e nós horas de índice k = 0, 1,. .

Consideremos que se a máquina estiver UP, tem uma probabilidade α de falhar durante a próxima hora. Se a máquina estiver no estado DOWN, tem probabilidade β de sere reparada durante a próxima hora.



$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Chamar o modelo C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl

Discrete Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} A_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}) \\ A_2=(a_{21}\ a_{22}\ a_{23}) \\ A_3=(a_{31}\ a_{32}\ a_{33}) \end{matrix}$$

a_{ij} - probabilidade $\qquad \sum_{si \in S} a_{ij}=1$

$\Pi \,.\, P = \Pi$, $\quad \sum_{si \in S} \pi_i=1$, onde π_i fornece o número relativo de visitas ao estado s_i

Chamar o modelo C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl

Mathematica

Discrete Time Markov Chain

- Soluções para Transiente

$\Pi(1)= \Pi(0)\ P$,

$\Pi(2)= \Pi(1)\ P = \Pi(0)\ P^2$

$\Pi(k)= \Pi(0)\ P^n$, k=1,2,...

Discrete Time Markov Chain

Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains

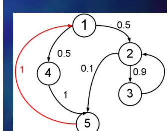
More specifically, the Control Flow Graph (CFG) of the application is mapped into an ergodic DTMC. In this approach, energy consumption as well as execution time are numerically evaluated.

Modeling. Each basic block[1] B_i in the CFG is mapped into a state X_i in the DTMC. Similarly, control flow edges are mapped as transitions between states and are labeled by the state transition probabilities, as:

$$P(B_i, B_j) = Pr(B_i\ jumps\ to\ B_j)\ ,$$

which defines the probability of executing B_j after B_i.

```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else {  //  <0.5>
      x = 0;
   }

}
```



Discrete Time Markov Chain

Mathematica

Outro exemplo

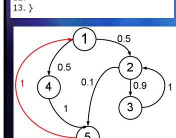
Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains

```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else {  //  <0.5>
      x = 0;
   }

}
```

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$0 \le p_{ij} \le 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \text{ for each } i.$$

Excel e abrir também o SHARPE:
C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\ext_dtmc.mkv)



$$\pi \;=\; (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$$

$$v_j \;=\; \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

$$E = \sum_{\substack{b=all\\basic\\blocks}} v_b \times \Big(\sum_{\substack{c=all\\instruction\\classes}} I_{b,c} \times (e_c + O_b \times e_o)\Big)$$

$$T = \sum_{\substack{b=all\\basic\\blocks}} v_b \times \Big(\sum_{\substack{c=all\\instruction\\classes}} I_{b,c} \times (t_c + O_b \times t_o)\Big)$$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\dfrac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$, $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Onde $\pi_{si}(t)$ é probabilidade de se estar na estado s_i no instante t

Métodos de Solução:

- Solução via Sistemas de Eq. Diferencial Ordinária
- Solução através de transformada de Laplace
- Runge-Kutta
- Uniformização (Transformar CTMC em DTMC)

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$, $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt}$

Pela série de Taylor/MacLaurin, temos:

$e^{Qt}= I + Qt/1! + (Qt)^2/2! + (Qt)^3/3! + \ldots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

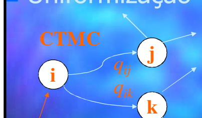
$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

- Problemas de arrendodamento ocorrem devido aos valores positivos e negativos que Q contém.
- A matriz $(Qt)^k$ se torna não-esparsa o que requer capacidade muito maior.

Para evitar estes problemas aplica-se o método chamado de uniformização (ou aleatorização - *Randomization*) também chamado de método de Jensen

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



Estado de menor tempo de permanência

$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ii}|\}$

Considere que tomemos uma taxa uniforme $\lambda \geq \Lambda(i)$ onde:

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$ ($\lambda - \Lambda(i) = \nu$)

e $\nu \geq 0$ é a taxa de arbitrária de um evento fictício que não muda o estado *i*.

Tempo de permanência no estado i:

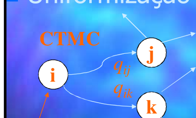
$1/(-q_{ii}) = 1/ \Lambda(i)$

Sabe-se também que:

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



Estado de menor tempo de permanência

$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

Em todos os estados na CMTC que tiverem tempo de permanência igual a $1/(-q_{ii})$, não teremos transição (auto-laço) na DTMC. Para os estados que tiverem tempo de permanência maior, ou seja uma época não é longa o suficiente, estes estados devem ser revisitados (auto-laço).

Sabe-se também que:

Tempo de permanência no estado i:

$\Delta t =1/(-q_{ii}) = 1/ \Lambda(i)$

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização

$\Lambda(i) = q_{ij}+ q_{ik}$

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$

Sabe-se também que:

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$

$p_{ij} = q_{ij}/ \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/ \Lambda(i)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização

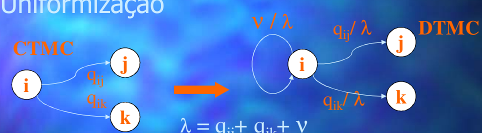
- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$\lambda = q_{ij}+ q_{ik}+ \nu$

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{-q_{ij}\}$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$

$\lambda \geq \max_{\forall s_i \in S}\{-q_{ij}\}$

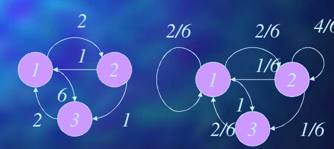
Outra interpretação:

Considerando $1/\lambda = \Delta t$ como uma época (time-step), $P = I + Q\,\Delta t$ que é igual aos dois primeiros termos da expansão de Taylor, portanto a cadeia uniformizada é uma aproximação de primeira ordem da CTMC.

- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

Continuos Time Markov Chain

- Uniformização
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{\forall s_i \in S}\{|q_{ij}|\}$



Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)e^{\lambda(P - I)t}$

$= \Pi(0)e^{\lambda Pt}\, e^{-\lambda It} = \Pi(0)e^{\lambda Pt}\, e^{-\lambda t} =$

$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} e^{\lambda Pt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n! =$

$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n!\ , n \in \aleph$

Na matriz P os valores estão entre 0 e 1. Não há valores negativos, o que evita os erros de arrendodamento que ocorrem na expansão com a matriz Q.

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n!\ ,\ n \in \aleph$

$\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n!\ ,\ n \in \aleph$

$\Pi(t)=\Pi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)P^n\ ,\ n \in \aleph$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \Pi(0)P^n\ ,\ n \in \aleph$

Uma solução iterativa:

$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n)\ ,\ n \in \aleph$

$\hat{\Pi}(0)= \Pi(0),\ \ \hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P\ ,\ n \in \aleph$

Podemos truncar a série de maneira que a se atinja uma exatidão $1-\varepsilon$ (ε = erro).

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\tilde{\Pi}(t)=\sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n)\ ,\ n \in \aleph$

$||\, \Pi(t)- \tilde{\Pi}(t)||_{\infty} = ||[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n!]\ -$

$[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda Pt)^n/n!\ ]||_{\infty} \leq$

A desiguladade ocorre, pois $[P^n]_{ij}$ são menores ou iguais a um.

$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! \leq \varepsilon$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

Dado que $\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$ é uma distribuição discreta (Poisson), portanto:

$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n) = 1 = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n) + \sum_{n=ke+1}^{\infty} \psi(\lambda t,n)$, $n \in \aleph$

Do slide anterior, tem-se:

$\boxed{\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \leq \varepsilon}$ Desta forma:

$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! = [1 - e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n!] \leq \varepsilon$

Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transiente

$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! = [1 - e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n!] \leq \varepsilon$

$\sum_{n=0}^{ke} e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n! \geq 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \geq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{\forall s i \in S}\{|q_{ii}|\}$
- *Considere* $\varepsilon = 10^{-4}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \geq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$

Dado $\lambda = 6$ *e considerando* $\varepsilon = 10^{-4}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Para $t = 0.1$, tem-se: $(1-\varepsilon)\, e^{\lambda t} = (1-10^{-4})\, e^{0.6} = 1{,}8219$

$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \geq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$

$\sum_{n=0}^{4} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8214,$

$\sum_{n=0}^{5} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8221,$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(t) = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0,1	0,2	0,5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0,1 \Rightarrow ke = 5$ Portanto:

$\hat{\Pi}(0) = \Pi(0) = (1,0,0)$ obtêm-se:

$\hat{\Pi}(1)$, $\hat{\Pi}(2)$, $\hat{\Pi}(3)$, $\hat{\Pi}(4)$, $\hat{\Pi}(5)$ através de

$\hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-0.6}(0.6)^n]/n!$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$, $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\psi(0.6,0) = [e^{-0,6}(0,6)^0/0!]$

$\psi(0.6,1) = [e^{-0,6}(0,6)^1/1!]$

$\psi(0.6,2) = [e^{-0,6}(0,6)^2/2!]$

$\psi(0.6,3) = [e^{-0,6}(0,6)^3/3!]$

$\psi(0.6,4) = [e^{-0,6}(0,6)^4/4!]$

$\psi(0.6,5) = [e^{-0,6}(0,6)^5/5!]$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

t	0.1	0.2	0.5	1	5	10	20	50	100
ke	5	7	11	17	52	91	163	367	693

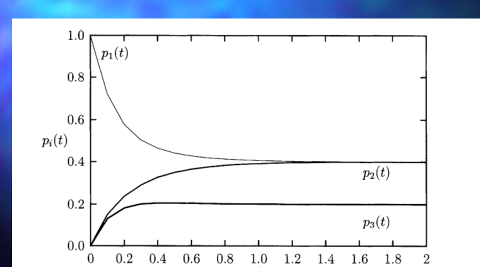
Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$, $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = (0.71,\ 0.1502,\ 0.1268)$

Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)



Semi-Markovian Chain (SMC)

- Considere uma DTMC, contudo também considere um tempo de permanência (no domínio contínuo: $t \in \mathbb{R}$), em cada estado $i \in S$ da DTMC, com distribuição $F_i(t)$ e densidade $f_i(t)$.
- Este modelo é denominado SMC.

Semi-Markovian Chain (SMC)

- SMC é caracterizada por:
  - matriz de probabilidade de 1 passo (P),
  - vetor de probabilidade inicial ($\Pi(0)$) e
  - o vetor de distribuições de permanência nos estados ($F(t) = (F_1(t),\ldots,F_i(t),\ldots,F_{|S|}(t))$).

Semi-Markovian Chain (SMC)

- Interpretação
  - Em cada instante em que ocorrem mudanças de estados, a SMC tem comportamento igual ao da correspondente DTMC (comportamento descrito por P) e é independente do passado.
  - Quando se alcança um estado i, um tempo distribuído conforme $F_i(t)$ deve se passar para que ocorra nova transição entre estados.

Semi-Markovian Chain (SMC)

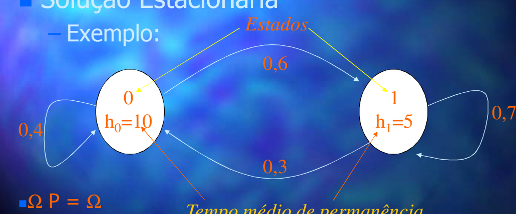
- Solução Estacionária
  - Encontre a solução estacionária para DTMC embutida (caracterizada por P):
    - $\Omega P = \Omega$
    - $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
  - Calcule o tempo médio de permanência (h_i) em cada estado i:
    - $h_i = \int_0^{\infty} t\, f_i(t)dt$

Semi-Markovian Chain (SMC)

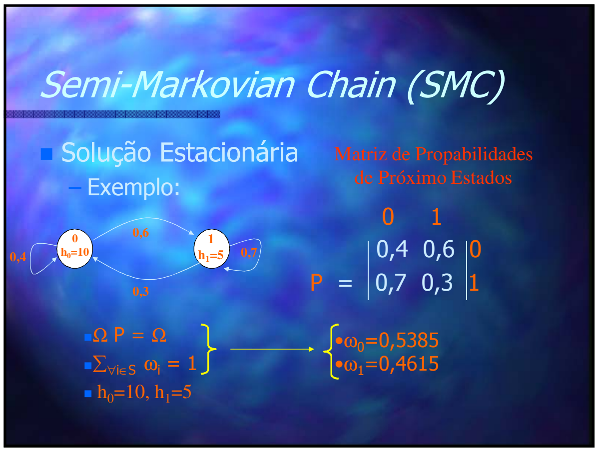
- Solução Estacionária
  - A probabilidade de estado estacionário da SMC é obtida por:
    - $\pi_i = (\omega i \times h_i)/ (\sum_{\forall j \in S} \omega_j \times h_j), \ \forall i$
  - Em muitas aplicações, h_i é fornecido diretamente.
- Solução transiente é mais sofisticada.

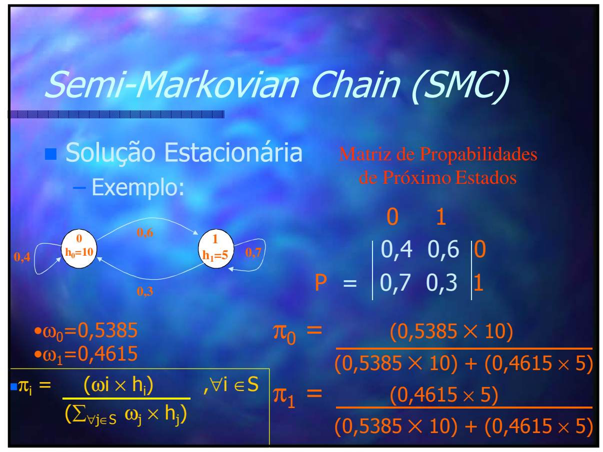
Semi-Markovian Chain (SMC)

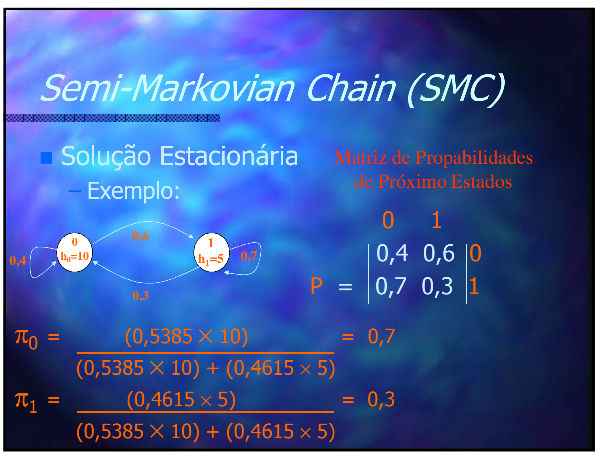
- Solução Estacionária
  - Exemplo:

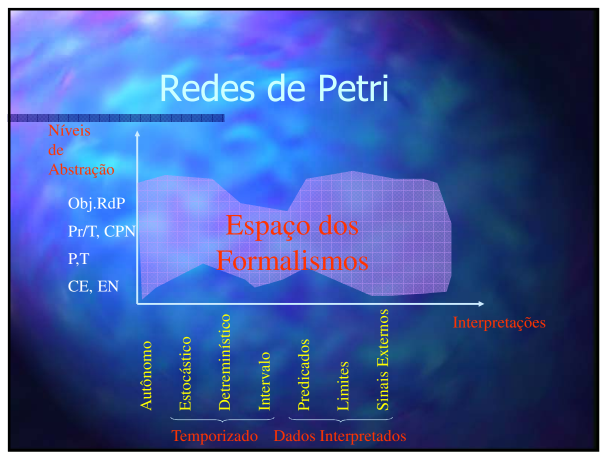


- $\Omega P = \Omega$
- $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
- $h_0=10,\ h_1=5$

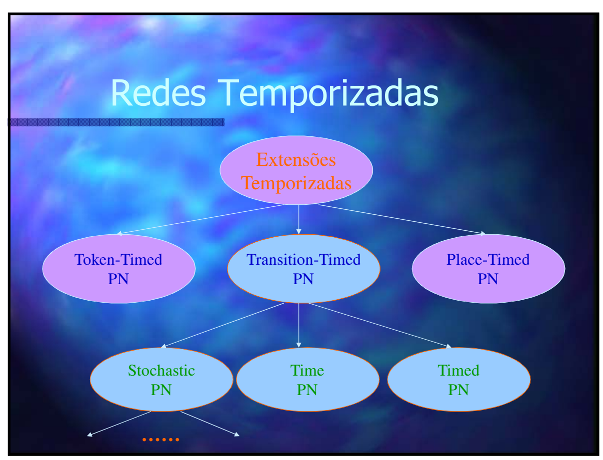

Semi-Markovian Chain (SMC)
Solução Estacionária
Exemplo:
Matriz de Propabilidades
de Próximo Estados
0
1
0,4 0,6 0
0,7 0,3 1
P =
0,6
0,3
0,4
0,7
h0=10
h1=5
Ω P = Ω
Σ∀i∈S ωi = 1
h0=10, h1=5
ω0=0,5385
ω1=0,4615


Semi-Markovian Chain (SMC)
Solução Estacionária
Exemplo:
Matriz de Propabilidades
de Próximo Estados
0
1
0,4 0,6 0
0,7 0,3 1
P =
ω0=0,5385
ω1=0,4615
πi = (ωi × hi) / (Σ∀j∈S ωj × hj) ,∀i ∈S
π0 = (0,5385 × 10) / (0,5385 × 10) + (0,4615 × 5)
π1 = (0,4615 × 5) / (0,5385 × 10) + (0,4615 × 5)


Semi-Markovian Chain (SMC)
Solução Estacionária
Exemplo:
Matriz de Propabilidades
de Próximo Estados
0
1
0,4 0,6 0
0,7 0,3 1
P =
π0 = (0,5385 × 10) / (0,5385 × 10) + (0,4615 × 5) = 0,7
π1 = (0,4615 × 5) / (0,5385 × 10) + (0,4615 × 5) = 0,3


Redes de Petri
Níveis
de
Abstração
Obj.RdP
Pr/T, CPN
P,T
CE, EN
Espaço dos
Formalismos
Interpretações
Autônomo
Estocástico
Determinístico
Intervalo
Predicados
Limites
Sinais Externos
Temporizado
Dados Interpretados


Redes Temporizadas
Extensões
Temporizadas
Token-Timed
PN
Transition-Timed
PN
Place-Timed
PN
Stochastic
PN
Time
PN
Timed
PN
......


Redes Temporizadas
Extensões
Temporizadas
Token-Timed
PN
Transition-Timed
PN
Place-Timed
PN
Stochastic
PN
Time
PN
Timed
PN
......

Redes Temporizadas

- Ramchandani, 1973 - Transition Timed Net
- Merlin, 1976 - Transition Time Net
- Sifakis, 1977 - Place Timed Net

Redes Temporizadas Estocásticas

- Natkin -1980
- Molloy - 1981
- Marsan et al. - 1984

É uma rede temporizada onde o *delay* associado à transição é uma variável aleatória de distribuição exponencial

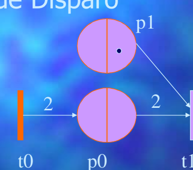
Redes Temporizadas

- Redes de Petri com Lugares Temporizados (PTPN) (Sifakis77)
- Definição: PTPN=$(P,T,F,K,W,M_0,\Gamma,\upsilon)$, onde

P é o conjunto de lugares,
T o conjunto de transições,
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ uma relação que representa os arcos
W – Valoração (peso dos arcos) - $W: F \rightarrow N$
M_0- Marcação inicial - $M_0:P \rightarrow N$
$\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_i,...\}$ números reais denominada base de tempo.
$\upsilon:P \rightarrow \Gamma$ um mapeamato que $\upsilon(p) = \gamma_j$

Redes Temporizadas - PTPN -

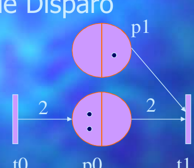
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$

Redes Temporizadas - PTPN -

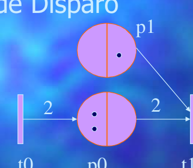
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=0

Redes Temporizadas - PTPN -

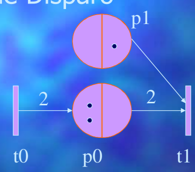
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=1

Redes Temporizadas
- PTPN -

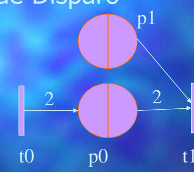
- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=2

Redes Temporizadas
- PTPN -

- Regra de Disparo



$\upsilon(p0) = 3$ Instante=3

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Marcas são consumidas dos lugares de entrada
    - Há uma duração
    - Marcas são geradas no lugares de saída
  - Disparo atômico
    - As marca permanecem nos lugares de entrada pelo período igual ao *delay* associada à transição. Após o *delay* as marcas são consumidas e geradas nos lugares de saída imediatamente.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Pode ser representada por uma rede com disparo atômico
    - Modelo mais compacto
    - O estado é uma informação mais complexa do que o modelo não-temporizado
  - Disparo atômico
    - Pode representar o modelo com duração
    - O conjunto de marcações alcançáveis é um sub-conjunto das marcações do modelo não-temporizado.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

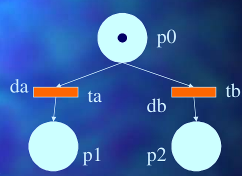
- Conceitos Básicos:
  - Regras de Seleção:
    - Pré-seleção: (duração e *delay*)
      - Prioridade
      - Probabilidade
    - *Race* (corrida): (*delay*)
      - Transições habilitadas com menor *delay* são disparadas

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Quando uma das transições conflitantes é desabilitada pelo disparo da outra, o que acontece com o *timer* da que ficou desabilitada quando a mesma tornar-se habilitada outra vez?

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Como fica a memorização do tempo de habilitação anterior?
- *Continue*
  - O *timer* associado à transição mantem o valor atual e quando a transição se tornar novamente habilitada o valor do *timer* iniciará daquele valor.



- *Restart*
  - Quando a transição for novamente habilitada o *timer* será re-iniciado

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - O que acontece com o *timer* das transições habilitadas após o disparo de uma transição?
    - Todas as transições. Não somente as transições conflitantes.

•Algumas políticas de memória podem ser construídas

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Resampling*
    - Após cada disparo os *timers* de TODAS as transições são re-iniciado (*restart*)
    - Não há memória
    - Após descartar todos os *timers*, os valores iniciais são associados a todas as transições que se tornarem habilitadas na nova marcação.

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

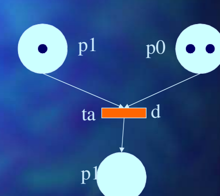
- Conceitos Básicos:
  - *Enabling Memory*
    - Após cada disparo os *timers* das transições que ficaram desabilitadas são re-iniciados (*restart*)
    - As transições que permaneceram habilitadas com o disparo matêem seus valores presentes(*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Age Memory*
    - Após cada disparo os *timers* de todas as transições são mantidos em seus valores presentes (*continue*)

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Grau de Habilitação (*Enabling Degree*)
    - É o número de vezes que uma determinada transição pode ser disparada, numa determinada marcação, antes de se torna desabilitada.
    - Quando o grau de habilitação é maior que um, atenção especial à semântica de temporização deve ser considerada.

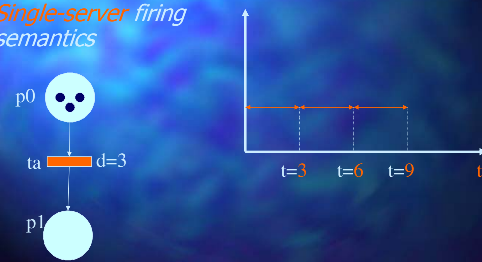


Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Semântica de Temporização
    - *Single-server firing semantics*
    - *Infinite-server firing semantics*
    - *Multiple-server firing semantics*
      - K é o máximo grau de paralelismo. Quando k→∞ , *Multiple-server firing semantics* é igual a *infinite-server firing semantics.*

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Single-server firing semantics*

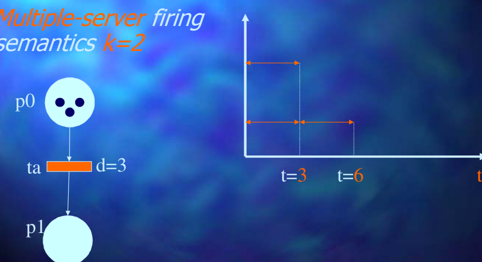


Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Infinite-server firing semantics*

Redes de Petri Temporizadas
- Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Multiple-server firing semantics k=2*



Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

The $SPN = (P, T, I, O, H, \Pi, G, M_0, Atts)$ be a stochastic Petri net, where

- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ is the set of places,
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ is the set of transitions,
- $I \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking-dependent multiplicities of input arcs, where i_{jk} entry of I gives the (possibly marking-dependent) arc multiplicity of input arcs from place p_j to transition t_k [$A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – set of arcs],
- $O \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking dependent multiplicities of output arcs, where o_{jk} entry of O specifies the possibly marking-dependent arc multiplicity of output arcs from transition t_j to place p_k,
- $H \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking-dependent multiplicities describing the inhibitor arcs, where h_{jk} entry of H returns the possibly marking-dependent arc multiplicity of an inhibitor arc from place p_j to transition t_k,
- $\Pi \in \mathbb{N}^m$ is a vector that assigns a priority level to each transition,
- $G \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \{true, false\})^m$ is a vector that assigns a guard condition related to place markings to each transition. (In the presence of an inhibitor arc, a transition is enabled to fire if each input place connected by a normal arc has a number of tokens equal to the arc weight, and if each input place connected by an inhibitor arc has no tokens.),
- $M_0 \in \mathbb{N}^n$ is a vector that contains the initial marking for each place (initial state),
- $Atts = (Dist, W, Markdep, Policy, Concurrency)^m$ comprises the set of attributes for transitions, where
  - $Dist \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathcal{F}$ is a possibly marking dependent firing probability distribution function (this distribution can be marking dependent) (the domain of $\mathcal{F}$ is $[0, \infty)$),
  - $W : T \rightarrow I\!R$ is the weight function, that represents the weight (w_t) of immediate transitions and the rate λ_t of timed transitions, where:
    $$W(t) = \begin{cases} w_t \geq 0, & \text{if } t \text{ is an immediate transition;} \\ \lambda_t > 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$
  - $Markdep \in \{constant, enabdep\}$, where the transition firing timing distribution could be marking independent ($constant$) or enabling dependent ($enabdep$, the distribution depends on the actual enabling condition),
  - $Policy \in \{prd, prs\}$ is the preemption policy (prd, *preemptive repeat different* means that when a preempted transition becomes enabled again the previous elapsed firing time is lost; prs—*preemptive resume*, in which the firing time related to a preempted transition is resumed when the transition becomes enabled again),
  - $Concurrency \in \{ss, is\}$ is the concurrency degree of transitions, where ss represents single server semantics and is depicts infinity server semantics in the same sense as in queueing models.

Redes com Prioridade

- Definição:

$PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

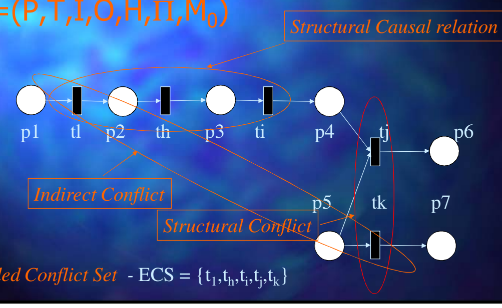
$H : P\times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$\Pi : T \rightarrow \aleph$ é uma função que mapeia às transições níveis de prioridade.

M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes com Prioridade

- $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$



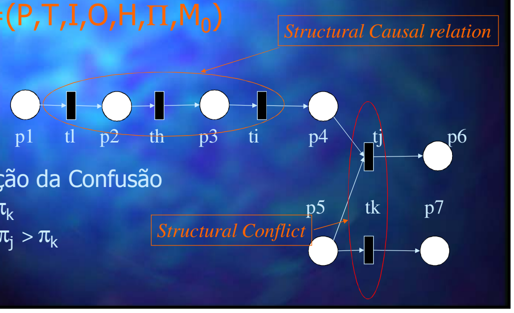
Extended Conflict Set - ECS = $\{t_l,t_h,t_i,t_j,t_k\}$

Redes com Prioridade

- $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$

Remoção da Confusão

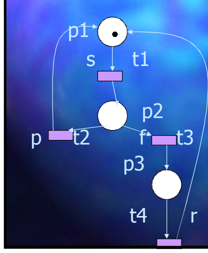
- $\pi_l = \pi_k$
- $\pi_h,\pi_i,\pi_j > \pi_k$



Redes Estocásticas

- Definição:

$SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$



P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

$I: P\times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,

$O : P\times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições

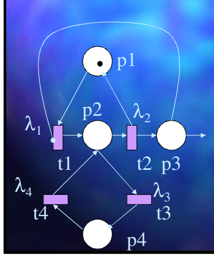
$W : T \rightarrow \Re^+$ (ou $W : T\times M \rightarrow \Re^+$) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes Estocásticas

- Definição:

$SPN=(P,T,I,O,H,W,M_0)$



P é o conjunto de lugares,

T o conjunto de transições,

$I: P\times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,

$O : P\times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições

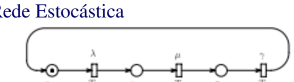
$H : P\times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$W : T \rightarrow \Re^+$ (ou $W : T\times M \rightarrow \Re^+$) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições

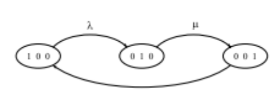
M_0- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

Redes Estocásticas

Rede Estocástica



Grafo de Marcações / CTMC



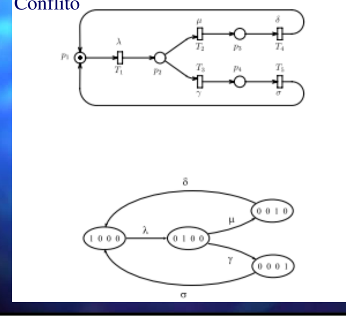
Redes Estocásticas

Semântica de Disparo de Transição

- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
  - Regras de habilitação
    $M[t_j >$, $M(pi) \geq I(pi, t_j)$
    $\forall$ pi $\in$ P
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- *Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo
  Se $M[t_j > M'$
  $M'(pi)=M0(pi) - I(pi, t_j)+O(pi, t_j)$, $\forall$ pi $\in$ P

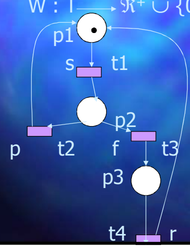
Redes Estocásticas

Conflito

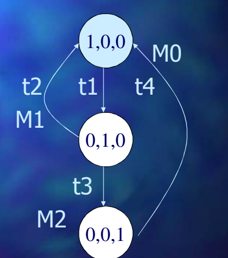


Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  W : T $\rightarrow$ $\Re^+ \cup \{0\}$

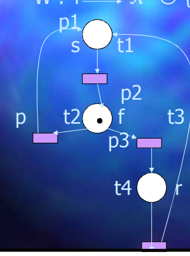


- Grafo de Marcações

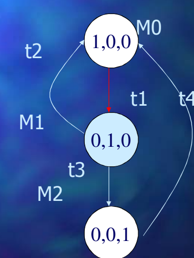


Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  W : T $\rightarrow$ $\Re^+ \cup \{0\}$

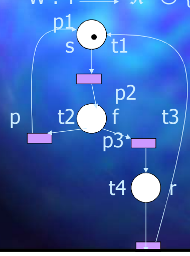


- Grafo de Marcações

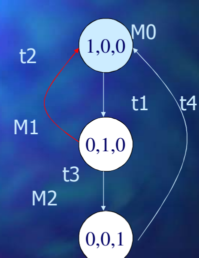


Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  W : T $\rightarrow$ $\Re^+ \cup \{0\}$

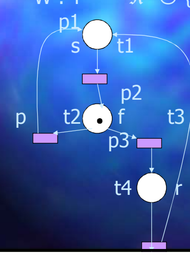


- Grafo de Marcações

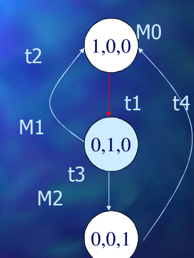


Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,M_0)
  W : T $\rightarrow$ $\Re^+ \cup \{0\}$

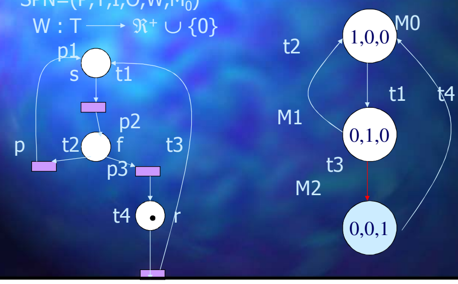


- Grafo de Marcações



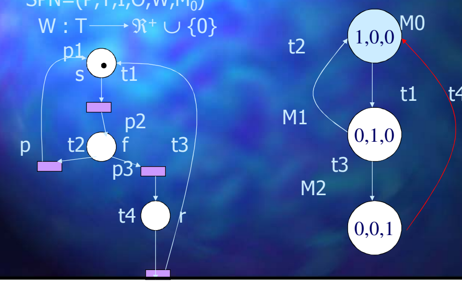
Redes Estocásticas

- Definição:
  $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$
  $W : T \longrightarrow \Re^{+} \cup \{0\}$
- Grafo de Marcações



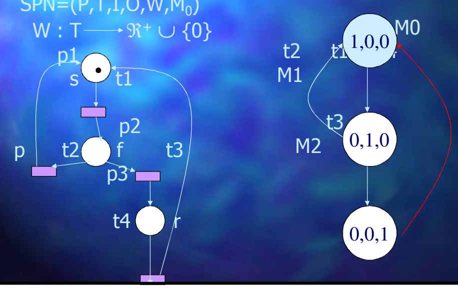
Redes Estocásticas

- Definição:
  $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$
  $W : T \longrightarrow \Re^{+} \cup \{0\}$
- Grafo de Marcações



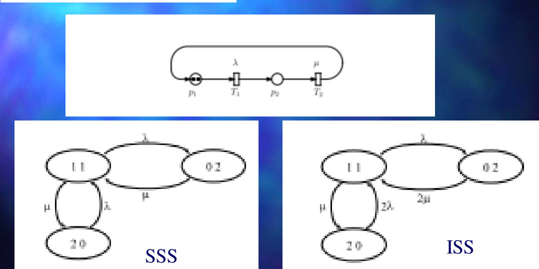
Redes Estocásticas

- Definição:
  $SPN=(P,T,I,O,W,M_0)$
  $W : T \longrightarrow \Re^{+} \cup \{0\}$
- Grafo de Marcações



Redes Estocásticas

Semântica de Temporização



Redes Estocásticas

- Em geral, a CTMC associada a uma SPN é obtida da seguinte maneira:
  - O espaço de estados $S = \{s_i\}$ corresponde ao *reachability set* $RS(N,M_0) = \{M_i\}$ da rede marcada N.
  - As *transition rates* de cada estado s_i (corresponde a marcação M_i) para cada estado s_j (M_j) são obtidas pela soma de todas as *firing rates* associadas às transições que estão habilitadas em M_i e cujo disparo levam a M_j.

Redes Estocásticas

- Assumindo-se que todas as transições operam em *Single Server Semantics* (SS) e taxas (*rates*) independentes da marcação, tem-se:
- $q_{ij} = \begin{cases} \sum_{tk \in e_j(Mi)} \omega_k & i \neq j \\ - q_i & i = j \end{cases}$

onde $Q = [q_{ij}]$ gerador infinitesimal (matriz de taxas)

$q_i = \sum_{tk \in e(Mi)} \omega_k$

ω_k é a taxa de disparo de t_k.

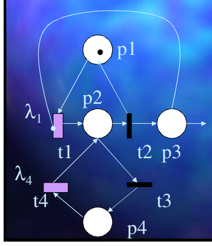
$e_j(M_i) = \{t_k \mid t_k \in e(M_i) \wedge M_i[t_k>M_j\}$ é o conjunto de transições que estão hablitadas em M_i e cujo disparo levam a M_j.

$e(M_i)$ conjunto de transições habilitadas em M_i.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Definição:

GSPN=(P,T,I,O,H,Π,W,M_0)



P,T,I,O definidos como usualmente.

H : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

Π : T → $\begin{cases} 0 & \text{se t for temporizada} \\ \aleph^+ & \text{se t for imediata} \end{cases}$

(Prioridade)

W : T → $\Re^+$ (ou W : T×M → $\Re^+$) é

1. uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições temporizadas e
2. pesos usados na computação das probabilidades de disparo das transições imediatas

M_0- Marcação inicial - M_0: P → ℵ

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Semântica de Disparo de Transição

- Regras de habilitação

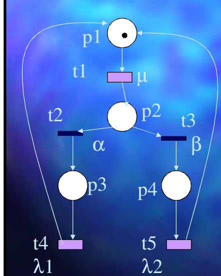
  $M[t_j >$, $M(pi) >= I(pi, t_j)$

  $\forall$ pi $\in$ P
- Uma transição t_j é disparável se estiver habilitada
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- Transições imediatas disparam instantaneamente com prioridades sobre as temporizadas
- Diferentes níveis de prioridade podem ser associados às transições imediatas.
- Transições imediatas com mesmo nível de prioridade associada disparam de acordo com o peso associado a cada uma.
- *Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo

  Se $M[t_j > M'$

  $M'(pi)=M0(pi) - I(pi, t_j)+O(pi, t_j)$, $\forall$ pi $\in$ P

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



Reachability Set

RS = VS ∪ TS

VS ∩ TS = ∅

VS – *Vanishing set:*

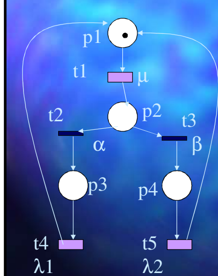
Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

TS – *Tangible set:*

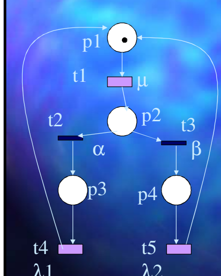
Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações



Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



$P\{t_k|m_j\} = \omega_k/q_j$

$q_j = \Sigma_{tk \in e(Mi)}\, \omega_k$

ω_k é a taxa de disparo de t_k.

$e(M_j)$ conjunto de transições habilitadas em M_j.

Quando a marcação é *vanishing*, ω_k é um peso (transição imediata).

Quando a marcação é *tangible*, ω_k é a taxa.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

Assumindo a ausência de confusão, o cálculo do ECS consiste em particionar as transições imediatas em conjuntos os quais as transição de cada conjunto possam estar em conflito.

Contudo, transições de diferentes ECS são concorrente.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

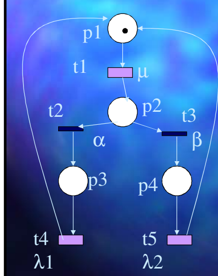
Quando transições de um único ECS são as únicas imediatas

$P\{t_k|m_i\} = \omega_k/w_k(m_i)$

$w_k(m_i) = \sum_{tj \in [ECS(tk) \wedge e(Mi)]} \omega_j$

Os pesos podem ser diferentes em diferentes marcações, mas a relação entre estes pesos é constante (sem confusão)

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)



Reachability Set

$RS = VS \cup TS$

$VS \cap TS = \varnothing$

VS – *Vanishing set:*

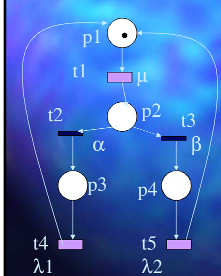
Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

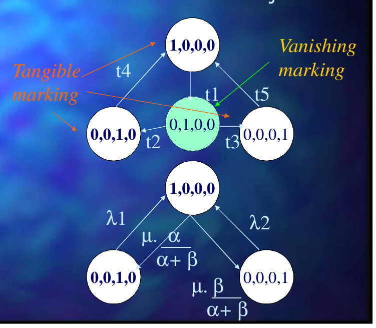
TS – *Tangible set:*

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações





Redes Estocásticas

- Para garantir a existência de probabilidade estacionária, a rede deve ser:
  - limitada *(bounded)*
  - reversível e
  - livre de bloqueio *(deadlock-free)*
  - $\Pi Q = 0, \sum_{Mi \in RS(N)} \pi_i = 1$

Probabilidade estacionária de uma marcação M_i

$(\pi_1,\ldots,\pi_i,\ldots,\pi_n)\, Q = (0,\ldots,0,\ldots,0)$

$\sum_1^n \pi_i = 1$

Redes Estocásticas

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \;,\; \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt}$

Redes Estocásticas

- Dadas $M_j \in TS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k em M_j é:

$p(t_k, M_j) = \lambda_k/\lambda_j, \quad \lambda_j = \sum_{t \in Tj} \lambda_t$

$T_j = \{t \mid M_j\,[t>\}$

λ_t é a taxa associada a transição t através da W

Redes Estocásticas

- Dadas $M_i \in VS(N)$, a probabilidade de se disparar t_k em M_i é:

$$p(t_k, M_i) = \omega_k / \omega_k(M_i),$$

$$\omega_k(M_i) = \Sigma_{j \in \{ECS(tk) \wedge Mi\,[tj>\}}\ \omega_j$$

ECS(tk) – *Extended Conflict Set*

$\omega_k(M_i)$ o peso associado à transição t_k na marcação M_i.

Caso haja mais de uma transição imediata, de diferentes ECS, habilitadas em uma marcação M, não importa a ordem de disparo, desde que a rede seja livre de confusão.

Redes Estocásticas

- Tempo de permanência numa marcação (*sojourn time*)

$$tm_j = 1/\lambda_j$$

$\lambda_j = \Sigma_{t \in Tj}\ \lambda_t$

$T_j = \{t \mid M_j\,[t>\}$

λ_t é a taxa associada a transição t através da W

Redes Estocásticas

- Probabilidade que um lugar p_j tenha k marcas

$$p(pj,k) = \Sigma_{i \in S1}\ p_i$$

$S_1 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i(p_j)=k\}$

- Número esperado de marcas no lugar p_j

$$Em(p_j) = \sum_{x=1}^{K} x\,.p(pj,x)$$

K é o número máximo de marcas que o lugar pj pode conter

Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição temporizada

$$TR(t_j) = \sum_{i \in S2} p_i\ .\ \lambda_j$$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- λ_j é a taxa associada à transição t_j

Redes Estocásticas

- Tempo médio de disparo de uma transição

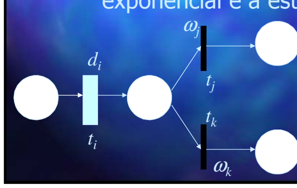
$$T = 1/TR(t_j) = 1/(\sum_{i \in S2} p_i\ .\ \lambda_j)$$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- p_i é a probabilidade estacionária de uma marcação Mi que habilita t_j
- λ_j é a taxa associada à transição t_j

Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição imediata
  - Pode ser calculada de uma transição exponencial e a estrutura do modelo GSPN.



$TR(t_j) = TR(t_i) \times (\omega_j / \omega_j + \omega_j)$

tj e tk são as únicas transições de um ECS.

Redes Estocásticas

- *Littles's law*

  E[X] = λ E[s] (ergódico)

  E[X] - tamanho médio da fila.

  E[s] - Tempo médio de serviço do sistema.

  λ - taxa de chegada

Redes Estocásticas

- *Tempo médio de espera em um lugar*

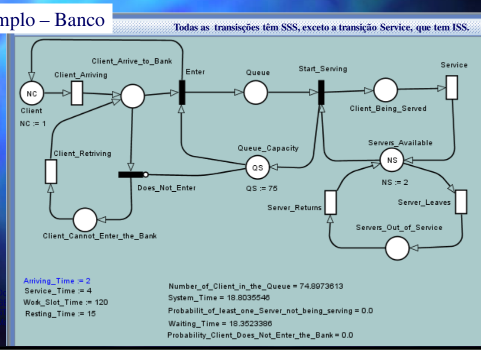
  – $\text{Wait}(p_i) = \dfrac{\text{Em}(p_i)}{\sum_{tj \in I(pi)} \text{TR}(t_j)} = \dfrac{\text{Em}(p_i)}{\sum_{tj \in O(pi)} \text{TR}(t_j)}$

  – $\text{Em}(p_i)$ é o número médio de marcas no lugar p_i.

  – $\text{TR}(t_j)$ *throughput* da transição t_j.

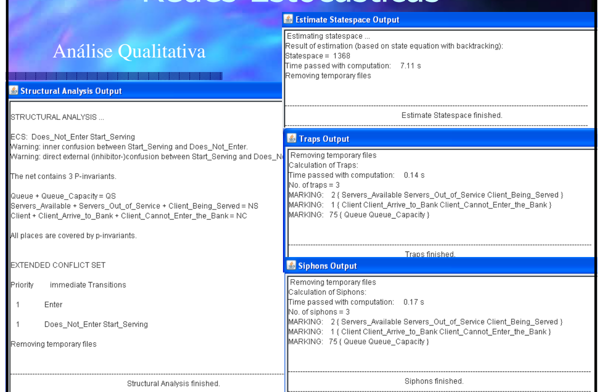
Redes Estocásticas

• Exemplo – Banco

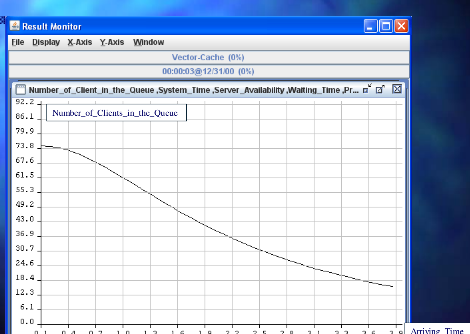


Redes Estocásticas

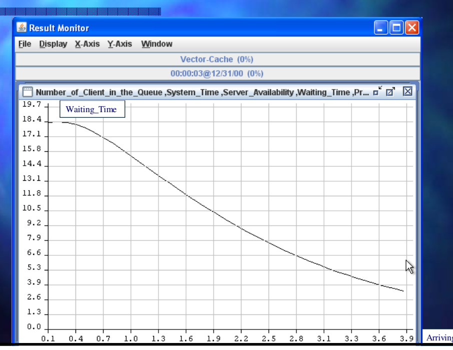
Análise Qualitativa

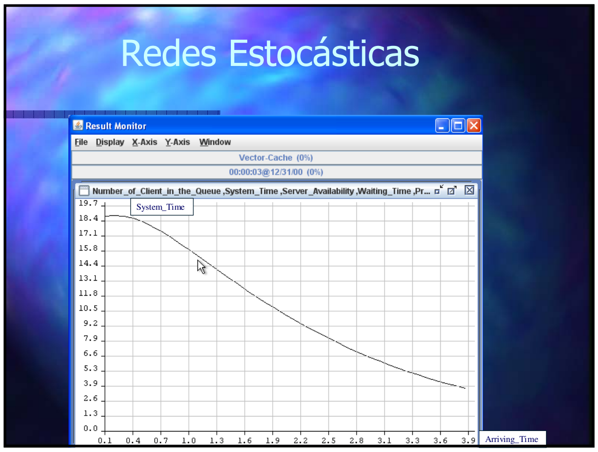


Redes Estocásticas

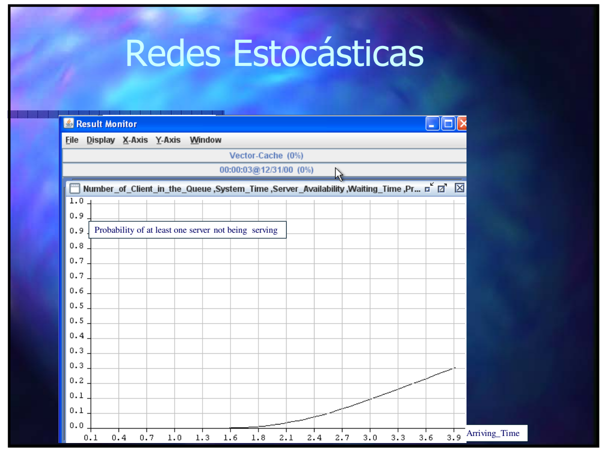


Redes Estocásticas

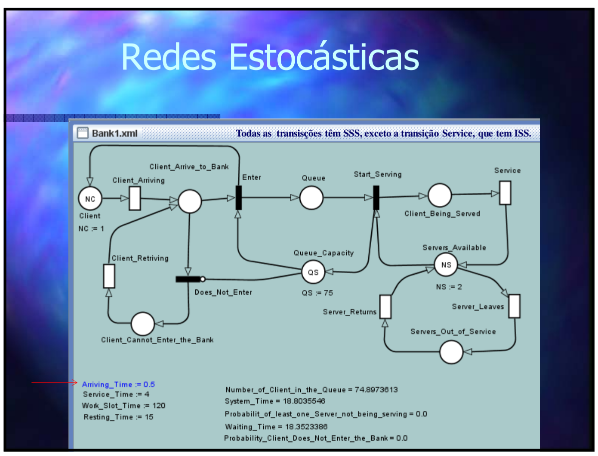




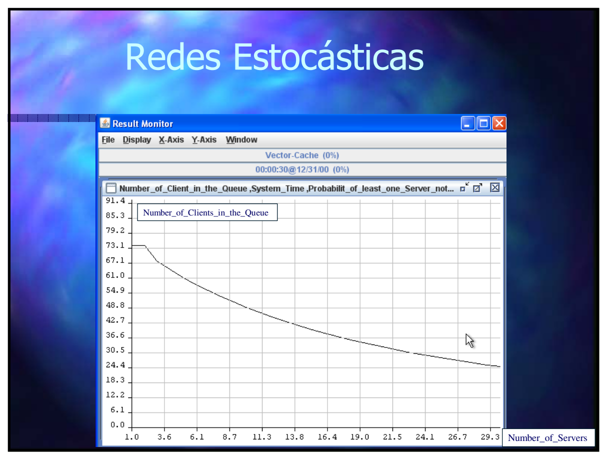
Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:03@12/31/00 (0%)
Number_of_Client_in_the_Queue ,System_Time ,Server_Availability ,Waiting_Time ,Pr...
System_Time
Arriving_Time



Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:03@12/31/00 (0%)
Number_of_Client_in_the_Queue ,System_Time ,Server_Availability ,Waiting_Time ,Pr...
Probability of at least one server not being serving
Arriving_Time



Redes Estocásticas
Bank1.xml
Todas as transisções têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.
Client_Arrive_to_Bank
Client_Arriving
Enter
Queue
Start_Serving
Service
Client
NC := 1
Client_Being_Served
Client_Retriving
Queue_Capacity
Servers_Available
Does_Not_Enter
QS := 75
NS := 2
Server_Returns
Server_Leaves
Servers_Out_of_Service
Client_Cannot_Enter_the_Bank
Arriving_Time := 0.5
Service_Time := 4
Work_Slot_Time := 120
Resting_Time := 15
Number_of_Client_in_the_Queue = 74.8973613
System_Time = 18.8035546
Probabilit_of_least_one_Server_not_being_serving = 0.0
Waiting_Time = 18.3523386
Probability_Client_Does_Not_Enter_the_Bank = 0.0

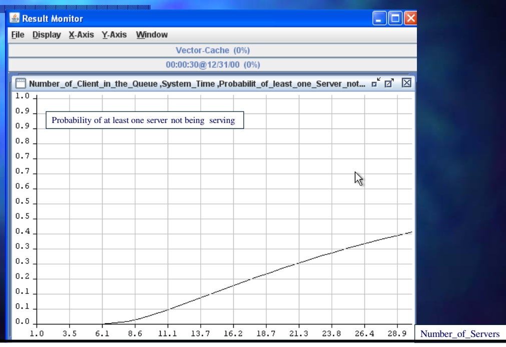


Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:30@12/31/00 (0%)
Number_of_Client_in_the_Queue ,System_Time ,Probabilit_of_least_one_Server_not...
Number_of_Clients_in_the_Queue
Number_of_Servers

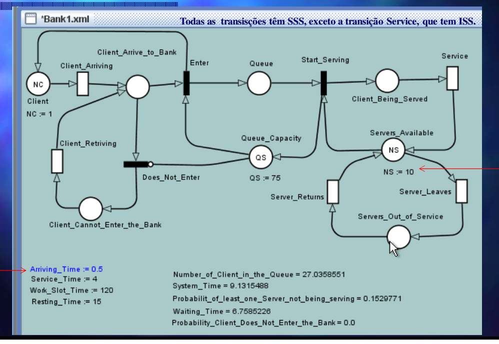
Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:30@12/31/00 (0%)
Number_of_Client_in_the_Queue ,System_Time ,Probabilit_of_least_one_Server_not...
System_Time
Number_of_Servers

Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:30@12/31/00 (0%)
Number_of_Client_in_the_Queue ,System_Time ,Probabilit_of_least_one_Server_not...
Waiting_Time
Number_of_Servers

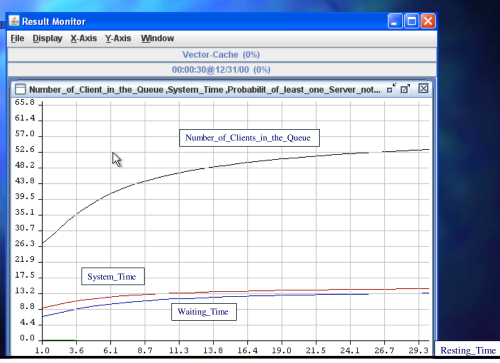
Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

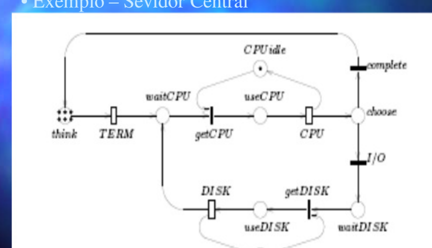


Redes Estocásticas



Redes Estocásticas

- Exemplo – Sevidor Central



Do livro MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS Marsan et al.

Redes Estocásticas

- Aproximando Outras Distribuições
  - Variáveis Suplementares
  - Aproximação por Fases
    - *Moment Matching*

Para encontrar uma distribuição por fase adequada para uma distribuição genérica, duas atividades são fundamentais:

- Determinar o tipo de aproximação necessária.
- Encontrar os parâmetros numéricos da aproximação.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Qualidade da aproximação: quanto mais próximo for a distribuição por fase da distribuição real, melhor.
  - Medidas de aproximação:
    - *Moment matching*
    - Encontrar um pdf (ou cdf) que seguem a pdf real numa determinada região de interesse.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Número de Estados da Aproximação: é importante fazer com que o número de estados seja o menor possível.
- Facilidade da obtenção do modelo markoviano resultante: pode ser possível obter uma aproximação que gere excelentes resultados. No entanto, pode não ser fácil a integração no modelo markoviano resultante.

Redes Estocásticas

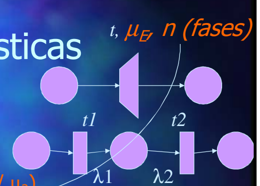
- Aproximação por Fases

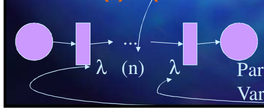
Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Facilidade de obtenção dos parâmetros da aproximação: quanto mais parâmetros sejam necessários para especificar a aproximação, mais difícil se torna para encontrá-los.

Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases
- Distribuição de Erlang
  - $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ($\lambda_1 = 1/\mu_1, \lambda_2 = 1/\mu_2$)
  - $f\tau(t) = (f\tau_1 * f\tau_2)(t) = \lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda 1 t} - e^{-\lambda 2 t})/(\lambda_1 - \lambda_2)$
  - Generalizando para n fases iguais a λ.
    - $f\tau(t) = (\lambda^n t^{(n-1)} e^{-\lambda t})/(n-1)!$, $t \geq 0$





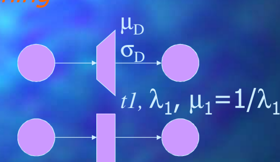
Parâmentros: n, λ; Valor Esperado: $\mu_E = n/\lambda$

Variância: $1/n\lambda^2$ (λ - de cada fase)

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

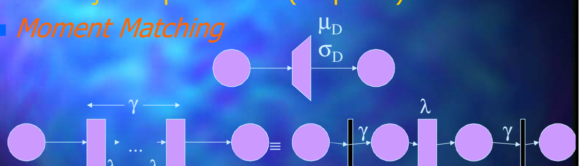


- Se $\mu_D/\sigma_D = 1$ então uma transição exponencial é suficiente. $\lambda_1 = 1/\mu_D$

Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

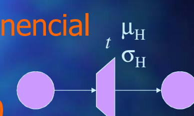


- Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1$, $x \in Z$

$\gamma = (\mu_D/\sigma_D)^2 = x^2$, $\lambda = \gamma/\mu_D = x^2/\mu_D$

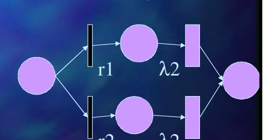
Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases
- Distribuição de Hiperexponencial



$f\tau(t) = r_1 f\tau_1(t) + r_2 f\tau_2(t)$, $t \geq 0$

$\sum^n_{j=1} r_j = 1$



Parâmentros:

Valor Esperado: $\mu_H = \sum_j q_j/\lambda_j$

Variância: $2 \sum_j q_j/\lambda_j^2 - \mu_H^2$

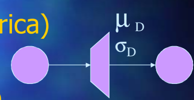
Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

$\mu_H = r_1/\lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)

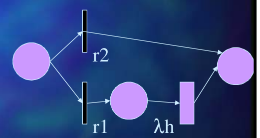
$\sigma_H = [\text{sqrt}(2 r_1 - r_1^2)]/\lambda_H$



- Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)

$r_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $r_2=1-r_1$

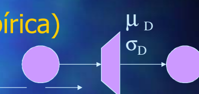
$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$,

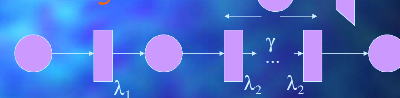


Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*





- Se $\mu_D/\sigma_D > 1$ e $\mu_D/\sigma_D \notin Z$
- $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$

$\lambda_1 = 1/\mu_1$ $\mu_1 = \mu_D \mp \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

$\lambda_2 = 1/\mu_2$ $\mu_2 = \gamma\mu_D \pm \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\,\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

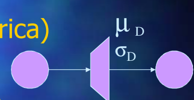
Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

$\mu_H = r_1/\lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)

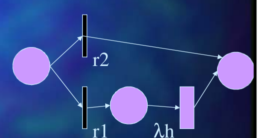
$\sigma_H = [\text{sqrt}(2 r_1 - r_1^2)]/\lambda_H$



- Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)

$r_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $r_2=1-r_1$

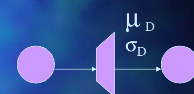
$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$,



Redes Estocásticas

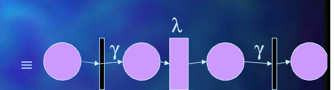
Distribuição Determinística

- *Moment Matching*



Aproxima-se, fazendo-se σ_D pequeno

$\Rightarrow \gamma$ torna-se grande.



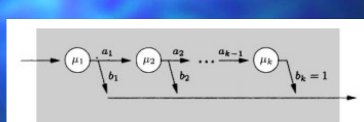
- Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1$, $x \in Z$ ($c=\sigma_D/\mu_D<1$)

$\gamma=x^2$, $\lambda= x^2/\mu_D$

Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Cox generalizou a idéia de composição de fase exponenciais para gera probabilidades e taxas complexas.



Nestes slides μ_k são taxas (diferentemente dos anteriores)

Redes Estocásticas

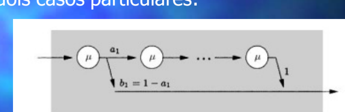
Distribuição de Cox

Nestes slides μ é taxa (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso $CV_X \leq 1$

$$\mu_j = \mu \quad j = 1,\ldots,k,$$
$$a_j = 1 \quad j = 2,\ldots,k-1.$$



$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu},$$
$$\text{var}(X) = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k)+k-2)}{\mu^2},$$
$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k)+k-2)}{[b_1 + k(1-b_1)]^2}.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

➢ Número de fases

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2+4-4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)},$$

$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k-1)}{\overline{X}}.$$

➢ Taxa das fases

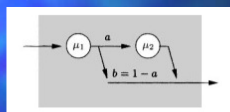
Redes Estocásticas

Distribuição de Cox

Nestes slides μ_1 e μ_2 são taxas (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso $CV_X > 1$



$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

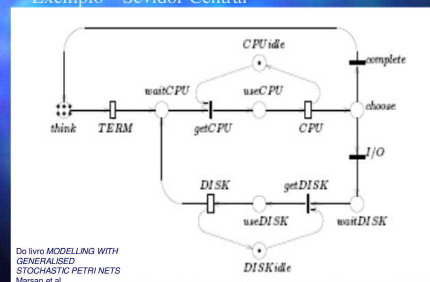
$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}}, \quad a = \frac{1}{2c_X^2}.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X}c_X^2}$$

Redes Estocásticas

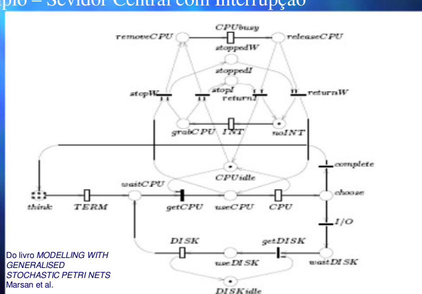
- Exemplo – Sevidor Central



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

Redes Estocásticas

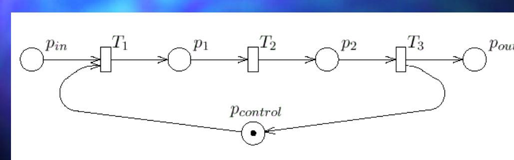
- Exemplo – Servidor Central com Interrupção



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

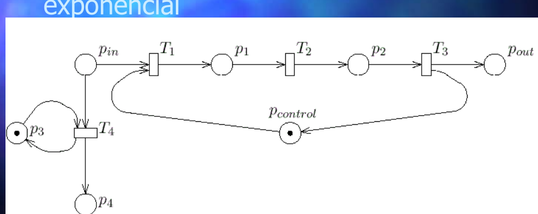
Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 Fases



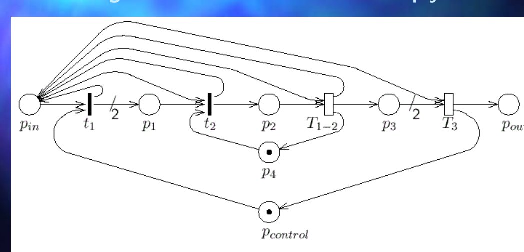
Modelando Políticas de Memória

- Conflito entre Erlang com 3 fases e exponencial



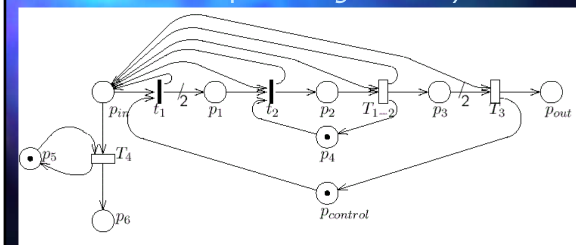
Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 fases com interrupção



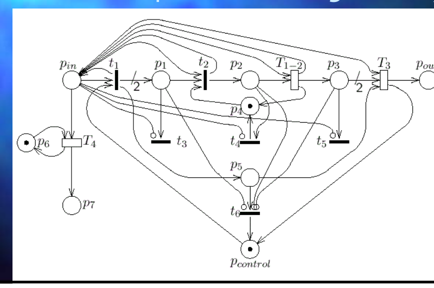
Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Age Memory*



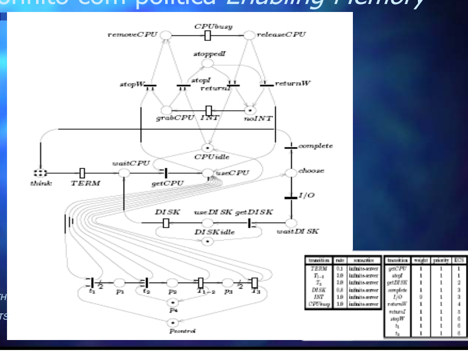
Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



Modelando Políticas de Memória

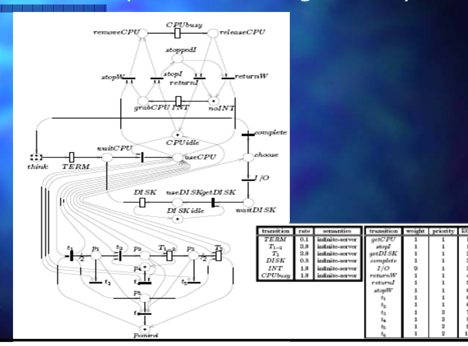
- Conflito com política *Enabling Memory*



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W) - Marsan,Chiola 1987
  - P é o conjunto de lugares,
  - $T = T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

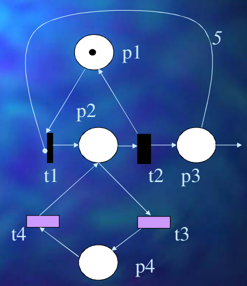
  $i_k(t_j): P \times T \rightarrow \mathbb{N}, \forall p_k \in P, \forall t_j \in T$
  $o_k(t_j): P \times T \rightarrow \mathbb{N}, \forall p_k \in P, \forall t_j \in T$
  $h_k(t_j): P \times T \rightarrow \mathbb{N}, \forall p_k \in P, \forall t_j \in T$
  - $\Pi: T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - M_0, é marcação inicial,

DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W)
  - D: $T_{exp} \cup T_{det} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - W: $T_{im} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.
- Quando $T_{det} = \emptyset$ a DSPN é uma GSPN.
- Embora seja possível a análise de modelos com mais de uma transição determinística simultaneamente habilitadas, as ferramentas, normalmente, somente implementam métodos que considerem apenas uma transição determinística habilitada por marcação.

DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:
  - $T_{im} = \{t_1\}$
  - $T_{exp}=\{t_3,t_4\}$
  - $T_{det}=\{t_2\}$



EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W) -
  - P é o conjunto de lugares,
  - $T = T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

    $i_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall\ p_k \in P$, $\forall\ t_j \in T$

    $o_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall\ p_k \in P$, $\forall\ t_j \in T$

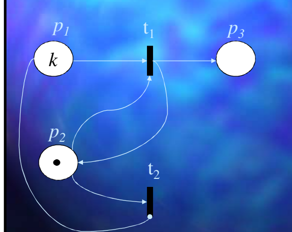
    $h_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall\ p_k \in P$, $\forall\ t_j \in T$
  - Π: $T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - M_0, é marcação inicial,

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

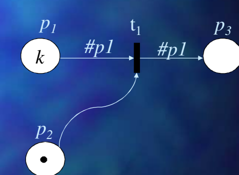
- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,M_0,D,W)
  - D: $(T_{exp} \cup T_{det}) \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - W: $T_{im} \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:



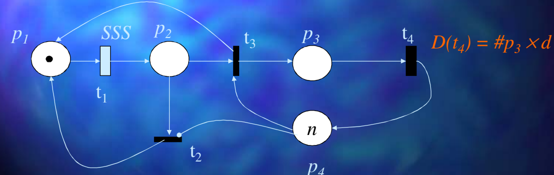
Modelo em DSPN para limpar p_1.



Modelo em EDSPN para limpar p_1 (arcos dependentes de marcação).

EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Tempos dependentes da carga



Redes Estocásticas

- Considerações
  - Redes de Petri estocásticas são uma representação compacta de alto nível das CTMC
  - Equivalência com CTMC
  - Análise quantitativa
  - Análise qualitativa
  - Modelagem de sistemas concorrentes, não-determinísticos e assíncronos. Modelagem de sincronismo, escolha, mútua exclusão etc


Redes Estocásticas
Algumas Referências:
Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets, A. Marsan et al, John Wiley & Sons, 1995.
Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets, C. Lindermann, John Wiley & Sons, 1998.
http://www.daimi.au.dk/PetriNets