# Modelagem para Avaliação de Desempenho e Confiabilidade

Paulo Maciel

Centro de Informática

## - Interpretações do Tempo -

A noção de tempo pode ser representada de diversas maneiras nos sistemas computacionais.

- **Tempo Lógico** **é definido a partir de relações de precedência entre eventos permitindo estabelecer ordens causais entre conjunto de eventos.**
- **Tempo Físico** **é um tempo métrico que permite representar quantitativamente a distância entre eventos e estabelecer ordens totais entre eventos.**
- **Tempo Contínuo** **segue a natureza uniforme e contínua do tempo físico e é isomorfo ao conjunto dos reais.**
- **Tempo Discreto** **é uma simplificação do tempo contínuo onde a relação de isomorfismo é com o conjunto dos naturais.**
- **Tempo Global** **fornece uma única referência temporal para todos os componentes do sistema.**
- **Tempo Local** **é a noção em que cada componente do sistema tem sua própria referência temporal.**

## Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho


## Análise de Desempenho

- Modelagem
  - Determinística
    - Melhor e pior casos
  - Probabilistica
    - Valores prováveis
  - Operacional
    - Informações observáveis
- Simulação
    - Análise exaustiva
- Medição
  - Medidas obtidas do sistema real
  - Protótipos

## Modelos Temporizados

- Com todos estes pontos de vistas, diversos modelos têm sido propostos na literatura para tratar (modelar e analisar) os sistemas sob o ponto de vista temporal.
- Dentre os modelos temporais, podemos ressaltar:
  - **Lógicas Temporais:** ***Linear Time Temporal Logic, Causal Temporal Logic***
  - **Álgebras de Processos Temporais :** ***Timed CSP***
  - **Autômatos Temporizados**
  - **Cadeias de Markov**
  - **Redes de Fila**
  - **Redes de Petri Temporizadas:** ***Timed PN, Time PN, SPN, GSPN, DSPN***

## Modelos Temporizados

- Modelagem para Análise de Desempenho
  - Análise Operacional
  - Modelos para Simulação
  - Modelos Analíticos
    - Cadeias de Markov
    - Teoria das Filas
    - Redes de Petri Estocásticas
    - Álgebras de Processo Estocásticas

## Modelos Temporizados

- Algumas destas classes de modelos temporizados possibilitam a análise temporal dos sistemas seja sob o ponto de vista determinístico ou sob o ponto de vista probabilístico. Para modelagem e avaliação de sistemas críticos, são de particular interesse os modelos que possibilitem a representação de tempos físicos e não apenas o tempo lógico.
- Os modelos que possibilitam a especificação do tempo físico, podem representar os tempo de foras distintas, por exemplo:
  - por **Intervalos**
  - de forma **Determinística**
  - de forma **Probabilística**

## Modelagem para Análise de Desempenho

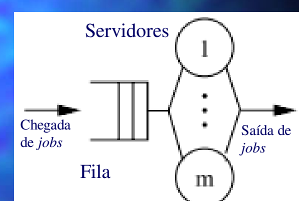
- Algumas Medidas
  - Tempo de resposta
  - *Throughput*
  - Utilização
  - Capacidade
  - Confiabilidade
  - Taxa de descarte

## Análise Operacional

- Informações observáveis
- Jeff Buzzen and Peter Denning

## Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.




A,B = {M,D,G,E}
- M - *Markovian,*
- D - Determinística,
- G – *General*
- E - *Erlangian*

## Notação de Kendall

- A/B/m/K
  - A – distribuição do tempo entre chegadas.
  - B – distribuição do tempo de serviço.
  - m – número de servidores.
  - K = capacidade de armazenamento.
- Muitas vezes quando K e m são ∞, estes termos são omitidos ou usa-se / /

- Exemplos:
  - M/M/1
  - M/M/1/K
  - M/G/2

## Análise Operacional

- Variáveis operacionais
  - T: Período de observação
  - K: Número de recursos do sistema
  - $A_i$: Número total de solicitações (ex:.chegadas) do recurso i no período T.
  - $A_0$: Número total de solicitações (ex:.chegadas) ao sistema no período T.
  - $C_i$: Número total de serviços finalizados pelo recurso i no período T.
  - $C_0$: Número total de serviços finalizados pelo sistema no período T.
  - $B_i$: Tempo de ocupação do recurso i no período T.

## Análise Operacional

- Métricas derivadas (*derived measures*)
  - Si: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; Si = Bi/Ci
  - Ui: Tempo médio de serviço por finalização relativa ao recurso i; Ui = Bi/T
  - Xi: *throughput* (ex.: finalizações por unidade de tempo) do recurso i; Xi = Ci/T
  - λi: taxa de chegada (ex.:, chegadas por unidade de tempo) ao recurso i; λi = Ai/T
  - X0: *throughput* do sistema; X0 = C0/T
  - Vi: Número médio de visitas ao recurso i por solicitação; Vi = Ci/C0

## Análise Operacional

- Exemplo1

Suponha que ao se monitorar uma processador por um período de 1 min, verificou-se que o recurso esteve ocupado por 36s. O número total de transações que chegaram ao sistema é 1800. O sistema também finalizou a execução de 1800 transações no mesmo período.

1. Qual a taxa de chegada ao sistema ($\lambda_0$)?
2. Qual é o throughput do sistema ($X_0$)?
3. Qual é a utilização da CPU($U_{CPU}$)?
4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas pelo sistema ($S_0$)?

## Análise Operacional

- Exemplo1

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

CPU $T = 1min$ $B_{CPU} = 36s$

$A_0 = 1800$ transactions

$C_0 = 1800$ transactions

$K = 1$

$A_0 = A_1$

$C_0 = C_1$

$S_0 = S_1 = S_{CPU}$

$U_0 = U_1 = U_{CPU}$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_{CPU}$

$X_0 = X_1 = X_{CPU}$

$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1800}{60} = 30 tps$

$X_0 = X_1 = \frac{1800}{60} = 30 tps$

## Análise Operacional

- Exemplo1

É importante salientar que o único recurso do sistema é a CPU, portanto as métricas associadas à CPU serão as mesmas associadas ao sistema.

$U_0 = U_{CPU} = \frac{B_{CPU}}{T} = \frac{36s}{60s} = 0,6$

$S_0 = S_1 = \frac{B_{CPU}}{C_{CPU}} = \frac{36}{1800} = 0,02s = S_{CPU}$

## Análise Operacional

- *Utilization Law*

$$U_i = \frac{B_i}{T} = \frac{B_i}{T} \times \frac{C_i}{C_i} = \frac{B_i}{C_i} \times \frac{C_i}{T} = S_i \times X_i$$

*Relacionamento da utilização de um dispositivo com o seu throughput.*

## Análise Operacional

- *Utilization Law*

$U_i = S_i \times X_i$

Exemplo: Considere que 125 pacotes por segundo chegam a um roteador e que o roteador leva em média 2 milisegundos para tratar o pacote. Portanto:

$U_i = 0{,}002 \times 125 = 25\%$

## Análise Operacional

- Exemplo2

A banda passante de um *link* de comunicação é 56000 bps. Pacotes de 1500 bytes são transmitidos ao *link* a uma taxa de 3 pacotes por segundo

- Qual é a utilização do link?

## Análise Operacional

- Exemplo2

bandwidth 56000 bps

Time to send 1bit (TSb)

TSb = 1/bandwidth = 1,78571E-05

(TSB) Time to send 1 byte = 8 x TSb = 0,000143

Packet size = 15000 bytes

Time to send 1 packet (TSP) = 1500 x TSB = 0,214286

Arriving rate ($\lambda$) = 3 packets/s

U = TSP x $\lambda$ = 0,214286 x 3 = 0,642857

## Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$$X_i = \frac{C_i}{T} = \frac{C_i}{T} \times \frac{C_0}{C_0} = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{C_0}{T} = V_i \times X_0$$

*Uma maneira interessante de relacionar o trhoughput do sistema ao throughput dos recursos.*

## Análise Operacional

- *Forced Flow Law*

$X_i = V_i \times X_0$

Exemplo: suponha que toda vez que executa uma transação faz-se 2 acessos a uma unidade de disco. Se 5,6 transações são finaziladas por segundo, portanto:

$X_i = 2 \times 5{,}6 = 11{,}2\ tps$

## Análise Operacional

- *Service Demand Law*
  - *Service demand de um recursos* é o tempo médio total que uma transação passa em no recurso.

Da *Utilization Law, tem-se:*

$$U_i = X_i \times S_i$$

Da *Forced Flow Law,* tem-se:

$$X_i = V_i \times X_0$$

Portanto:

## Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$$U_i = V_i \times X_0 \times S_i = D_i \times X_0$$

Portanto: $$D_i = \frac{U_i}{X_0}$$

Observe que a utilização $U_i$ do dispositivo $i$ é diretamente proporcional à demanda $D_i$ (*service demand*), portanto o dispositivo com mais alta demanda $\max_i\{D_i\}$ tem a mais alta utilização e é o "gargalo" do sistema.

# Análise Operacional

- *Service Demand Law*

$X_i = \frac{C_i}{T}$

$\Rightarrow \frac{C_i}{X_i} = T$

$B_i = U_i \times T$

$U_i = X_i \times S_i$

$D_i = V_i \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times S_i = \frac{C_i}{C_0} \times \frac{U_i}{X_i} = \frac{C_i}{X_i} \times \frac{U_i}{C_0} = T \times \frac{U_i}{C_0} = \frac{B_i}{C_0}$

And, since $C_0/T = X_0$, then $D_i = U_i/X_0$

Therefore,

$\boxed{D_i = V_i \times S_i = \frac{B_i}{C_0} = \frac{U_i}{X_0}}$

# Análise Operacional

- Exemplo3

Considere que um *Web Server* foi monitorado por 10 min e que a CPU esteve ocupada por 90%. O *log* do *Web Server* registrou 30.000 solicitações processadas. Qual é a CPU *Service Demand* ($D_{CPU}$) relativa as solicitações ao *Web Server*?

$T = 10 \times 60s = 600s$

$X_0 = 30.000/600 = 50$ solicitações por segundo.

$D_{CPU} = U_{CPU}/X_0 = 0,9/50 = 0,018$ s/solicitação

# Análise Operacional

OL

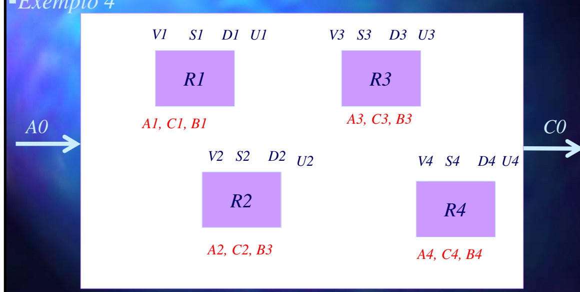
- Exemplo4 Suponha um departamento composto por cinco recursos (pessoas: R1, R2, R3 e R4). Esse departamento foi monitorado por um período de 6 horas. Verificou-se que R1 esteve ocupado por 4h25min, R2 por 4h5min, R3 por 5h15min e R4 por 3h56min. O número total de transações que chegaram ao deparamento foram 96. O sistema também finalizou a execução de 96 transações no mesmo período. O número total de chegadas a cada recurso e as respectiva finalizações são $A_1 = C_1 = 60$, $A_2 = C_2 = 110$, $A_3 = C_3 = 100$ e $A_4 = C_4 = 55$.

1. Qual a taxa de chegada ao sistema ($\lambda_0$)?
2. Qual é o *throughput* do sistema ($X_0$)?
3. Qual é a utilização de cada recurso ($U_i$)?
4. Qual é o tempo médio por transações finalizadas por cada recurso do sistema ($S_i$)?
5. Qual é o número médio de visitas por recurso ($V_i$)?
6. Qual é tempo médio de uma transação qualquer (não necessariamente a que visitou o recurso i) no recurso i ($D_i$)?

# *Análise Operacional*

OL

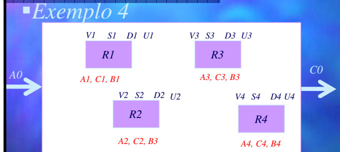
- *Exemplo 4*




# *Análise Operacional*

OL

- *Exemplo 4*




$A_0 = 96$ $A_3 = 100$

$A_1 = 60$ $A_4 = 55$

$A_2 = 110$

$T_h = 6$

$T = 6 \times 60 = 360\ minutos$

$C_0 = 96$ $C_4 = 55$

$C_1 = 60$

$C_2 = 110$

$C_3 = 100$

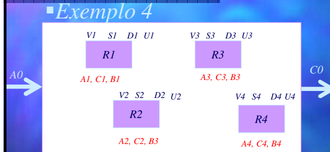
$B_1 = 4 \times 60 + 25$ $B_2 = 4 \times 60 + 5$

$B_3 = 5 \times 60 + 15$ $B_4 = 3 \times 60 + 56$

# *Análise Operacional*

OL

- *Exemplo 4*




$U_1 = \frac{B_1}{T} = 0.736111$ $S_1 = \frac{B_1}{C_1} = 4.41667$

$U_2 = \frac{B_2}{T} = 0.680556$ $S_2 = \frac{B_2}{C_2} = 2.22727$

$U_3 = \frac{B_3}{T} = 0.875$ $S_3 = \frac{B_3}{C_3} = 3.15$

$U_4 = \frac{B_4}{T} = 0.655556$ $S_4 = \frac{B_4}{C_4} = 4.29091$

$V_1 = \frac{C_1}{C_0} = 0.625$ $V_2 = \frac{C_2}{C_0} = 1.14583$

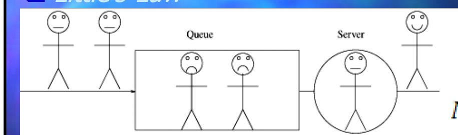
$V_3 = \frac{C_3}{C_0} = 1.04167$ $V_4 = \frac{C_4}{C_0} = 0.572917$

$\lambda_0 = \frac{A_0}{T} = 0.266667$ $X_0 = \frac{C_0}{T} = 0.266667$

$D_1 = \frac{U_1}{X_0} = 2.7604$ $D_2 = \frac{U_2}{X_0} = 2.55208$ $D_3 = \frac{U_3}{X_0} = 3.28125$ $D_4 = \frac{U_4}{X_0} = 2.45833$

# Análise Operacional

- *Little's Law*




$$N_i = \lambda_i \times R_i$$

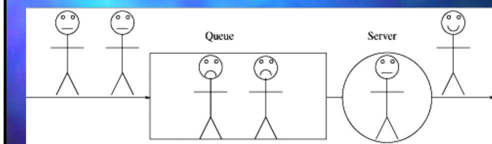
A lei de Little também é uma lei operacional, pois utiliza apenas informações mensuráveis. Adotamos essa lei para relacionar o tamanho da fila $N_i$ de um dispositivo $i$ ao tempo de resposta deste dispositivo $R_i$ em função do número de chegadas ($A_i$) observadas no período ($T$). $\lambda_i = \frac{A_i}{T}$

*R – Response time*
*W – Waiting time*
*S – Service time*

*N – Número de clientes no sistema*
*X – Throughput*

# Análise Operacional

- *Little's Law*




Se o sistema é balanceado, a taxa de chegada é igual ao *throughput*, portanto: $N_i = \lambda_i \times R_i = X_i \times R_i$

*Quando não há fila e se considera apenas um servidor, a Little's law corresponde a Utilization law: e R=S*

# Análise Operacional

- Exemplo 5

Um call center precisa redimencionar o número de atendentes em função de uma previsão de crescimento de demanda. Atualmente o call center recebe 20000 chamadas diárias. Espera-se que esse número chegue a 30000 chamadas diárias em 6 meses.

Os estudos mostram que 75% das chamadas diárias ocorrem num intervalo de 3 horas e a duração média das chamadas é de 5 minutos.

A empresa adota como meta um nível de utilização de 70% para os atendentes.

Quantos atendentes a empresa deve ter em 6 meses?

# Análise Operacional

- Exemplo 5

O *peak throughput* nos próximos 6 meses será:

$X = 75\% \times \frac{30000\ chamadas}{3\ horas} = 7500\ chamadas\ por\ hora = 125\ chamadas\ por\ minuto$

Se a duração média das chamadas é de 5 minutos, então para se ter uma utilização de 70%, a frequência entre chamadas é:

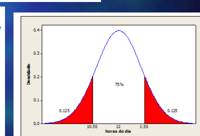
$U = \lambda \times S$

$0{,}7 = \lambda \times 5$

$\lambda = 0{,}14$ chamadas por minuto

$C = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.14} = 7{,}142857$ minutos

($C$- tempo entre chamadas)



# Análise Operacional

- Exemplo 5

O número de atendentes necessários pode ser estimado através da Little's Law, considerando $R = C$

$$N = X \times R$$

$N = 125 \times 7{,}142857 = 892{,}8571$ antendentes.

# Análise Operacional

- *General Response Time Law*

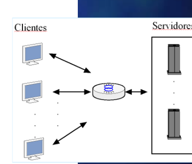
A Little's law pode ser aplicada a qualquer parte do sistema, basta apenas que o fluxo esteja "balanceado". Portanto, pode-se aplicá-la a parte central do sistema'(servidores) e ao sistema periférico (clientes).

$N$ é o número total de transacões no sistema, $R$ é o *response time*, e $X$ é o *throughput* do sistema.

$$N = X \times R$$

Dado que $N_i$ é o número de transações em cada dispositivo, $N$ pode ser calculdado:

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_M$$



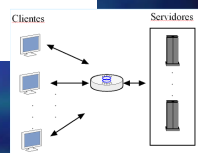
## Análise Operacional

### General Response Time Law

Dividindo-se ambos os lados por $X$, tem-se:

$$R = V_1 \times R_1 + V_2 \times R_2 + \cdots V_M \times R_M$$

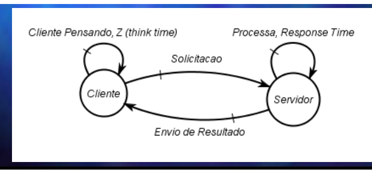
$$R = \sum_{i}^{M} V_i \times R_i$$




## Análise Operacional

### Interactive Response Time Law

Em um sistema interativo, os clientes fazem uma solicitação a um sistema servidor, o sistema servidor processa essa solicitação e devolve um resultado ao cliente. Após um período de espera (*think time*) $Z$, o cliente faz uma nova solicitação. Se o *system response time* é $R$, o tempo total desse ciclo é $R + Z$.




## Análise Operacional

### Interactive Response Time Law

Se considerarmos um período $T$, cada cliente gerará:

$$\frac{T}{R+Z} \; solicitações \;\; no \; período \; T.$$

Se considerarmos $N$ clientes, teremos:

$$\frac{N \times T}{R+Z} \; solicitações \;\; no \; período \; T.$$

Portanto, o *throughput* do sistema é:

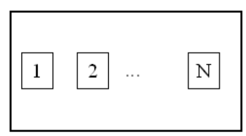
$$X = \frac{\frac{N \times T}{R+Z}}{T}$$

$$X = \frac{N}{R+Z} \quad \text{and} \quad R = \frac{N}{X} - Z$$

## Análise Operacional

### Bottleneck Analysis

Observe que a utilização $U_i$ do dispositivo $i$ é diretamente proporcional à demanda $D_i$ (*service demand*), portanto o dispositivo com mais alta demanda $\max_i\{D_i\}$ tem a mais alta utilização e é o "gargalo" do sistema.




Sistema com N componentes em paralelo

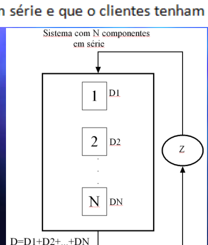
$$X_0 \leq \frac{1}{D_{max}}$$

Todas atividades começam no mesmo momento, mas a tarefa "maior" só finaliza quando todas as atividades finalizarem.

## Análise Operacional

### Bottleneck Analysis

Considere agora outra situação limite: um sistema composto por N componentes em série e que o clientes tenham um *think timeZ*.




Portanto, $R = D$

E como sabemos que

$$X = \frac{N}{R+Z}$$

Temos:

$$X = \frac{N}{D+Z}$$

Portanto:

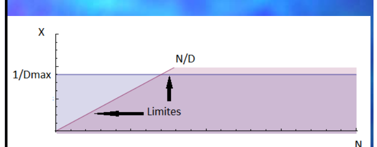
$$X \leq \frac{N}{D}$$

Consequentemente:

$$X = \min_i \left\{ \frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D} \right\}$$

## Análise Operacional

### Bottleneck Analysis




Portanto, $R = D$

E como sabemos que

$$X = \frac{N}{R+Z}$$

Temos:

$$X = \frac{N}{D+Z}$$

Portanto:

$$X \leq \frac{N}{D}$$

Consequentemente:

$$X = \min_i \left\{ \frac{1}{D_{max}}, \frac{N}{D} \right\}$$

## Análise Operacional

- *Bottleneck Analysis*

Problema:

Considere um servidor de email que é composto de um processador e duas unidades de disco (**disco 1** e **disco 2**). Cada transação a esse sistema, faz sete acessos ao **disco 1** e oito acessos **disco 2**, assim como dezesseis acessos ao processador. O *service time* do **disco 1 e disco 2** é 20 e 30 ms, respectivamente. O *service time* do processador é 10 ms.

a. Qual é o dispositivo "gargalo" do sistema?
b. Qual é o tempo de *response time* do sistema?
c. Qual é a utilização máxima da configuração atual desse sistema?
d. Qual é o *throughput* máximo desse sistema?

## Análise Operacional

- Leis Operacionais (*derived measures*)

**Utilization Law:**

$$U_i = X_i \times S_i = \lambda_i \times S_i$$

**Forced Flow Law:**

$$X_i = V_i \times X_0$$

**Service Demand Law:**

$$D_i = V_i \times S_i = U_i / X_0$$

**Little's Law:**

$$N = X \times R$$

**Interactive Response Time Law**

$$R = \frac{N}{X} - Z$$

## Modelagem de Fenômenos Aleatórios


## Modelo de Probabilidade

1. Espaço amostral ($\Omega$): um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementar) de um fenômeno aleatório.
2. Conjuto de eventos (*S*): um conjunto de todos sub-conjuntos de $\Omega$.
3. Probabilidade dos eventos (*P*): a probailidade de ocorrência de um evento observável.

PM é a tupla: PM = ($\Omega$, *S*, *P*).

## Modelo de Probabilidade

Considere um experimento que consiste no acionamento do condicionador de ar, com dois possíveis resultados mutuamente exclusivos: $S - Sucesso \quad F - Defeito\ (Failure)$

Portanto:

$$\Omega = \{S, F\}$$
$$S = \{\{S\}, \{F\}, \{S, F\}, \phi\}$$
$$P(\{S\}) = p$$
$$P(\{F\}) = 1 - p$$
$$P(\{S, F\}) = 1$$
$$P(\phi) = 0$$

## Espaço Amostral

- A probabilidade de um evento representa a chance de que o resultado de um experimento resulte na ocorrência do evento.
- Assume-se que os experimentos são aleatórios.
- Um experimento aleatório pode ter muito resultados. Cada resultado é um ponto amostral (evento elementar) e tem uma probailidade.
- Um espaço amostral $\Omega$ : um conjunto de todos os possíveis "estados" observáveis (eventos elementares) de um fenômeno aleatório.
  - Finito (ex.: execução das ações associadas a opções de um **if**; dois resultados)
  - Countável (ex.: número de vezes que "corpo" de um laço **while** é executado; O espaço amostral por ser finito ou contável infinito.)
  - Contínuo (ex.: tempo de falha de componente)

## Eventos

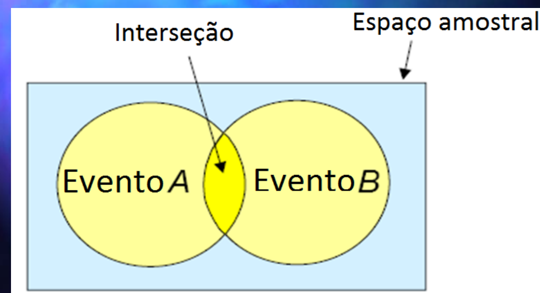
- Um evento $E$ é uma coleção de zero ou mais pontos amostrais (evento elementar) de $\Omega$. Um evento $E$ é um sub-conjunto de $\Omega$.

$$E \subseteq \Omega$$

- $\Omega$ é o evento universal e o conjunto vazio é presentado por $\emptyset$

$$\Omega \in S$$
$$A \in S \Rightarrow \bar{A} \in S$$
$$A, B \in S \Rightarrow A \cup B, A \cap B \in S$$

## Diagrama de Venn
## União e Inteseção de Eventos




## Probabilidade

- *Probabilidade* é um valor numérico que representa a chance de que um evento ocorra.
- Os valores de uma Probabilidade estão entre 0 e 1.
- A probabilidade próxima de 0 representa grande improbabilidade de ocorrência do evento.
- A probabilidade próxima de 1 denota que a ocorrência do evento é quase certa.

## Eventos e suas Probabilidades

- Um evento é uma coleção de pontos amostrais. A probailidade de um evento é a soma das probabilidades do pontos amostrais.
- Se pudermos identificar todos os pontos amostrais (eventos elementares) de um experimento e associar probabilidades a eles, podemos calcular a probabilidade de qualquer evento.

## Terminologia e Definições

- *Ω* e *E*

- $\overline{E_1} = \Omega - E_1$ - *Complemento*
- $E_3 = E_1 \cap E_2$, *interseção*
- $E_4 = E_1 \cup E_5$, *União*

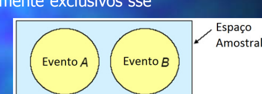
Para n eventos $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_2 ... \cup E_n$

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cap E_2 ... \cap E_n$$

## Álgebra

- Eventos mutuamente exclusivos (disjuntos)
  - Dois eventos são mutuamente exclusivos sse

$$A \cap B = \emptyset$$




Um conjunto de $n$ eventos ($n>2$) é mutuamente exclusivo sse

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i, & i = j \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

## Axiomas

- Espaço de Probabilidade: OS = $(\Omega, S, P)$
  - Para qualquer evento A, a proabilidade de A é:

1. $1 \geq P(A) \geq 0, \forall A \in S$
2. $P(\Omega)=1$
3. Se A e B São disjuntos, então:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

## Consequências

- Espaço de Probabilidade: OS = $(\Omega, S, P)$

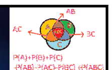
Sejam A e $\overline{A}$ (seu complemento) eventos

$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

4. Se A e B são dois eventos que não são mutuamente exclusivos:

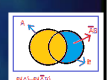
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## Consequências:
### Eventos não mutuamente exclusivos



$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i>j} P(A_i A_j) + \sum_{i>j>k} P(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^n P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Princípio da inclusão e exclusão (acima)
Um método muito melhor é:



5. Soma dos Produtos Disjuntos (SDP):

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cap A_2) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) + \cdots + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n).$$

## Exemplo

Fenômeno aleatório:
Dois resultados de um teste de condição em um **if** *statement*:

**if** *B* **then** *T*;
**else** *E*;

$\Omega$ = {*T*,*E*}; Conjunto de resultados
*S* = {$\Phi$, {*E*}, {*T*}, {*T*,*E*} }; Conjunto de todos os eventos
*P* = { 0, ½, ½, 1}; probabilidade atribuídas

## Variáveis Aleatórias
## Resumo

- Variáveis Aleatórias é uma função que confere um número real a cada resultado (do espaço amostral) de um experimento aleatório.
- Variável Aleatória é uma função que reflete o resultado de um experimento aleatório. $X: \omega \rightarrow \Re$.
  $\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$ $x \in \Re$.

## Variáveis Aleatórias
## Resumo

- Variáveis aleatórias contínuas assumem quaisquer valores no intervalo [a,b], onde $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$
- Variáveis aleatórias discretas assumem apenas valores discretos.

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

## Variáveis Aleatórias Resumo

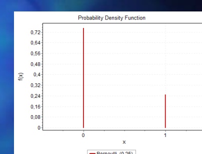
- *Probability mass function (pmf)* – Seja $\Omega$ um espaço amostral discreto. $p(x)$, que denota uma pmf de uma variável aleatória $X$, é definida por $p(x) = P[X=x]$, onde $x$ assume valores de $\Omega$.

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Função de Distribuição de Probabilidade Acumulativa (CDF) de uma variável aleatória X, denotada por $F(X)$, é definida por $F(X) = P[X \le x]\ \forall\, x \in \Re$
- $F(X)$ é uma função monotônica não-decrescente tal que $0 \le F(X) \le 1$, onde $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$
- $F(X) = \sum_{y \le x} p(y) \Rightarrow F(\infty) = \sum_{\forall y} p(y) = 1$

## Variáveis Aleatórias Resumo

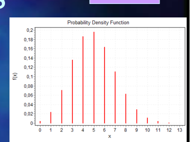
Mathematica



- Discreta
  - Bernoulli
    - Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis ($X=0, X=1$).
    - pmf(*probability mass function*) de X é dada por: $P(X=0) = 1-p$ e $P(X=1) = p$, $0 \le p \le 1$

## Variáveis Aleatórias Resumo

Mathematica



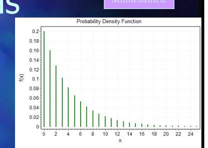
Discreta

- Binomial
  - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis ( 0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se tem resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$.

*Ver slides de medição*

## Variáveis Aleatórias Resumo

Mathematica



- Discreta
  - Geométrica
    - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis ( 0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se realiza o experimento para se ter o primeiro resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = p\,(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\overline{X} = E[X] = \Sigma_{\forall k}\ k \cdot P(X=k)$
  - Uma função de uma variável aleatória (Y=f(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[f(X)] = \Sigma_{\forall k}\ f(k) \cdot P(X=k)$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - n-ésimo momento (em torno da origem) de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência de X
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \Sigma_{\forall k}\ k^n \cdot P(X=k)$
  - n-ésimo momento central de uma variável aleatória X é o valor esperado da n-ésima potência da diferença entre X e o valor esperado de X ($E(X) = \overline{X}$)
    - $\overline{(X-\overline{X})^n} = \Sigma_{\forall k}\ (k-\overline{X})^n \cdot P(X=k)$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - O primeiro momento é o valor esperado.
  - O primeiro momento central é 0
  - O segundo momento central (variância)
    - $var(X)=\sigma^2 = \overline{(X-\overline{X})^2} = \Sigma_{\forall k}\ (k-\overline{X})^2 \cdot P(X=k)$
  - O coeficiente de variação é a normalização do desvio padrão
    - $c_X = \sigma / \overline{X}$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - Dada uma variável aleatória X, a função geratriz de momento $M_X(t)$ de sua distribuição de probabilidade é o valor esperado de $e^{tX}$.
  - $M_X(t)=E[e^{tX}]$
  - $= \Sigma_i\ e^{tx_i}\ p_X(x_i)$ X discreta.
  - $= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$ X contínua.

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Função Geratriz de Momentos
  - $e^{tX} = 1 + tX + t^2X^2/2! + \ldots + t^rX^r/r! + \ldots$

$$f(t) = e^{(-a\,t)}$$

$$= 1 - a\cdot t + \frac{a^2\cdot t^2}{2} - \frac{a^3\cdot t^3}{6} + \frac{a^4\cdot t^4}{24} - \frac{a^5\cdot t^5}{120} + \frac{a^6\cdot t^6}{720} - \frac{a^7\cdot t^7}{5040} + \frac{a^8\cdot t^8}{40320} - \frac{a^9\cdot t^9}{362880} + \ldots$$

Para a=2, tem-se:

$$= 1 - 2\cdot t + 2\cdot t^2 - \frac{4\cdot t^3}{3} + \frac{2\cdot t^4}{3} - \frac{4\cdot t^5}{15} + \frac{4\cdot t^6}{45} - \frac{8\cdot t^7}{315} + \frac{2\cdot t^8}{315} - \frac{4\cdot t^9}{2835} + \ldots$$

  - Tomando a esperança:
  - $E[e^{tX}] = 1 + E[X]\,t + E[X^2]\ t^2/2! + E[X^r]\ t^r/r! + \ldots$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Procedimento para obtenção dos momentos
  - *Determine* $M_X(t)$ *analiticamente para uma uma distribuição particular*
  - *Ache* $E[X^r] = d^r/dt^r\ M_X(t)|_{t=0}$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Bernoulli
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado = p,
    - Variância= p(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/p
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = q + pe^t$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Binomial
    - Parâmetros: n,p;
    - Valor Esperado= np,
    - Variância= np(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/np
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = (q + pe^t)^n$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Discreta
  - Geométrica
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado= 1/p,
    - Variância= $(1-p)/p^2$,
    - Coeficiente de variação= (1-p)
    - Função geratriz de momentos

$$M_{X_j}(t) = pe^t/(1-qe^t)$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor no intervalo [a,b], onde $-\infty \le a, b \le +\infty$, é denominada Variável Aleatória Contínua.
  - *Cumulative Distribution Function* (CDF)

  $F_X(x) = P(X \le x)$
    - Se x < y então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x<X\le y) = F_X(y) - F_X(x)$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Cumulative Distribution Function* (CDF)

  $F_X(x) = P(X \le x)$
    - Se x < y então: $F_X(x) < F_X(y)$
    - $P(x<X\le y) = F_X(y) - F_X(x)$
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - $f_X(x) \ge 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - *Probability density function* (pdf)
    - $f_X(x) = dF_X(x) / dx$
    - Como $F_X(x)$ não é decrescente, então $f_X(x) \ge 0$
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$
    - $P(x1 \le X \le x2) = \int_{x1}^{x2} f_X(x)\, dx$
    - $P(X=x) = \int_{x}^{x} f_X(x)\, dx = 0$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - Valor Médio ou Valor Esperado
    - $\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$
  - Uma função de uma variável aleatória (g(X)) é uma variável aleatória com Valor Esperado
    - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,dx$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Contínua
  - n-ésimo momento
    - $\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\,dx$
  - n-ésimo momento central
    - $\overline{(X-\bar{X})^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{X})^n \cdot f_X(x)\,dx$

## Variáveis Aleatórias Resumo

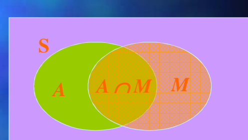
- Contínua
  - O segundo momento central (variância)
    - $\sigma^2 = \overline{(X-\bar{X})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{X})^2 \cdot f_X(x)\,dx$
  - O coeficiente de variação e a normalização do desvio padrão
    - $C_X = \sigma / \bar{X}$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Proriedade Markoviana
  - Ausência de Memória
- Variáveis Aleatórias com Propriedade Markoviana
  - Variável Aleatória Geométrica
  - Variável Aleatória Exponencial

## Probabilidade Condicional

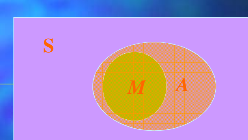
- Seja *A* um evento arbitrário em um espaço amostral *S*. A probabilidade de que ocorra um evento *A* uma vez que *M* tenha ocorrido é denotado por P(*A/M*) que é definido por:
- $P(A/M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)}$

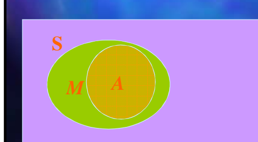



- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$
- Caso $A \subset M$ então $P(A/M) = \dfrac{P(A)}{P(M)}$

## Probabilidade Condicional

- Caso $M \subset A$ então $P(A/M)=1$




- Caso $A \subset M$ então $P(A/M) = \dfrac{P(A)}{P(M)}$

## Distribuição Exponencial

- Arises commonly in reliability & queuing theory.
- A non-negative continuous random variable.
- It exhibits memoryless property (continuous counterpart of geometric distribution).
- Related to (discrete) Poisson distribution

85

## Distribuição Exponencial

- Esse modelo é comumente usado:
  - Tempo de chegada entre pacotes IP (ou entre chamadas de voz)
  - Tempo de serviço de um servidor de arquivo, web, db
  - Tempo de falhas, tempo de reparo, de reboot etc.
- Se a distribuição exponencial não é apropriada, uma outra deve ser adequadamente escolhida.

86

## Distribuição Exponencial

- Por exemplo, distribuiçãoWeibull é comumente usada para representar tempos de falha.
- A distribuição Lognormal é muito usada para representar tempos de reparo.
- *Markov modulated Poisson processes* são muito usados para representar chegada de pacotes IP que não obdece tempo entre chegada exponencialmente distribuído.

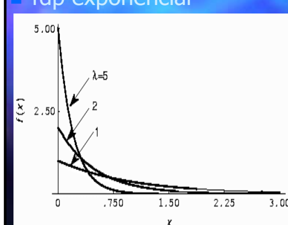
87

## Distribuição Exponencial

Mathematica

Variável Aleatória Exponencial

- fdp exponencial

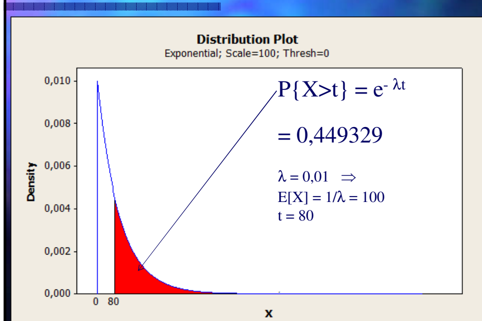



- $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $0 \le t < \infty$
- $CDF(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & 0 \le t < \infty \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
- Valor Esperado
  $E(X) = 1/\lambda$
- Variância: $var(X) = 1/\lambda^2$
- Propriedade:
  Não possui memória

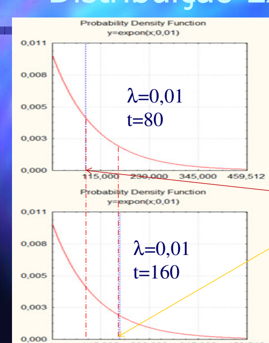
## Distribuição Exponencial

Exponential

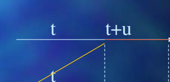
Mathematica




## Distribuição Exponencial

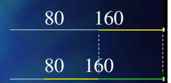



$P\{X>t\} = e^{-\lambda t}$




Probabilidade Condicional

## Distribuição Exponencial




Um exemplo:

P{X>80} = $e^{-0{,}01\times 80}$ =0,449329

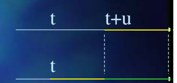
- P{X>(80+80) | X > 80} = $\dfrac{P\{X>(80+80) \wedge X>80\}}{P\{X>80\}}$
- P{X>(80+80) | X > 80}= $\dfrac{P\{X>160\}}{P\{X>80\}}$

Probabilidade Condicional

P{X>(80+80) | X > 80} = $\dfrac{e^{-0{,}01\times(80+80)}}{e^{-0{,}01\times 80}}$ = $e^{-0{,}01\times 80}$ = 0,449329

$\boxed{P\{X>160|X>80\} = P\{X>80\} = 0{,}449329}$

## Distribuição Exponencial




Variável Aleatória Exponencial

$\boxed{P\{X>t\} = e^{-\lambda t}}$

- P{X>t+u | X > t} = $\dfrac{P\{X>t+u \wedge X>t\}}{P\{X>t\}}$
- P{X>t+u | X > t} = $\dfrac{P\{X>t+u\}}{P\{X>t\}}$

Probabilidade Condicional

P{X>t+u | X > t} = $\dfrac{e^{-\lambda(t+u)}}{e^{-\lambda t}}$ = $\boxed{e^{-\lambda u} = P\{X>u\}}$

## Distribuição Exponencial

- Contínua
  - Exponencial
    - Parâmentro: λ,
    - Valor Esperado: 1/ λ,
    - Variância: $1/\lambda^2$,
    - Coeficiente de variação: 1
    - Função geratriz de momentos

$M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-1}$

*Lembre-se destas fórmulas*

## Distribuição Exponencial

- Matematicamente (CDF e pdf são):

$$\text{CDF: } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{if } 0 \le x < \infty \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\lambda$ is a paramter and the base of natural logarithm, $e = 2.7182818284$

$$\text{pdf: } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Também $P(X > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = e^{-\lambda t}$

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$



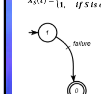
## Distribuição Exponencial

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \ge 0,$$
$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \ge 0,$$
$$h(t) = \lambda,$$
$$E[T] = MTTF = \frac{1}{\lambda},$$
$$Var[T] = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$



## Distribuição Exponencial

$$X_S(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } S \text{ has failed} \\ 1, & \text{if } S \text{ is operational} \end{cases}$$




States of $X_S(t)$

The memoryless property can be demonstrated with conditional reliability:

$$R(x \mid t) = \Pr(T > x + t \mid T > t) = \frac{\Pr(T > x + t)}{\Pr(T > t)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = R(x), \qquad x \ge 0.$$

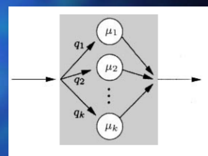
## Distribuição Hiperexponencial

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^{k} q_j(1 - e^{-\mu_j x}), \qquad x \geq 0.$$

pdf: $f_X(x) = \sum_{j=1} q_j \mu_j e^{-\mu_j x}, \quad x > 0,$

mean: $\overline{X} = \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j} = \frac{1}{\mu}, \quad x > 0,$

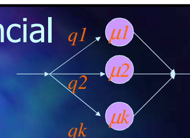
variance: $\mathrm{var}(X) = 2\sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j^2} - \frac{1}{\mu^2},$



$$c_X = \sqrt{2\mu^2 \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j}{\mu_j^2} - 1} \quad \geq 1$$

97

## Distribuição Hiperexponencial



Hiperexponencial

- Parâmentros: $k$, $\mu_j$, $q_j$;
- Valor Esperado:

  $E(X)=\overline{X}=\Sigma_{j=1}^{k} q_j/\mu_j$

$F_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j(1-e^{-\mu_j t})$, $t \geq 0$

$f_X(x)=\sum_{j=1}^{k} q_j\mu_j e^{-\mu_j t}$, $t \geq 0$

- Coeficiente de variação: $\mathrm{sqrt}(2\times(1/\overline{X})^2 \times \Sigma_{j=1} q_j/\mu_j^2 - 1) \geq 1$
- Variância: $2\ \Sigma_{j=1}^{k} q_j/\mu_j^2 - \overline{X}^2$

## Distribuição Hiperexponencial

Hiperexponencial

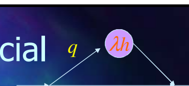
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e $c \geq 1$ pode ser aproximada por uma
  - Parâmentros: $k=2$, $\mu_1$, $\mu_2$, $q_1$, $q_2$

$\mu_1=1/\overline{X}\ .\ (1 - \mathrm{sqrt}(q_2/q_1\ .\ (c^2 -1)/2))^{-1}$

$\mu_2=1/\overline{X}\ .\ (1 + \mathrm{sqrt}(q_1/q_2\ .\ (c^2 -1)/2))^{-1}$

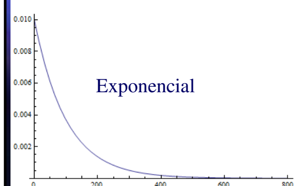
$q_1+q_2=1$, $q_1, q_2 \geq 0$ $\mu_1, \mu_2 > 0$

## Distribuição Hiperexponencial



Mathematica

```
λ = 0.01
f1[x_] := λ×e^(-λ×x)
m = ∫_0^∞ t×f1[t] dt = 100
sd = Sqrt[(∫_0^∞ t²×f1[t] dt - m²)] = 100
```

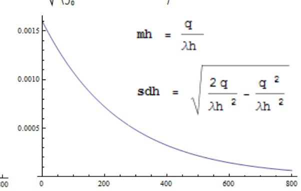



```
λh = 0.004
q = 0.4
fh[x_] := q×λh×e^(-λh×x)
mh = ∫_0^∞ t×fh[t] dt = 100
sdh = Sqrt[(∫_0^∞ t²×fh[t] dt - mh²)] = 200
```

Hiperexponencial

$$mh = \frac{q}{\lambda h}$$

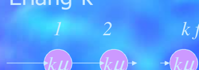
$$sdh = \sqrt{\frac{2\,q}{\lambda h^2} - \frac{q^2}{\lambda h^2}}$$



## Distribuição Erlang

Mathematica

- Erlang-k




$F_X(x)=1-e^{-k\mu t} \sum_{j=0}^{k-1} (k\mu t)^j/j!$, $t \geq 0$

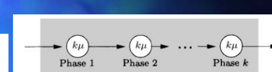
$f_X(x)= [(k\mu(k\mu t)^{k-1})/(k-1)!]e^{-k\mu t}$, $t \geq 0$, $k=1.2,\ldots$

- Parâmentros: $k$, $\mu$;
- Valor Esperado: $k/\mu$
- Variância: $k/\mu^2$
- Coeficiente de variação: $1/\mathrm{sqrt}(k) \leq 1$
- Função geratriz de momentos

  $M_X(t) = (1-t/\lambda)^{-k}$

## Distribuição Erlang

$$F_X(x) = 1 - e^{-k\mu x}.\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k\mu x)^j}{j!}, \quad x \geq 0,\ k = 1, 2 \ldots.$$




pdf: $f_X(x) = \frac{k\mu(k\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\mu x}, \ x > 0,\ k = 1, 2, \ldots,$

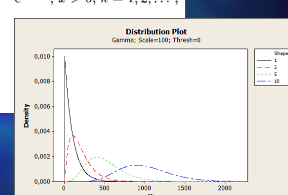
mean: $\overline{X} = \frac{1}{\mu},$

variance: $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{k\mu^2},$

coefficient of variation: $c_X = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1.$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

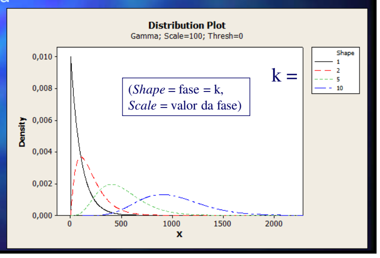
$$\mu = \frac{1}{c_X^2 k \overline{X}}.$$




102

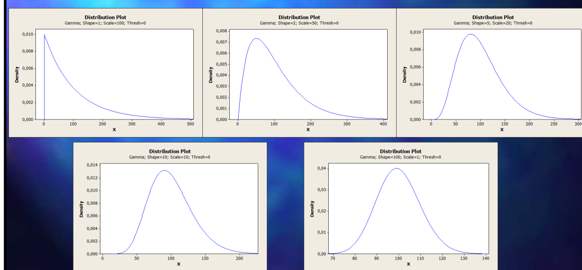
## Distribuição Erlang

- Erlang-K
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ e $c \leq 1$ pode ser aproximada por uma
  - $k=[1/c^2]$
  - $\mu=1/(c^2 k\overline{X})$




## Distribuição Erlang

- Erlang-K (*Shape* = fase, *Scale* = valor da fase)



## Distribuição Hipo-exponencial

pdf: $$f_X(x)=\sum_{i=1} a_i\mu_i e^{-\mu_i x}, \quad x>0,$$

with $$a_i=\prod_{j=1, j\neq i}^{k}\frac{\mu_j}{\mu_j-\mu_i}, \quad 1\leq i\leq k,$$

mean: $$\overline{X}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\mu_i},$$

coefficient of variation: $$c_X=\left(1+2\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(\mu_i\sum_{j=i+1}^{k}\mu_j\right)}{\sum_{i=1}^{k}\mu_i^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

105

## Distribuição Hipo-exponencial

A distribuição hipo-exponencial é uma generalização da distribuição de Erlang quando se admite fases com taxas diferentes.

- Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com duas fases $\mu_1 \neq \mu_2$, tem-se:
  - $F_X(x)=1-[\mu_2/(\mu_2-\mu_1)e^{-k\mu_1 t}]+[\mu_1/(\mu_2-\mu_1)e^{-k\mu_2 t}]$, $t\geq 0$
  - $f_X(x)=[(\mu_1\mu_2)/(\mu_1-\mu_2)](e^{-\mu_2 t}-e^{-\mu_1 t})$, $t\geq 0$

## Distribuição Hipo-exponencial

- Hipo-exponencial
  - Parâmentros: $\mu_1$, $\mu_2$,
  - Valor Esperado: $1/\mu_1 + 1/\mu_2$
  - Variância: $1/\mu^2_1 + 1/\mu^2_2$
  - Coeficiente de variação: $[\mathrm{sqrt}(\mu^2_1 + \mu^2_2)/(\mu_1+\mu_2)] < 1$

## Distribuição Hipo-exponencial

- Contínua
- Uma distribuição desconhecida de $\overline{X}$ como valor esperado e $0.5 \leq c^2 < 1$ pode ser aproximada por uma
  - Hipo-exponencial

    $\mu_1=(2/\overline{X})\{1+\mathrm{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

    $\mu_2=(2/\overline{X})\{1-\mathrm{sqrt}[1+2(c^2-1)]\}^{-1}$

## Distribuição Hipo-exponencial

- Contínua
  - Para uma variável aleatória com distribuição hipo-exponencial com k fases e taxas $\mu_1$, $\mu_2$, …, $\mu_k$ tem-se:

$f_X(x) = \sum_{j=1}^{k} a_i \mu_i e_1^{\lambda_i t}$ ,  $t \geq 0$

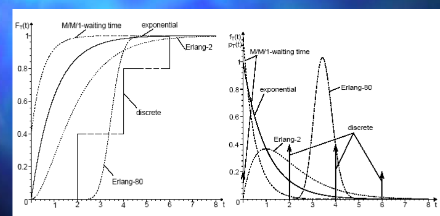
$a_i = \prod_{j=1, j \neq i}^{k} [\mu_j / (\mu_j - \mu_i)]$ ,  $1 \leq i \leq k$

Valor Médio = $\sum_{j=1}^{k} 1/\mu_i$

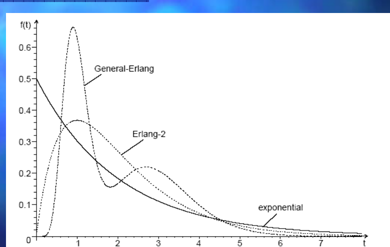
## Variáveis Aleatórias Resumo

Exp

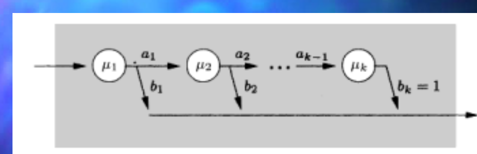
Erl




## Variáveis Aleatórias Resumo




## Distribuição Cox

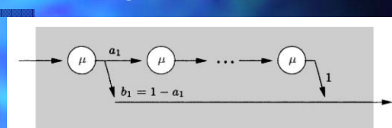


The model consists of $k$ phases in series with exponentially distributed times and rates $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. After phase $j$, another phase $j+1$ follows with probability $a_j$ and with probability $b_j = 1 - a_j$ the total time span is completed.

## Distribuição Cox

*Case 1:* $c_X \leq 1$

$\mu_j = \mu \quad j = 1, \ldots, k,$
$a_j = 1 \quad j = 2, \ldots, k-1$



$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1 - b_1)}{\mu},$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k) + k - 2)}{\mu^2},$$

$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)(b_1(1-k) + k - 2)}{[b_1 + k(1 - b_1)]^2}.$$

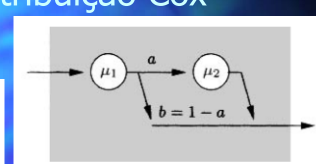
$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2 + 4 - 4kc_X^2}}{2(c_X^2 + 1)(k-1)},$$

$$\mu = \frac{k - b_1 \cdot (k-1)}{\overline{X}}.$$

## Distribuição Cox

*Case 2:* $c_X > 1$



$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2 - a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2 - a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}} \qquad a = \frac{1}{2c_X^2}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X} c_X^2}$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Uma função de uma variável aleatória ($Y=f(X)$) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[f(X)] = \sum_{\forall k} f(k) \cdot P(X=k)$
- Uma função de uma variável aleatória ($Y= g(X)$) é uma variável aleatória com Valor Esperado
  - $E[g(X)] = = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$

*Função densidade de Probabilidade de X*

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Se $f(X) = X$
  - Valor Esperado
    - $E[f(X)] = E(X) = \mu$
  - Variância
    - $Var[f(X)]=E([f(X) - E(f(X))]^2]$

$=E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$ (Variância de X)

$=Var(X) = \sigma^2$

## Variáveis Aleatórias Resumo

1. Se $f(X) = aX + b$

- Valor Esperado
  - $E[f(X)] = aE(X) + b$
- Variância
  - $Var[f(X)] = a^2Var(X)$
  - Prova: $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\, \mathrm{Var}(X).$

Por definição $\mathrm{Var}(aX + b) = E\,[(aX + b) - E(aX + b)]^2$

$$= E\,[aX + b - (aE(X) + b)]^2$$
$$= E\,(aX - aE(X))^2$$
$$= E(a^2(X - E(X))^2 = a^2 E(X - E(X))^2 = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

## Variáveis Aleatórias Resumo

2. Se $f(X) = b$

- Valor Esperado
  - $E(b) = b$
- Variância
  - $Var(b) = 0$

## Variáveis Aleatórias Resumo

- Exemplo

Suponha que X seja uma variável aleatória tal que $E(X) = 3$ e $Var(X) = 5$. Além disto, seja $Y(X) = 2X - 7$.

Portanto:

$E(Y(X)) = [2 \times E(X)] - 7 = -1$

$Var(Y(X)) = 2^2 \times Var(X) = 20$

## Variáveis Aleatórias Resumo

Quando $Y=f(X)$ é muito complicada, os cálculos de $E(f(X))$ e $Var(f(X))$ podem ser difíceis. Pode-se obter aproximações de $E(f(X))$ e $Var(f(X))$ expandindo-se $Y=f(X)$ (série de Taylor) até três termos (para a média).

$Y = f(E(X)) + [(X - E(X)) \times f'(E(X))] + [(1/2)\times[(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + R$

*Resto da expansão*

## Variáveis Aleatórias
## Resumo

- $Y = f(E(X)) + (X - E(X))\, f'(E(X)) + [(1/2) \times [(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + R$. Portanto: $= 0$
- $E(f(X)) = E[f(E(X))] + E[(X - E(X))\, f'(E(X))] + E[(1/2) \times [(X - E(X))^2] \times f''(E(X))] + E(R) =$

$E[f(E(X))] + E[(1/2)] \times E[f''(E(X))] \times E[(X - E(X))^2] + E(R) =$

$f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) + E(R)$

$\cong f(E(X)) + (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X) \Rightarrow$

$\boxed{E(f(X)) \cong f(E(X)) + [\, (1/2) \times f''(E(X)) \times Var(X)\, ]}$

## Variáveis Aleatórias
## Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

Seja X uma variável aleatória com E[X] e Var(X). Suponha que Y=f(X). Portanto:

- $E[Y] \cong f(E[X]) + (f''(E[X]) \times Var(X))/2$
- $Var(Y) \cong (f'(E[X]))^2 \times Var(X)$

## Variáveis Aleatórias
## Resumo

Aproximação (série de Taylor) do Valor Esperado e Variância para variáveis aleatória que são função de variáveis aleatórias.

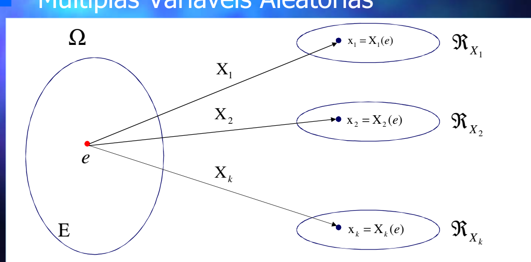
- Suponha uma variável aleatória t, onde E[t]=20s e Var(t)=5s. Considere uma função $v(t)=dt^{-1} = 10^3\, t^{-1}$
- $v'(t) = -10^3\, t^{-2}$ e $v''(t)=2 \times 10^3\, t^{-3}$
- $E[v(t)] = v(E[t]) + (v''(E[t]) \times Var(t))/2$
- $E[v(t)] = v(20) + (v''(20) \times 5)/2 = 50{,}625$ m/s
- $Var(v(t))=[v'(E[t])]^2 \times Var(t)$
- $Var(v(t))= [v'(20)]^2 \times 5 = 12{,}5$ m/s

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais
## Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias
  - Seja $\Omega$ o espaço amostral associado a um experimento E. $e \in E$ é um resultado do experimento E.
  - Seja $X_1, X_2, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias que associam um número real $X_1(e), X_2(e), \ldots, X_k(e)$ a cada resultado e.
  - $[X_1, X_2, \ldots, X_k]$ é chamado de vetor aleatório k-dimensional.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais
## Resumo

- Múltiplas Variáveis Aleatórias

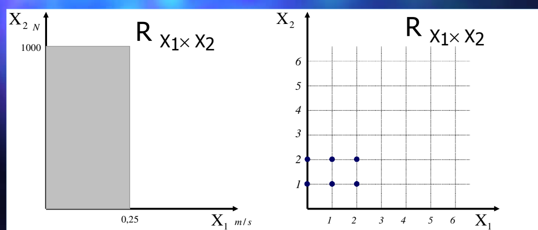



## Variáveis Aleatórias Multidimensionais
## Resumo

- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto finito ou infinito enumerável, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório discreto bidimensional.
  - Se os valores possíveis de $[X_1, X_2]$ formam um conjunto não enumerável do plano euclidiano, $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo bidimensional.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Variáveis Aleatórias Bidimensionais (vetores aleatórios bidimensionais)




## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Bivariada
  - Caso Discreto: a cada resultado $[x_1, x_2]$ de $[X_1, X_2]$ associamos um número
    $p(x_1, x_2) = P(X_1= x_1, X_2 =x_2)$,
    onde $p(x_1, x_2) \geq 0, \forall\ x_1, x_2$

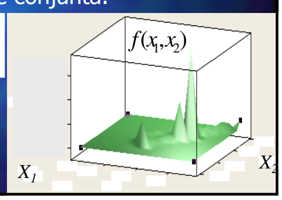
    $$\sum_{x_1}\sum_{x_2} p(x_1, x_2) = 1$$
  - Distribuição de probabilidade de $[X_1, X_2]$

    $$([x_1, x_2], p(x_1, x_2)), \forall x_1, x_2$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Bivariada
  - Caso Contínuo: Se $[X_1, X_2]$ é um vetor aleatório contínuo, $f(x_1, x_2) \geq 0$, $\forall\ (x_1, x_2) \in R_{X_1\times X_2}$ é a função de densidade conjunta.

$$\iint_{R_{X_1\times X_2}} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1$$




## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Discreto : a distribuição marginal de $X_1$ é

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2), \forall x_1$$

A distribuição marginal de $X_2$ é

$$p_2(x_2) = \sum_{x1} p(x_1, x_2), \forall x_2$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

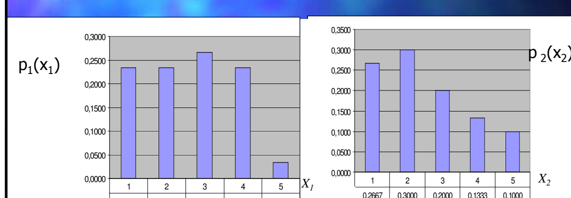
Retornar

- Probabilidade Marginal: Caso Discreto

| $x_2$ \ $x_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $p_2(x_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/30 | 1/30 | 2/30 | 3/30 | 1/30 | 8/30 |
| 2 | 1/30 | 1/30 | 3/30 | 4/30 | | 9/30 |
| 3 | 1/30 | 2/30 | 3/30 | | | 6/30 |
| 4 | 1/30 | 3/30 | | | | 4/30 |
| 5 | 3/30 | | | | | 3/30 |
| $p_1(x_1)$ | 7/30 | 7/30 | 8/30 | 7/30 | 1/30 | $\sum_x p(x) = 1$ |

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal: Caso Discreto



## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Probabilidade Marginal
  - Caso Contínuo : a distribuição marginal de $X_1$ é

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

A distribuição marginal de $X_2$ é

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$$Z = X + Y.$$
$$\text{Portanto } E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias discreta, temos que :

$$E[Z] = E[X+Y] =$$
$$\sum_x \sum_y (x+y)\, p(x+y) =$$

(*Ver exemplo da página seguinte*)

$$\sum_x x\, p_x(x) + \sum_y y\, p_y(y) =$$
$$E[X] + E[Y]$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

Ver Tabela Original

- Linearidade do Valor Esperado

| x2,x1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | p2(x2) | x2 p(x2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0333 | 0,0333 | 0,0667 | 0,1000 | 0,0333 | 0,2667 | 0 |
| 1 | 0,0333 | 0,0333 | 0,1000 | 0,1333 | | 0,3000 | 0,3 |
| 2 | 0,0333 | 0,0667 | 0,1000 | | | 0,2000 | 0,4 |
| 3 | 0,0333 | 0,1000 | | | | 0,1333 | 0,4 |
| 4 | 0,1000 | | | | | 0,1000 | 0,4 |
| p1(x1) | 0,2333 | 0,2333 | 0,2667 | 0,2333 | 0,0333 | 2,0000 | 1,5000 |
| 1,6000 | 0 | 0,233333 | 0,533333 | 0,7 | 0,133333 | x1 p(x1) | E[X2] |
| E[X1] | | | | | | E[X1+X2]= | 3,1000 |

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Considerando X, Y e Z variáveis aleatórias contínuas, temos que :

$$E[Z] = E[X+Y] =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\, f(x+y)\, dx dy =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\, dy dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y)\, dx dy =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy =$$
$$E[X] + E[Y]$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

De forma mais geral, considere Z, Y e X variáveis aleatórias contínuas, onde

Z(X,Y) = aX+bY, e a e b são constantes.

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

*Prova:*

$$
\begin{aligned}
E(aX+bY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[axf(x,y)+byf(x,y)]dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}axf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}byf(x,y)dxdy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\right]dx+b\int_{-\infty}^{\infty}y\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx\right]dy \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy \\
&= aE(X)+bE(Y).
\end{aligned}
$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Linearidade do Valor Esperado

Este resultado pode ser generalizado de forma que:
para $a_1,\ldots a_n$ constantes e qualquer variável aleatória multivariada $(X_1,\ldots X_n)$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i)$$

Se $E(X_i)$ não divergem.

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

Retornar

- Linearidade do Valor Esperado
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e seja

$Z = XY.$

Portanto $E[Z]=E[XY]=E[X]E[Y]$

Prova: $E[XY]=\sum_i\sum_j x_iy_jp(x_i,y_j)=$

$\sum_i\sum_j x_iy_jp_X(x_i)p_Y(y_j)=$ (dado que são independentes)

$\sum_i x_ip_X(x_i)\sum_j y_jp_Y(y_j)=$

$E[X]E[Y]$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias
  - Sejam X e Y duas variáveis aleatórias e seja

$Z = X + Y$

Portanto $Var[Z] = Var[X + Y]$

$= Var[X] + Var[Y] + 2\times Cov(X, Y)$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$
\begin{aligned}
Var[X+Y] &= E[((X+Y)-E[X+Y])^2] \\
&= E[((X+Y)-E[X]-E[Y])^2] \\
&= E[((X-E[X])+(Y-E[Y]))^2]
\end{aligned}
$$

$= E[(X-E[X])^2+(Y-E[Y])^2+2(X-E[X])(Y-E[Y])]$

$= E[(X-E[X])^2]+E[(Y-E[Y])^2]+E[2(X-E[X])(Y-E[Y]]$

$= E[(X-E[X])^2]+E[(Y-E[Y])^2]+2E[(X-E[X])(Y-E[Y]]$

$= Var[X]+Var[Y]+2Cov(X,Y)$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$Cov(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y]]$

$=E(XY-YE[X]-XE[Y]+E[X]E[Y])$

Devido à propriedade de linearidade do valor esperado, temos:

$=E[XY]-E(YE[X])-E(XE[Y])+E[X]E[Y]$

$=E[XY]-E[Y]E[X]-E[X]E[Y]+E[X]E[Y]$

$=E[XY]-E[X]E[Y]$ (Se X e Y forem independentes)

$=0$ (devido à linearidade)

Ver também o slide 101

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X+Y) = Var[X] + Var[Y] + 2Cov(X,Y)$$

Dado que se X e Y forem independentes, tem-se Cov(X,Y)=0. Portanto:

$$Var(X+Y) = Var[X] + Var[Y]$$

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X+Y) = Var[X] + Var[Y]$$

O teorema acima pode generalizado para n variáveis aleatória Mutuamente independentes $X_1, \ldots X_n$ com constantes $a_1, \ldots a_n$

$$Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$$

Ver também o slide 77

## Variáveis Aleatórias Multidimensionais Resumo

- Soma de Variâncias

$$Var(X-Y) = Var[X] + Var[Y]$$

Dado que $Var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var[X_i]$

Pois $a_x = 1$ e $a_y = -1$

$$Var[X-Y] = a_x^2 Var[X] + a_y^2 Var[Y]$$

$$= (1)^2 Var[X] + (-1)^2 Var[Y]$$

$$= Var[X] + Var[Y]$$

## Processos Estocásticos

- Processo Estocástico é definido por um conjunto de variáveis aleatórias,

$\{X(t) : t \in T\}$, onde $X(t)$ é uma variável aleatória para cada $t \in T$.
$t$ é denominado parâmetro e cada valor de $X(t)$ são estados.

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Tipos de Processos Estocásticos
  - Processos de espaço de estados e tempo discretos (*Discret Time Markov Chain* - DTMC)
  - Processos de espaço de estados contínuo e tempo discreto
  - Processos de espaço de estados discreto e tempo contínuo (*Continuos Time Markov Chain* - CTMC)
  - Processos de espaço de estados e tempo contínuos

## Processos Estocásticos

- Classificação de Estados:
  - Estado Alcançável (*reachable*): um estado $s_j$ é um alcancável de um estado $s_i$ se $p_{ij} > 0$.
  - Um sub-conjunto de estado $S$ é definido com fechado (*closed*) se $\forall s_i \in S$, $p_{ij} = 0$, $\forall s_j \notin S$ .
  - Um estado é absorvente se ele é o único membro de conjunto fechado de estados $S$.
  - Um conjunto fechado de estado $S$ é dito irredutível se $p_{ij} > 0$ $\forall$ $s_i, s_j \in S$ (todo estado $s_j$ é alcançável de qualquer estado $s_i$).

## Processos Estocásticos

- Processo Estocástico Markoviano é um processo estocástico onde as variáveis aleatórias não dependem da história passada.
- Observam-se dois aspectos associados a ausência de memória:
  1. Todo estado passado é irrelevante.
  2. O tempo que o processo passa em um estado é irrelevante.
- Processo Estocástico Semi-Markoviano é uma extensão de um processo Markoviano onde a restrição 2 é relaxada.

## *Continuos Time Markov Chain*

- Equação de Chapman-Kolmogorov

Considere uma CTMC (não-homogênea) $\{X(t): t \geq 0\}$ com espaço de estado $\{0,1,2,\ldots\}$. Vamos usar i,j e k para denotar estados típicos e s,u e t para denotar parâmetro de tempo.

Para $0 \leq s \leq t$, considere $p_{ij}(s,t) = P\{X(t)=j \mid X(s)=i\}$. Pode ser representada na forma matricial por $H(s,t) = [\, p_{ij}(s,t)]$

A equação de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u)\, p_{kj}(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

Na forma matricial, temos:

$$H(s,t) = H(s,u)\, H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$$

## *Continuos Time Markov Chain*

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$H(s,t) = H(s,u)\, H(u,t);\ 0 \leq s \leq u \leq t$

Substituindo u por t e t por t+h, então:

$H(s,t+h) = H(s,t)\, H(t,t+h)$

Subtraindo-se ambos os lados por H(s,t), temos:

$H(s,t+h) - H(s,t) = H(s,t)\, [H(t,t+h) - I]$

Dividindo-se por h e aplicando-se o limite $h \rightarrow 0$, tem-se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(s,t+h) - H(s,t)}{h} = H(s,t)\, [\lim_{h \rightarrow 0} \frac{H(t,t+h) - I}{h}]$$

Levando à equação diferencial parcial $\dfrac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$

## *Continuos Time Markov Chain*

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$\dfrac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$ *(forward Kolmogorov eq.)*

Onde $Q(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \dfrac{H(t,t+h) - I}{h}$

Os elementos de Q(t) são dados por

$$q_{ii}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(t,t+h) - 1}{h}$$

$$q_{ij}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t,t+h)}{h} \quad i \neq j$$

## *Continuos Time Markov Chain*

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$1 - p_{ii}(t,t+h) = -hq_{ii}(t) + o(h)$

$p_{ij}(t,t+h) = hq_{ij}(t) + o(h)$

Onde o(h) é uma função de converge para zero mais rápido que h.

Dado que $\sum_j p_{ij}(s,t) = 1,\ \forall\, i$, portanto:

$$\sum_j q_{ij}(s,t) = 0,\ \forall\, i$$

Ou seja, a soma de elementos de uma linha de Q é zero.

## *Continuos Time Markov Chain*

- Equação de Chapman-Kolmogorov

$\dfrac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t)$ *(forward Kolmogorov eq.)*

Para cadeias homogêneas, tem-se:

$Q(t) = Q$ e $H(s,t) = \Pi(t)$

## *Continuos Time Markov Chain*

- *Steady State Analysis*

$\dfrac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$ (homogêneas)

Em estado estacionário ($t \rightarrow \infty$), pode que

$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi(t) = \Pi(t)$ exista.

Caso exista, então $\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

$\dfrac{d\Pi(t)}{dt} = 0$, então $\Pi Q = 0$

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$\Pi Q = 0$

$\sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

Onde $\pi_s$ fornece a *steady-state probability* de um sistema estar no estado $s_i$

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$

Onde $\pi(t)_{si}$ é probabilidade de se estar na estado $s_i$ no instante $t$

## Continuos Time Markov Chain

- Uma CTMC é dita irredutível se $p_{ij} > 0 \; \forall \; s_i, s_j \in S$ (todo estado $s_j$ é alcançável de qualquer estado $s_i$).

- Uma CTMC finita, irredutível e homogênea é dita ergódica (*ergodic*) se o vetor de probabilidade estacionária (*steady-state probability vector*) $\Pi$ existe.

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

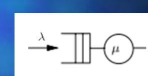
$\Pi Q = 0 \qquad \sum_{si \in S} \pi_{si} = 1$

- **Métodos diretos**
  - Eliminação de Gauss
  - Decomposição LU
  - Método de Grassmann
- **Métodos Iterativos**
  - Power Method
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel

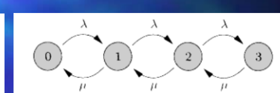
## Continuos Time Markov Chain

Exemplo

- $\lambda = 0{,}2,$
- $\mu = 0{,}4$



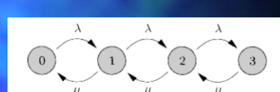
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$



$\pi(0) = \underline{0.5333}, \quad \pi(1) = \underline{0.2667}, \quad \pi(2) = \underline{0.1333}, \quad \pi(3) = \underline{0.0667}$

## Continuos Time Markov Chain

- $\lambda = 0{,}2,$
- $\mu = 0{,}4$



- Utilização: $\rho = 1 - \pi(0) = \underline{0.4667}$

- Throughput

$tp = \pi(1) \times \mu + \pi(2) \times \mu + \pi(3) \times \mu$

$tp = 0{,}2667 \times 0{,}4 + 0{,}1333 \times 0{,}4 + 0{,}0667 \times 0{,}4$

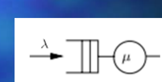
$tp = 0{,}18668$

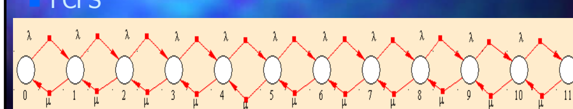
## Continuos Time Markov Chain

Sharpe (chame via Desktop)

Exemplo

- Tamanho do buffer=11
- $\lambda$
- $\mu$
- FCFS





State probability of State i={0,1,....,11}
State_Prob(i):

## Continuos Time Markov Chain

- **Métricas** - Métricas de interesse pode ser calculadas através da soma ponderada das probabilidades de estado.
  - *Reward rate* em estado estacionário

$$E[Z] = \sum_i r_i \pi_i$$

  - *Reward rate* instantânea

$$E[Z(t)] = \sum_i r_i \pi_i(t)$$

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

## Continuos Time Markov Chain

- Métricas – a probabilidade acumulada de que se esteja num estado é dada por:

$$\mathbf{L}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\pi}(u)\,\mathrm{d}u$$

Portanto, $\mathbf{L}_i(t)$ tempo médio (esperado) que se permanece no estado i durante o intervalo [0,t).

*Ver métricas nas página 91,92,93 e 94 de QN and MC [Bolch et al.]

## Continuos Time Markov Chain

Data

Exemplo

$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{TS} = 1$

$E[ST] = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{40} = 0.025$

State probability of 0: 5.16129024e-001

State probability of 1: 2.58064518e-001

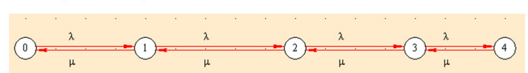
State probability of 2: 1.29032262e-001

State probability of 3: 6.45161314e-002

State probability of 4: 3.22580656e-002

Utilization= 0.483871

The CTMV (M/M/M/1/K=4)




## Continuos Time Markov Chain

Data

Exemplo

$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$E[TBA] = 0.05s$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{ST} = 0.5$

$E[ST] = 0.025s$

Considering:

$$\gamma = \left(\frac{E[ST]}{\sigma_{ST}}\right)^2$$

$$\mu_E = \left(\frac{\gamma}{E[ST]}\right)$$

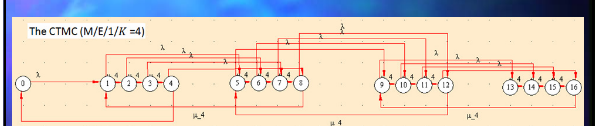
$$\gamma = \left(\frac{0.025}{0.0125}\right)^2 = 4$$

$$\mu_E = \frac{4}{0.025} = 160$$

Therefore, the ST is represented by a Erlang($\gamma$ =4, $\mu_E = 160$).

## Continuos Time Markov Chain

The CTMC (M/E/1/$K$ =4)




$\pi_0 = 5.06605425 \times 10^{-1}$

$\pi_1 = 9.01648794 \times 10^{-2}$

$\pi_2 = 8.01465589 \times 10^{-2}$

$\pi_3 = 7.12413851 \times 10^{-2}$

$\pi_4 = 6.33256751 \times 10^{-2}$

$\pi_5 = 2.42068626 \times 10^{-2}$

$\pi_6 = 3.04223846 \times 10^{-2}$

$\pi_7 = 3.49578293 \times 10^{-2}$

$\pi_8 = 3.81098122 \times 10^{-2}$

$\pi_9 = 7.97946839 \times 10^{-3}$

$\pi_{10} = 1.04731260 \times 10^{-2}$

$\pi_{11} = 1.31936488 \times 10^{-2}$

$\pi_{12} = 1.59621117 \times 10^{-2}$

$\pi_{13} = 9.97433581 \times 10^{-4}$

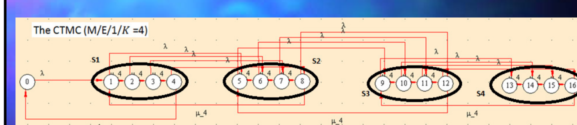
$\pi_{14} = 2.30657440 \times 10^{-3}$

$\pi_{15} = 3.95578062 \times 10^{-3}$

$\pi_{16} = 5.95104472 \times 10^{-3}$

## Continuos Time Markov Chain

The CTMC (M/E/1/$K$ =4)




$\lambda = 20\ tps, \quad COV = 1$

$E[TBA] = 0.05s$

$\mu = 40\ tps, \quad COV_{ST} = 0.5$

$E[ST] = 0.025s$

$$\gamma = \left(\frac{0.025}{0.0125}\right)^2 = 4$$

$$\mu_E = \frac{4}{0.025} = 160$$

$\pi_0 = 5.06605 \times 10^{-1}$

$\pi_{S1} = 3.04878 \times 10^{-1}$

$\pi_{S2} = 1.27697 \times 10^{-1}$

$\pi_{S3} = 4.76084 \times 10^{-2}$

$\pi_{S4} = 2.21877 \times 10^{-2}$

$Utilization = 0.493395$

## Continuos Time Markov Chain

Sharpe (chame via Desktop)

C:\Sharpe-Gui\ SHARPE GUI Examples \Markov\Degradable

Exemplo

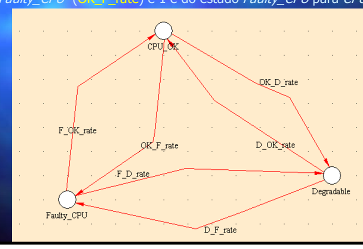
Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios*: CPU_OK, Degradable e Faulty_CPU.*
- As taxas entre os estados são:
  *CPU_OK* para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20, *Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.

## Continuos Time Markov Chain

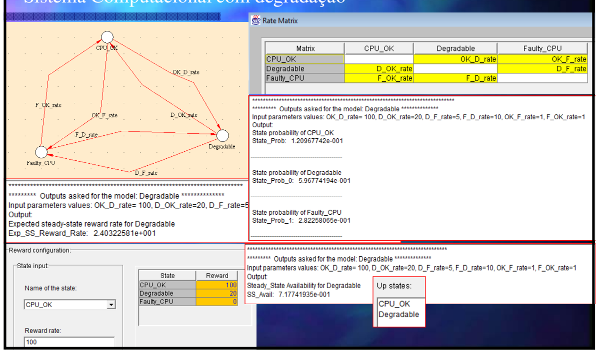
Sistema Computacional com degradação

- Suponha um sistema representado por uma CPU que opera em três estágios*: CPU_OK, Degradable e Faulty_CPU.* As taxas entre os estados são:
- *CPU_OK* para *Degradable* é (OK_D_rate) 100, *Degradable* para *CPU_OK* (D_OK_rate) é 20, *Degradable* para *Faulty_CPU* (D_F_rate) é 5, *Faulty_CPU* para *Degradable* (F_D_rate) é 10, *CPU_OK* para *Faulty_CPU* (OK_F_rate) é 1 e do estado *Faulty_CPU* para *CPU_OK* (F_OK_rate) é 1.




## Continuos Time Markov Chain

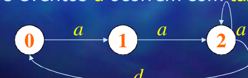
Sistema Computacional com degradação




## Continuos Time Markov Chain

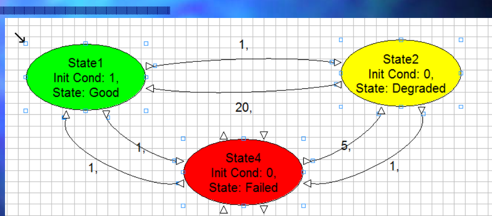
Exemplo

- Suponha um sistema representado por um autômato estocástico, onde:
  - $S = \{0,1,2\}$
  - $E = \{a,d\}$
  - $f(0,a)=1$, $f(1,a)=2$, $f(2,a)=2$, $f(2,d)=0$
  - $\Gamma(0) = \{a\}$, $\Gamma(1) = \{a\}$, $\Gamma(2) = \{a,d\}$
  - Os eventos a ocorrem com taxa igual = $\lambda$,
  - Os eventos d ocorrem com taxa igual = $\mu$




*State Transition Diagram*

## Continuos Time Markov Chain




Markov Transitions

| | Identifier | Description | Input State | Output State | Transition Reward | Rate | Cost |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Transition1 | | State1 | State2 | Loss | 1,000000 | 0,00 |
| 2 | Transition2 | | State2 | State1 | Loss | 20,000000 | 10,00 |
| 3 | Transition3 | | State2 | State4 | Loss | 1,000000 | 0,00 |
| 4 | Transition4 | | State4 | State2 | Loss | 5,000000 | 20,00 |
| 5 | Transition5 | | State1 | State4 | Loss | 1,000000 | 0,00 |
| 6 | Transition6 | | State4 | State1 | Loss | 1,000000 | 40,00 |

## Continuos Time Markov Chain

Steady State Results:

| Result | Value |
|---|---|
| Availability | 0,857143 |
| Cost Per Unit Time | 765,714286 |
| MTBF | 1,166667 |
| MTTR | 0,166667 |

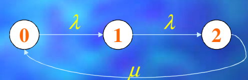
Results at time 1000,000000:

| Result | Value |
|---|---|
| Availability | 0,857143 |
| Cost Per Unit Time | 765,714286 |
| Failure Rate | NA |
| Mean Availability | 0,857163 |
| Mean Cost | 765,744808 |
| Mean Unavailability | 0,142837 |
| Reliability | 0,000000 |
| Total Cost | 765744,807972 |
| Total Downtime | 142,836554 |
| Total Uptime | 857,163446 |
| Unreliability | 1,000000 |

| Time | Availability | Cost Per Unit Time | Failure Rate | Mean Availability | Mean Cost | Mean Unavailabi... | Reliability | Total Cost | Total Downtime | Total Uptime | Unreliabili |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,000000 | 1000,000000 | 1000000,000000 | 1,000000 | 1000,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 100,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857349 | 766,019508 | 0,142651 | 0,000000 | 76601,950829 | 14,265126 | 85,734874 | 1,000000 |
| 200,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857246 | 765,866897 | 0,142754 | 0,000000 | 153173,379401 | 28,550840 | 171,449160 | 1,000000 |
| 300,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857211 | 765,816027 | 0,142789 | 0,000000 | 229744,807972 | 42,836554 | 257,163446 | 1,000000 |
| 400,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857194 | 765,790591 | 0,142806 | 0,000000 | 306316,236543 | 57,122269 | 342,877731 | 1,000000 |
| 500,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857184 | 765,775330 | 0,142816 | 0,000000 | 382887,665115 | 71,407983 | 428,592017 | 1,000000 |
| 600,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857177 | 765,765156 | 0,142823 | 0,000000 | 459459,093686 | 85,693697 | 514,306303 | 1,000000 |
| 700,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857172 | 765,757889 | 0,142828 | 0,000000 | 536030,522258 | 99,979412 | 600,020588 | 1,000000 |
| 800,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857169 | 765,752439 | 0,142831 | 0,000000 | 612601,950829 | 114,265126 | 685,734874 | 1,000000 |
| 900,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857166 | 765,748199 | 0,142834 | 0,000000 | 689173,379401 | 128,550840 | 771,449160 | 1,000000 |
| 1000,00 | 0,857143 | 765,714286 | NA | 0,857163 | 765,744808 | 0,142837 | 0,000000 | 765744,807972 | 142,836554 | 857,163446 | 1,000000 |

## Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*



$$\sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$$

$$\Pi Q = 0$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)\, Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$Q = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \phantom{0} \end{array}$$

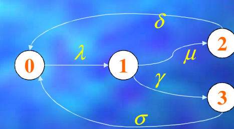
$$-\lambda \pi_0 + \mu \pi_2 = 0$$
$$\lambda \pi_0 - \lambda \pi_1 = 0$$
$$-\lambda \pi_1 - \mu \pi_2 = 0$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

$\pi_0 = \pi_1 = \mu / (2\mu + \lambda)$

$\pi_2 = \lambda / (2\mu + \lambda)$

## Continuos Time Markov Chain

- *State Transition Rate Diagram*



- $$Q = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{cccc} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma+\mu) & \mu & \gamma \\ \delta & 0 & -\delta & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma \end{array}\right| \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \phantom{0} \end{array}$$

$$\sum_{s_i \in S} \pi_{s_i} = 1$$

$$\Pi Q = 0$$

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)\, Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$T = 1 / (\pi_0 \times \lambda)$ - Tempo médic
entre finalizações

## Continuos Time Markov Chain

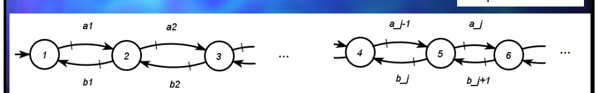
- *Birth-death chain*

Considere o automata

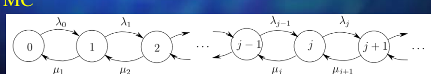
$f(i, a_i) = i + 1$

$f(i+1, b_i) = i$

enquanto $i > 0$

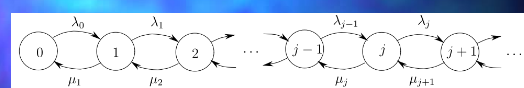



CTMC



## Continuos Time Markov Chain

- *Birth-death chain*

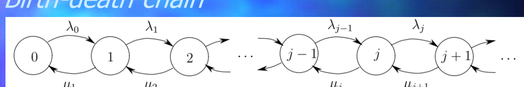


$$-(\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0,$$
$$-\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

## Continuos Time Markov Chain

- *Birth-death chain*



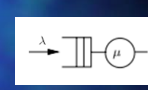
$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \;\Rightarrow\; \mu_2 \pi_2 = -\lambda_0 \pi_0 + (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 \;\Rightarrow\; \pi_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}\pi_0$$

$$\Rightarrow\; \pi_j = \left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}\right)\pi_0 \;\Rightarrow\; \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j}\right)}$$

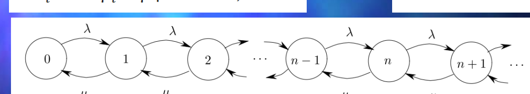
QBM

## Continuos Time Markov Chain

- *M/M/1 queueing system*



Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo $i$, tem-se:



$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Desde que $\lambda < \mu$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}$$

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Utilização

$\rho = \lambda/\mu$ $\quad 0 \leq \rho < 1$

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

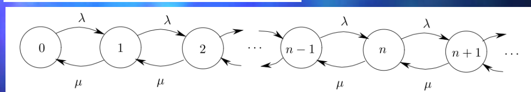
$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1 - \rho)$$

## Continuos Time Markov Chain

QBM

### M/M/1 queueing system

Se $\lambda_i = \lambda$ e $\mu_i = \mu$ para todo $i$, tem-se:




Utilização

Desde que $\lambda < \mu$

$\rho = \lambda/\mu$ $\quad 0 \le \rho < 1$

$\pi_0 = 1 - \rho$

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (1-\rho)$$

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

## Continuos Time Markov Chain

QBM

### M/M/1 queueing system

*Throughput*

Desde que $\lambda < \mu$

O throughput é $\lambda$

Se $\lambda > \mu$

throughput é $\mu$

Tamanho médio da fila

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad 0 \le \rho < 1$$

$$E[X] \rightarrow \infty \qquad \rho \rightarrow 1$$

*Mean response time*

$$E[S] = \frac{1/\mu}{1-\rho} \qquad 0 \le \rho < 1$$

$$E[S] \rightarrow \infty \qquad \rho \rightarrow 1$$

*Mean waiting time*

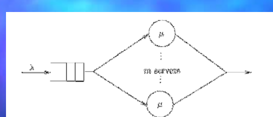
$$E[W] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$E[W] \rightarrow \infty$$

## Continuos Time Markov Chain

QBM

### M/M/m queueing system

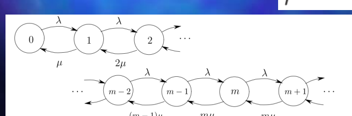



$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!} & n = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \pi_0 \dfrac{m^m}{m!}\rho^n & n = m, m+1, \ldots \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

Utilização

$$\rho = \lambda/m\mu$$




*Throughput*

Desde que $\lambda < \mu\, m$

O throughput é $\lambda$

Se $\lambda \ge \mu\, m$

throughput é $\mu$

## Continuos Time Markov Chain

QBM

### M/M/m queueing system

Tamanho médio da fila

$$E[X] = m\rho + \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\rho}{(1-r)^2}\pi_0 \qquad \lambda < \mu\, m$$

$$E[X] \rightarrow \infty \qquad \lambda \ge \mu\, m$$

*Mean response time*

$$E[S] = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\pi_0}{m(1-\rho)^2} \qquad \lambda < \mu\, m$$

$$E[S] \rightarrow \infty \qquad \lambda \ge \mu\, m$$

Fórmula C de Erlang

Probabilidade de um cliente chegar

e não encontrar o servidor disponível

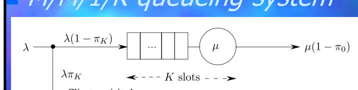
$$P_Q = P[X \ge m] = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n$$

$$P_Q = \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{\pi_0}{1-\rho}$$

## Continuos Time Markov Chain

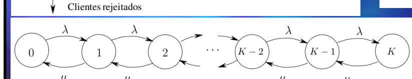
QBM

### M/M/1/K queueing system




$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n & \text{if } 0 \le n \le K \\ 0 & \text{if } n > K \end{cases}$$




Utilização

Se $\lambda > \mu$ a utilização $\longrightarrow 1$

Se $\lambda < \mu$ a utilização $= \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Probabilidade de Descarte

$$P_D = \pi_K = (1-\rho)\frac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

## Continuos Time Markov Chain

QBM

### M/M/1/K queueing system

Tamanho médio da fila

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right]$$

*Mean response time*

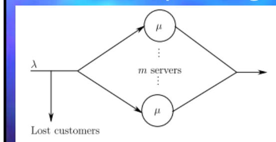
$$E[S] = \frac{E[X]}{\lambda(1-\pi_K)}$$

$\lambda(1-\pi_K)$- taxa de chegada dos clientes admitidos

QBM

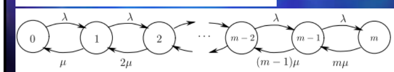
## *Continuos Time Markov Chain*

- *M/M/m /m queueing system*




$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{\lambda^n}{(\mu)(2\mu)\cdots(n\mu)}\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\right]^{-1}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$$




$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{if } 0 \le n < m \\ 0 & \text{if } n \ge m \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu \quad \text{for all } n = 1, 2, \ldots, m$$

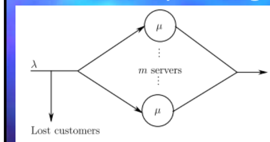
$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^j}{j!}} \dfrac{\rho^n}{n!} & \text{if } 0 \le n \le m \\ 0 & \text{if } n > m \end{cases}$$

QBM

Examples

## *Continuos Time Markov Chain*

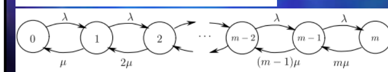
- *M/M/m /m queueing system*




**Blocking Probability**

$$P_B = \pi_m = \frac{\rho^m/m!}{\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^j}{j!}}$$

*Erlang B formula*

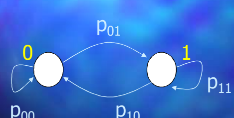



$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{if } 0 \le n < m \\ 0 & \text{if } n \ge m \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu \quad \text{for all } n = 1, 2, \ldots, m$$

## *Discrete Time Markov Chain*

- O comportamento de uma rede estocástica é representado por DTMC



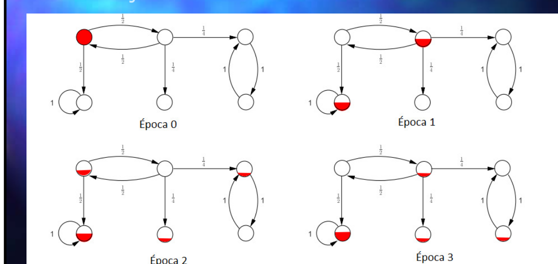

Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{c|cc|c} & 0 & 1 & \\ \hline & p_{00} & p_{01} & 0 \\ & p_{10} & p_{11} & 1 \end{array}$$

Mathematica

## *Discrete Time Markov Chain*

- Evolução de uma DTMC




## *Discrete Time Markov Chain*

- Estado transiente: um estado é transiente se a probabilidade de não se retornar ao estado é diferente de zero.
- Estado recorrente (*recurrent*): o estado i é chamado de recorrente se a probabilidade de se sair de i e retornar a i é 1.
- MRT (*mean recurrence time*): $\mu_i = \sum_{i=1}^{n} n \times f_{ii}(n)$

  $f_{ii}$ é a probabilidade de se retornar a *i* após *n* passos.

## *Discrete Time Markov Chain*

- Estado recorrente:
  - um estado é classificado como recorrente não-nulo se $\mu_i < \infty$ ,
  - caso contrário é classificado como recorrente nulo (*recurrent null*).
- Um período (*d*) de uma estado recorrente *i* é definido por:

$$d(i) = MDC = \{\ n \mid p_{i,i}(n) > 0\}$$

*Periodic DTMC*

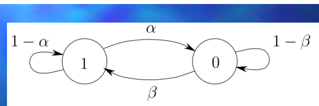
- Se d(i) =1, o estado i é aperiódico, se d(i)>1 é periódico.
- Um estado i é ergódico se é aperiódico e recorrente não-nulo.
- Uma DTMC é ergódica de todos os seus estados são ergódicos.

## Discrete Time Markov Chain

Mathematica

Considere uma máquina que pode estar em um dos dois estados, UP ou DOWN, onde 1 denota UP e 0 denota DOWN. O estado do máquina é verificada a cada hora, e nós horas de índice k = 0, 1,. .

Consideremos que se a máquina estiver UP, tem uma probabilidade α de falhar durante a próxima hora. Se a máquina estiver no estado DOWN, tem probabilidade β de sere reparada durante a próxima hora.




$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

*Chamar o modelo C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl*

## Discrete Time Markov Chain

- Soluções para *Steady-States*

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} A_1=(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}) \\ A_2=(a_{21}\ a_{22}\ a_{23}) \\ A_3=(a_{31}\ a_{32}\ a_{33}) \end{matrix}$$

$a_{ij}$ - probabilidade $\qquad \sum_{si \in S} a_{ij}=1$

$\Pi \cdot P = \Pi$ , $\quad \sum_{si \in S} \pi_i=1$, onde $\pi_i$ fornece o número relativo de visitas ao estado $s_i$

*Chamar o modelo C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\dtmc1.rgl*

## Discrete Time Markov Chain

Mathematica

- Soluções para Transiente

$\Pi(1)= \Pi(0)\, P$,

$\Pi(2)= \Pi(1)\, P = \Pi(0)\, P^2$

$\Pi(k)= \Pi(0)\, P^n$ , k=1,2,...

## Discrete Time Markov Chain

**Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains**

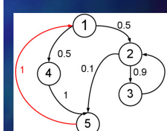
More specifically, the Control Flow Graph (CFG) of the application is mapped into an ergodic DTMC. In this approach, energy consumption as well as execution time are numerically evaluated.

```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else {  //  <0.5>
     x = 0;
   }

}
```

**Modeling.** Each basic block[1] $B_i$ in the CFG is mapped into a state $X_i$ in the DTMC. Similarly, control flow edges are mapped as transitions between states and are labeled by the state transition probabilities, as:

$$P(B_i, B_j) = Pr(B_i \; jumps \; to \; B_j) \; ,$$

which defines the probability of executing $B_j$ after $B_i$.




## Discrete Time Markov Chain

Mathematica

Outro exemplo

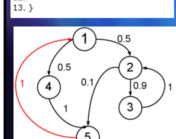
**Mapping Applications to Discrete Time Markov Chains**

```
int main() {
   int x,y

   if (x< 10) // <0.5>
   {
      for(y=0; y<10; y++) { // <9>
       x++;
      }
   } else {  //  <0.5>
     x = 0;
   }

}
```

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$0 \le p_{ij} \le 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \text{ for each } i.$$

*Excel e abrir também o SHARPE:* *C:\Users\Paulo\Dropbox\Models\Models_SHARPE\ext_dtmc.mkv )*




$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$$

$$v_j = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

$$E = \sum_{\substack{b=all \\ basic \\ blocks}} v_b \times ( \sum_{\substack{c=all \\ instruction \\ classes}} I_{b,c} \times (e_c + O_b \times e_o))$$

$$T = \sum_{\substack{b=all \\ basic \\ blocks}} v_b \times ( \sum_{\substack{c=all \\ instruction \\ classes}} I_{b,c} \times (t_c + O_b \times t_o))$$

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$ , $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

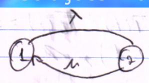
Onde $\pi_{si}(t)$ é probabilidade de se estar na estado $s_i$ no instante t

Métodos de Solução:

- Solução via Sistemas de Eq. Diferencial Ordinária
- Solução através de transformada de Laplace
- Runge-Kutta
- Uniformização (Transformar CTMC em DTMC)

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes (*Laplace Tranform*)




Find transient solution through LT.

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} + \lambda \pi_1(t) - \mu \pi_2(t) = 0 \quad (I)$$

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu \pi_2(t) - \lambda \pi_2(t) = 0 \quad (II)$$

by LT: $\frac{d\pi_1(t)}{dt} = s\,LT[\pi_1(t)] - \pi_1(0)$

## Continuos Time Markov Chain

Then, considering (I):

$s\,LT[\pi_1(t)] - \pi_1(0) + LT[\lambda\, \pi_1(t)] = LT[\mu\pi_2 ...$

$s\,LT[\pi_1(t)] - 1 + LT[\lambda] \times LT[\pi_1(t)] = LT[\mu ...$

Stop here for a while.

Let's consider (II):

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu\, \pi_2(t) - \lambda\, \pi_1(t) = 0$$

We know that $\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$,

then: $\pi_1(t) = 1 - \pi_2(t)$, so:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} + \mu\, \pi_2(t) - \lambda(1 - \pi_2(t)) =$$

## Continuos Time Markov Chain

Applying LT:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = s\,LT[\pi_2(t)] - \pi_2(0)$$

As $\pi_2(0) = 0$, then:

$$\frac{d\pi_2(t)}{dt} = s\,LT[\pi_2(t)].$$

Hence:

$s\,LT[\pi_2(t)] + LT[\mu\, \pi_2(t)] - LT[\lambda - \lambda\, \pi_2(t)] = 0$

$s\,LT[\pi_2(t)] + LT[\mu\, \pi_2(t)] - LT[\lambda] + LT[\lambda\, \pi_2(t)] = 0$

## Continuos Time Markov Chain

$s\,LT[\pi_2(t)] + \mu\, LT[\pi_2(t)] - \frac{\lambda}{s} - \lambda\, LT[\pi_2(t)] = 0$

$s\,LT[\pi_2(t)] + (\mu + \lambda) \times LT[\pi_2(t)] - \frac{\lambda}{s} =$

$LT[\pi_2(t)](s + \mu + \lambda) = \frac{\lambda}{s}$

$$\boxed{LT[\pi_2(t)] = \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}}$$

$\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$

$LT[\pi_1(t) + \pi_2(t)] = LT[1]$

$LT[\pi_1(t)] + LT[\pi_2(t)] = \frac{1}{s}$

$LT[\pi_1(t)] = \frac{1}{s} - \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}$

## Continuos Time Markov Chain

As $LT[\pi_2(t)] = \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}$,

then applying $L^{-1}[LT[\pi_2(t)]] =$

so:

$$\pi_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right]$$

We may say that, there are A and B, that:

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+\mu+\lambda}\right]$$

So

$$\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\mu+\lambda}$$

$\lambda = A(s+\mu+\lambda) + B\,s$

## Continuos Time Markov Chain

$\lambda = s(A+B) + A(\mu+\lambda)$

for $s = 0$

$$\boxed{A = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$$

then

$\lambda = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(s + \mu + \lambda) + B\,s$

$\lambda = \frac{\lambda s}{\mu+\lambda} + \lambda\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right) + B\,s$

$\lambda = \frac{\lambda s}{\mu+\lambda} + \lambda\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu+\lambda}\right) + B\,s$

$$\boxed{B = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}}$$

## Continuos Time Markov Chain

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(\mu+\lambda)} + \frac{\lambda}{(s+\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda} \times \frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{\lambda}{\mu+\lambda} \times \frac{1}{s+\mu+\lambda}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)}$$

## Continuos Time Markov Chain

$$\pi_2(t) = L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)}\right] = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}(1+\ldots$$

$$\pi_1(t) + \pi_2(t) = 1 \quad \therefore \quad \pi_2(t)$$

$$\pi_1(t) = 1 - \pi_2(t), \text{ then}$$

$$\pi_1(t) = 1 - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 + e^{-(\mu+\lambda)t}\right.$$

$$\pi_1(t) = \frac{\mu + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda}}{\mu+\lambda}\left(1 + e^{-(\mu+\lambda)t}\right.$$

## Continuos Time Markov Chain

$$\boxed{\pi_1(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}$$

$$\boxed{\pi_2(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)}$$

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q$ , $\Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt}$

Pela série de Taylor/MacLaurin, temos:

$e^{Qt} = I + Qt/1! + (Qt)^2/2! + (Qt)^3/3! + \ldots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\sum_{k=0}^{\infty} (Qt)^k/k!$

- Problemas de arrendodamento ocorrem devido aos valores positivos e negativos que Q contém.
- A matriz $(Qt)^k$ se torna não-esparsa o que requer capacidade muito maior.

Para evitar estes problemas aplica-se o método chamado de uniformização (ou aleatorização - *Randomization*) também chamado de método de Jensen

## Continuos Time Markov Chain

- Uniformização

CTMC


$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ii}|\}$

Considere que tomemos uma taxa uniforme $\lambda \geq \Lambda(i)$ onde:

$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$ $(\lambda - \Lambda(i) = \nu)$

e $\nu \geq 0$ é a taxa de arbitrária de um evento fictício que não muda o estado *i*.

Tempo de permanência no estado i:

$1/(-q_{ii}) = 1/\Lambda(i)$

Sabe-se também que:

$p_{ij} = q_{ij}/\Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik}/\Lambda(i)$

## Continuos Time Markov Chain

- Uniformização


$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$

Sabe-se também que:

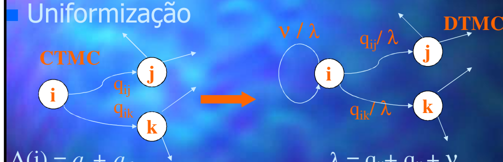
$p_{ij} = q_{ij} / \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik} / \Lambda(i)$

Em todos os estados na CMTC que tiverem tempo de permanência igual a $1/(-q_{ii})$, não teremos transição (auto-laço) na DTMC. Para os estados que tiverem tempo de permanência maior, ou seja uma época não é longa o suficiente, estes estados devem ser revisitados (auto-laço).

Tempo de permanência no estado i:
$\Delta t = 1/(-q_{ii}) = 1/\Lambda(i)$

## Continuos Time Markov Chain

- Uniformização




$\Lambda(i) = q_{ij} + q_{ik}$

$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$

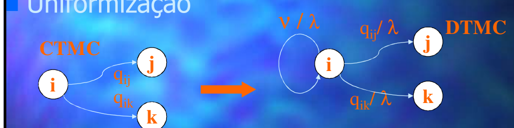
Sabe-se também que:

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$

$p_{ij} = q_{ij} / \Lambda(i)$ e $p_{ik} = q_{ik} / \Lambda(i)$

## Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



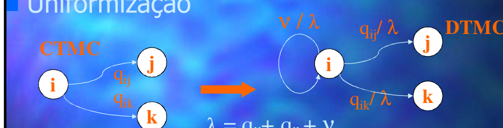

$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$

- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{-q_{ij}\}$

## Continuos Time Markov Chain

- Uniformização



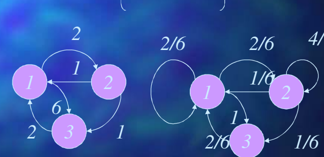

- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$

$\lambda = q_{ij} + q_{ik} + \nu$
$\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{-q_{ij}\}$

Outra interpretação:
Considerando $1/\lambda = \Delta t$ como uma época (time-step), $P = I + Q\,\Delta t$ que é igual aos dois primeiros termos da expansão de Taylor, portanto a cadeia uniformizada é uma aproximação de primeira ordem da CTMC.

## Continuos Time Markov Chain

- Uniformização
- $Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $P = I + Q/\lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \geq \max_{\forall si \in S}\{|q_{ij}|\}$




## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)e^{\lambda(P-I)t}$
$= \Pi(0)e^{\lambda Pt}e^{-\lambda It} = \Pi(0)e^{\lambda Pt}e^{-\lambda t} =$

$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} e^{\lambda Pt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda Pt)^n/n! =$

$\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n!\ ,\ n \in \aleph$

Na matriz P os valores estão entre 0 e 1. Não há valores negativos, o que evita os erros de arrendodamento que ocorrem na expansão com a matriz Q.

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\Pi(0)e^{Qt} = \Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda t)^n P^n/n! \;,\; n\in \aleph$$

$$\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n! \;,\; n\in \aleph$$

$$\Pi(t)=\Pi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)P^n \;,\; n\in \aleph$$

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \Pi(0)P^n \;,\; n\in \aleph$$

Uma solução iterativa:

$$\Pi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n) \;,\; n\in \aleph$$

$$\hat{\Pi}(0)= \Pi(0),\quad \hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P \;,\; n\in \aleph$$

Podemos truncar a série de maneira que a se atinja uma exatidão $1-\varepsilon$ ($\varepsilon$ = erro).

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

$$\tilde{\Pi}(t)=\sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n)\, \hat{\Pi}(n) \;,\; n\in \aleph$$

$$|| \Pi(t)- \tilde{\Pi}(t)||_\infty = ||[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda P t)^n/n!] -$$

$$[\Pi(0)\, e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda P t)^n/n! ]||_\infty \le$$

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! \le \varepsilon$$

A desiguladade ocorre, pois $[P^n]_{ij}$ são menores ou iguais a um.

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transientes

Dado que $\psi(\lambda t,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n!$ é uma distribuição discreta (Poisson), portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\lambda t,n) =1 = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t,n) + \sum_{n=ke+1}^{\infty}\psi(\lambda t,n) \;,\; n\in \aleph$$

Do slide anterior, tem-se:

$$\boxed{\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! \le \varepsilon}$$ Desta forma:

$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! = [1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n!] \le \varepsilon$$

## Continuos Time Markov Chain

- Soluções Transiente

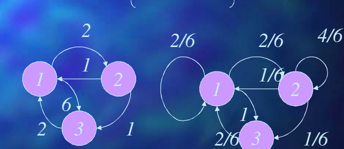
$$\sum_{n=ke+1}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! = [1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! ] \le \varepsilon$$

$$\sum_{n=0}^{ke} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n/n! \ge 1- \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \ge (1- \varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)
- $Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $P = I + Q/ \lambda$
- $Q = \lambda(P - I)$
- $\lambda \ge \max_{\forall s_i\in S}\{|q_{ij}|\}$




- *Considere $\varepsilon=10^{-4}$*

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \geq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

*Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$*

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

| t | 0.1 | 0.2 | 0,5 | 1 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ke | 5 | 7 | 11 | 17 | 52 | 91 | 163 | 367 | 693 |

Dado $\lambda = 6$ e considerando $\varepsilon = 10^{-4}$

Para $t = 0.1$, tem-se: $(1-\varepsilon)\, e^{\lambda t} = (1-10^{-4})\, e^{0.6} = 1{,}8219$

$$\sum_{n=0}^{ke} (\lambda t)^n/n! \geq (1-\varepsilon)\, e^{\lambda t}$$

$$\sum_{n=0}^{4} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8214,$$

$$\sum_{n=0}^{5} (0{,}6)^n/n! = 1{,}8221,$$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

| t | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ke | 5 | 7 | 11 | 17 | 52 | 91 | 163 | 367 | 693 |

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(\lambda t, n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n! \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\tilde{\Pi}(t) = \sum_{n=0}^{ke} \psi(\lambda t, n)\, \hat{\Pi}(n) \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

| t | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 1 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ke | 5 | 7 | 11 | 17 | 52 | 91 | 163 | 367 | 693 |

Para $t = 0{,}1 \Rightarrow ke = 5$ Portanto:

$\hat{\Pi}(0) = \Pi(0) = (1,0,0)$ obtêm-se:

$\hat{\Pi}(1)$, $\hat{\Pi}(2)$, $\hat{\Pi}(3)$, $\hat{\Pi}(4)$, $\hat{\Pi}(5)$ através de

$\hat{\Pi}(n) = \hat{\Pi}(n-1)P$ , $n \in \{1,2,3,4,5\}$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

| t | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ke | 5 | 7 | 11 | 17 | 52 | 91 | 163 | 367 | 693 |

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$$\psi(0.6, n) = [e^{-0.6}(0.6)^n]/n! \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6, n)\, \hat{\Pi}(n) \quad , n \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

| t | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ke | 5 | 7 | 11 | 17 | 52 | 91 | 163 | 367 | 693 |

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t}(\lambda t)^n]/n!$ , $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\psi(0.6,0) = [e^{-0,6}(0,6)^0/0!]$

$\psi(0.6,1) = [e^{-0,6}(0,6)^1/1!]$

$\psi(0.6,2) = [e^{-0,6}(0,6)^2/2!]$

$\psi(0.6,3) = [e^{-0,6}(0,6)^3/3!]$

$\psi(0.6,4) = [e^{-0,6}(0,6)^4/4!]$

$\psi(0.6,5) = [e^{-0,6}(0,6)^5/5!]$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

| t | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ke | 5 | 7 | 11 | 17 | 52 | 91 | 163 | 367 | 693 |

Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\psi(0.6,n) = [e^{-\lambda t} (\lambda t)^n]/n!$ , $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$ , $n \in \{1,2,3,4,5\}$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)

| t | 0.1 | 0.2 | 0.5 | 1 | 5 | 10 | 20 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ke | 5 | 7 | 11 | 17 | 52 | 91 | 163 | 367 | 693 |

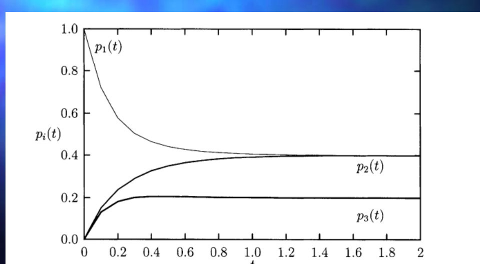
Para $t = 0.1 \Rightarrow ke = 5$

$\tilde{\Pi}(0.1) = \sum_{n=0}^{5} \psi(0.6,n)\, \hat{\Pi}(n)$ , $n \in \{1,2,3,4,5\}$

$\tilde{\Pi}(0.1) = (0.71, 0.1502, 0.1268)$

## Continuos Time Markov Chain

- Solução Transiente (exemplo)




## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Considere uma DTMC, contudo também considere um tempo de permanência (no domínio contínuo: $t \in \mathbb{R}$), em cada estado $i \in S$ da DTMC, com distribuição $F_i(t)$ e densidade $f_i(t)$.
- Este modelo é denominado SMC.

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- SMC é caracterizada por:
  - matriz de probabilidade de 1 passo ($P$),
  - vetor de probabilidade inicial ($\Pi(0)$) e
  - o vetor de distribuições de permanência nos estados ($F(t) = (F_1(t),\ldots,F_i(t),\ldots,F_{|S|}(t))$).

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Interpretação
  - Em cada instante em que ocorrem mudanças de estados, a SMC tem comportamento igual ao da correspondente DTMC (comportamento descrito por $P$) e é independente do passado.
  - Quando se alcança um estado $i$, um tempo distribuído conforme $F_i(t)$ deve se passar para que ocorra nova transição entre estados.

## Semi-Markovian Chain (SMC)

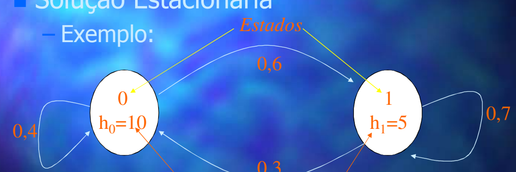
- Solução Estacionária
  - Encontre a solução estacionária para DTMC embutida (caracterizada por P):
    - $\Omega P = \Omega$
    - $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
  - Calcule o tempo médio de permanência ($h_i$) em cada estado $i$:
    - $h_i = \int_0^\infty t\, f_i(t)dt$

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - A probabilidade de estado estacionário da SMC é obtida por:
    - $\pi_i = (\omega i \times h_i) / (\sum_{\forall j \in S} \omega_j \times h_j), \ \forall i$
  - Em muitas aplicações, $h_i$ é fornecido diretamente.
- Solução transiente é mais sofisticada.

## Semi-Markovian Chain (SMC)

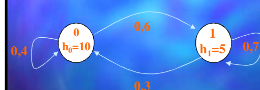
- Solução Estacionária
  - Exemplo:




- $\Omega P = \Omega$
- $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
- $h_0=10,\ h_1=5$

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:



Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1 \end{array}$$

- $\Omega P = \Omega$
- $\sum_{\forall i \in S} \omega_i = 1$
- $h_0=10,\ h_1=5$

$\rightarrow$ $\omega_0=0{,}5385$, $\omega_1=0{,}4615$

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:

Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1 \end{array}$$

- $\omega_0=0{,}5385$
- $\omega_1=0{,}4615$

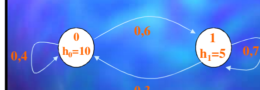
$\pi_i = \dfrac{(\omega i \times h_i)}{(\sum_{\forall j \in S} \omega_j \times h_j)}, \forall i \in S$

$$\pi_0 = \frac{(0{,}5385 \times 10)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)}$$

$$\pi_1 = \frac{(0{,}4615 \times 5)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)}$$

## Semi-Markovian Chain (SMC)

- Solução Estacionária
  - Exemplo:



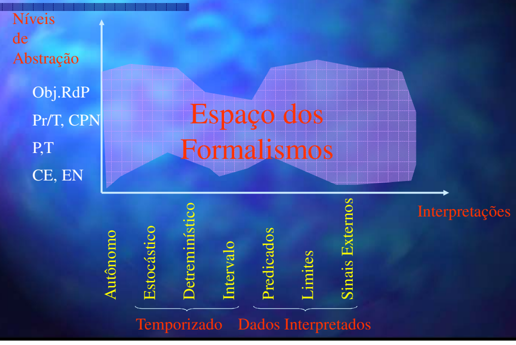
Matriz de Propabilidades de Próximo Estados

$$P = \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1 \end{array}$$

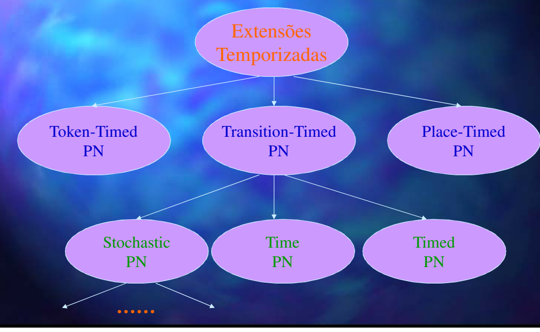
$$\pi_0 = \frac{(0{,}5385 \times 10)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)} = 0{,}7$$

$$\pi_1 = \frac{(0{,}4615 \times 5)}{(0{,}5385 \times 10) + (0{,}4615 \times 5)} = 0{,}3$$

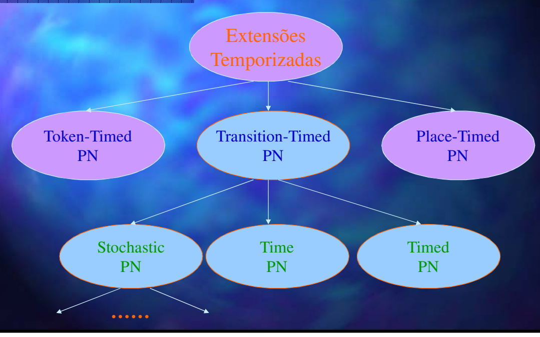
## Redes de Petri




## Redes Temporizadas




## Redes Temporizadas




## Redes Temporizadas

- Ramchandani, 1973 - Transition Timed Net
- Merlin, 1976 - Transition Time Net
- Sifakis, 1977 - Place Timed Net

## Redes Temporizadas Estocásticas

- Natkin -1980
- Molloy - 1981
- Marsan et al. - 1984

É uma rede temporizada onde o *delay* associado à transição é uma variável aleatória de distribuição exponencial

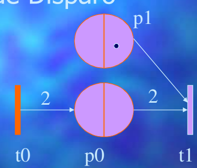
## Redes Temporizadas

- Redes de Petri com Lugares Temporizados (PTPN) (Sifakis77)
- Definição: PTPN=$(P,T,F,K,W,M_0,\Gamma,\upsilon)$, onde

P é o conjunto de lugares,
T o conjunto de transições,
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ uma relação que representa os arcos
W – Valoração (peso dos arcos) - W: $F \rightarrow N$
$M_0$- Marcação inicial - $M_0$:$P \rightarrow N$
$\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_i,...\}$ números reais denominada base de tempo.
$\upsilon$:$P \rightarrow \Gamma$ um mapeamato que $\upsilon(p) = \gamma_j$

## Redes Temporizadas - PTPN -

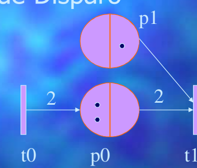
- Regra de Disparo




$\upsilon(p0) = 3$

## Redes Temporizadas - PTPN -

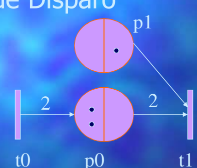
- Regra de Disparo




$\upsilon(p0) = 3$ Instante=0

## Redes Temporizadas - PTPN -

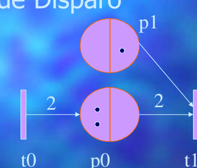
- Regra de Disparo




$\upsilon(p0) = 3$ Instante=1

## Redes Temporizadas - PTPN -

- Regra de Disparo




$\upsilon(p0) = 3$ Instante=2

## Redes Temporizadas - PTPN -

- Regra de Disparo


$\upsilon(p0) = 3$ Instante=3

## Redes de Petri Temporizadas - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Marcas são consumidas dos lugares de entrada
    - Há uma duração
    - Marcas são geradas no lugares de saída
  - Disparo atômico
    - As marca permanecem nos lugares de entrada pelo período igual ao *delay* associada à transição. Após o *delay* as marcas são consumidas e geradas nos lugares de saída imediatamente.

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Duração (disparo em três fases)
    - Pode ser representada por uma rede com disparo atômico
    - Modelo mais compacto
    - O estado é uma informação mais complexa do que o modelo não-temporizado
  - Disparo atômico
    - Pode representar o modelo com duração
    - O conjunto de marcações alcançáveis é um sub-conjunto das marcações do modelo não-temporizado.

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

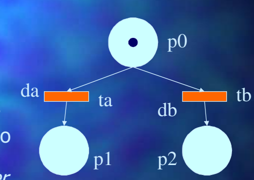
- Conceitos Básicos:
  - Regras de Seleção:
    - Pré-seleção: (duração e *delay*)
      - Prioridade
      - Probabilidade
    - *Race* (corrida): (*delay*)
      - Transições habilitadas com menor *delay* são disparadas

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Quando uma das transições conflitantes é desabilitada pelo disparo da outra, o que acontece com o *timer* da que ficou desabilitada quando a mesma tornar-se habilitada outra vez?

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Como fica a memorização do tempo de habilitação anterior?
- *Continue*
  - O *timer* associado à transição mantem o valor atual e quando a transição se tornar novamente habilitada o valor do *timer* iniciará daquele valor.




- *Restart*
  - Quando a transição for novamente habilitada o *timer* será re-iniciado.

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - O que acontece com o *timer* das transições habilitadas após o disparo de uma transição?
    - Todas as transições. Não somente as transições conflitantes.

**•Algumas políticas de memória podem ser construídas**

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Resampling*
    - Após cada disparo os *timers* de TODAS as transições são re-iniciado (*restart*)
    - Não há memória
    - Após descartar todos os *timers*, os valores iniciais são associados a todas as transições que se tornarem habilitadas na nova marcação.

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

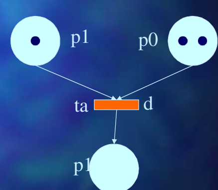
- Conceitos Básicos:
  - *Enabling Memory*
    - Após cada disparo os *timers* das transições que ficaram desabilitadas são re-iniciados (*restart*)
    - As transições que permaneceram habilitadas com o disparo matêem seus valores presentes(*continue*)

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Age Memory*
    - Após cada disparo os *timers* de todas as transições são mantidos em seus valores presentes (*continue*)

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Grau de Habilitação (*Enabling Degree*)
    - É o número de vezes que uma determinada transição pode ser disparada, numa determinada marcação, antes de se torna desabilitada.
    - Quando o grau de habilitação é maior que um, atenção especial à semântica de temporização deve ser considerada.

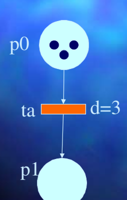


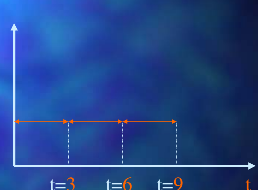

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - Semântica de Temporização
    - *Single-server firing semantics*
    - *Infinite-server firing semantics*
    - *Multiple-server firing semantics*
      - K é o máximo grau de paralelismo. Quando $k \rightarrow \infty$ , *Multiple-server firing semantics* é igual a *infinite-server firing semantics.*

## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

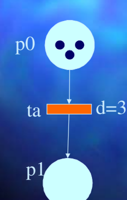
- Conceitos Básicos:
  - *Single-server firing semantics*

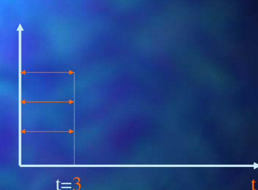



## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

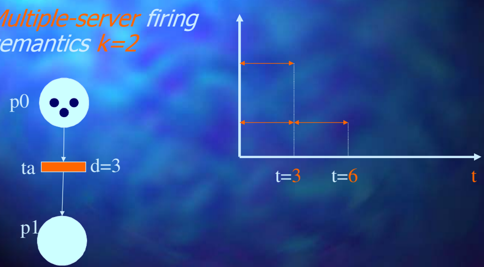
- Conceitos Básicos:
  - *Infinite-server firing semantics*



## Redes de Petri Temporizadas
### - Tempo Associado às Transições -

- Conceitos Básicos:
  - *Multiple-server firing semantics k=2*




## Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho


## Redes com Arco Inibidor

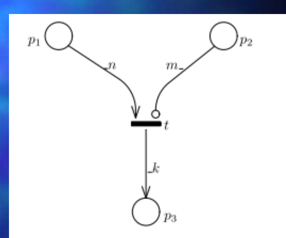
- Definição:

$PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$M_0$- Marcação inicial – $M_0: P \rightarrow \aleph$




## Redes com Prioridade

- Definição:

$PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$

P,T,I,O definidos como usualmente.

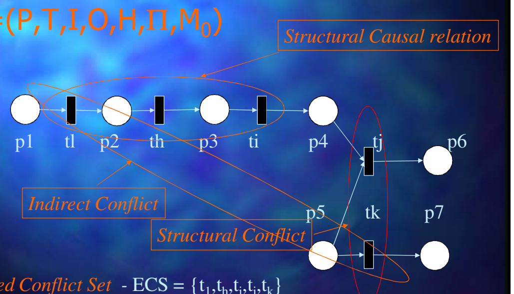
$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores

$\Pi : T \rightarrow \aleph$ é uma função que mapeia às transições níveis de prioridade.

$M_0$- Marcação inicial - $M_0: P \rightarrow \aleph$

## Redes com Prioridade

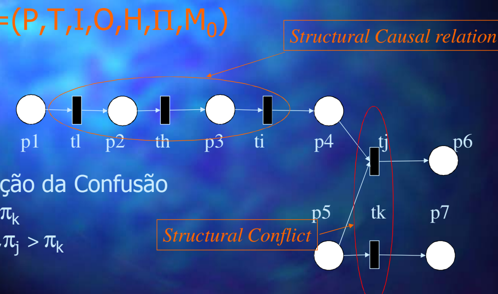
- $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$




*Extended Conflict Set* - ECS = $\{t_l,t_h,t_i,t_j,t_k\}$

## Redes com Prioridade

- $PN=(P,T,I,O,H,\Pi,M_0)$




Remoção da Confusão
- $\pi_l = \pi_k$
- $\pi_h,\pi_i,\pi_j > \pi_k$

## Redes Estocásticas

$$SPN = (P, T, I, O, H, \Pi, G, M_0, Atts)$$

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ is the set of places,
$T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ is the set of transitions,
$I \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking-dependent multiplicities of input arcs
$O \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking dependent multiplicities of output arcs.
$H \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N})^{n \times m}$ is a matrix of marking-dependent inhibitor arcs.

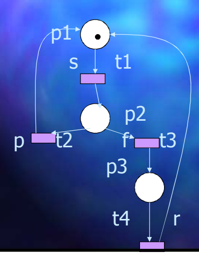
## Redes Estocásticas

$$SPN = (P, T, I, O, H, \Pi, G, M_0, Atts)$$

$\Pi \in \mathbb{N}^m$ is the priority vector
$G \in (\mathbb{N}^n \rightarrow \{true, false\})^m$ is the guard vector
$M_0 \in \mathbb{N}^n$ is the initial marking vector
$Atts = (Dist, W, Markdep, Policy, Concurrency)^m$
$Dist \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathcal{F}$ is a firing probability distribution
$W : T \rightarrow \mathbb{R}$ *is a function that assigns weight to imediate transitions and delay to time timed transitions*
$Markdep \in \{constant, enabdep\}$
$Policy \in \{prd, prs\}$ is the preemption policy
$Concurrency \in \{ss, is\}$

## Redes Estocásticas

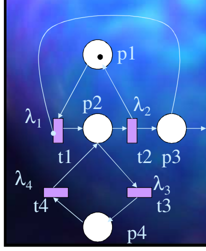
- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,$M_0$)




P é o conjunto de lugares,
T o conjunto de transições,
I: P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,
O : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições
W : T → ℜ+ (ou W : T×M → ℜ+) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições
$M_0$- Marcação inicial - $M_0$: P → ℵ

## Redes Estocásticas

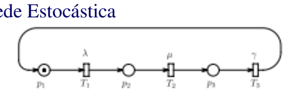
- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,H,W,$M_0$)



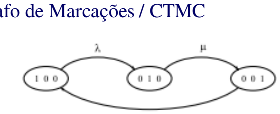

P é o conjunto de lugares,
T o conjunto de transições,
I: P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pré-condições,
O : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam as pós-condições
H : P×T → ℵ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores
W : T → ℜ+ (ou W : T×M → ℜ+) é uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições
$M_0$- Marcação inicial - $M_0$: P → ℵ

## Redes Estocásticas

Rede Estocástica



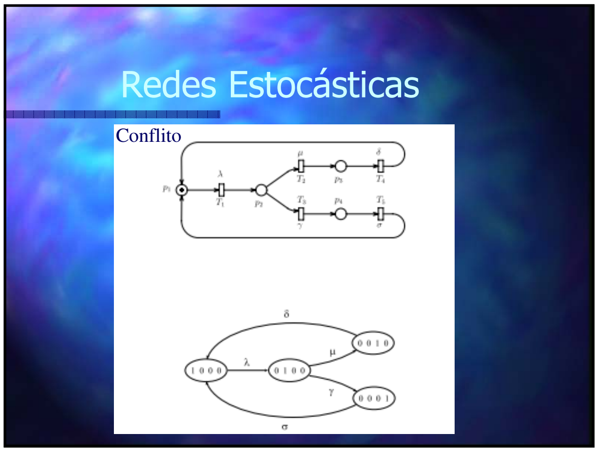
Grafo de Marcações / CTMC

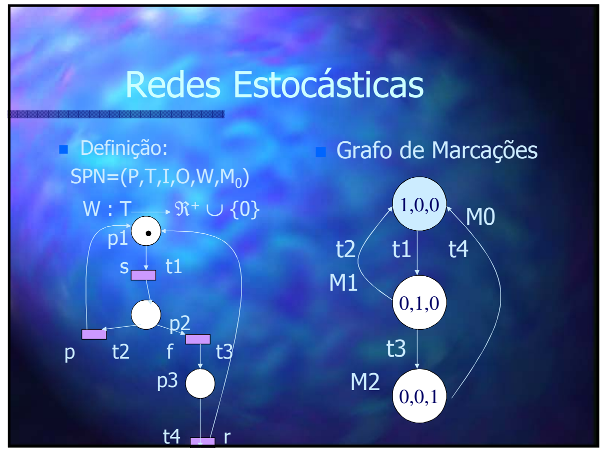


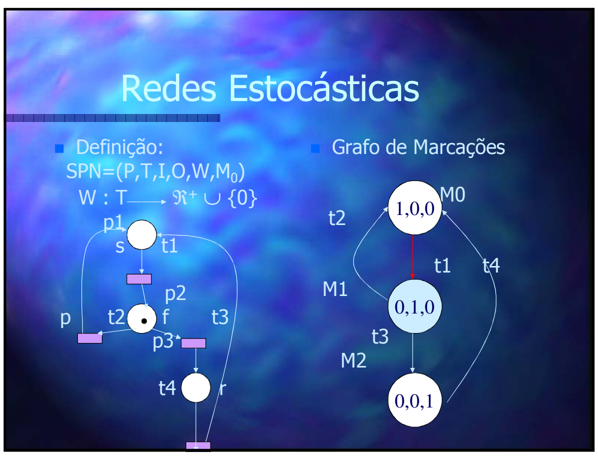

## Redes Estocásticas

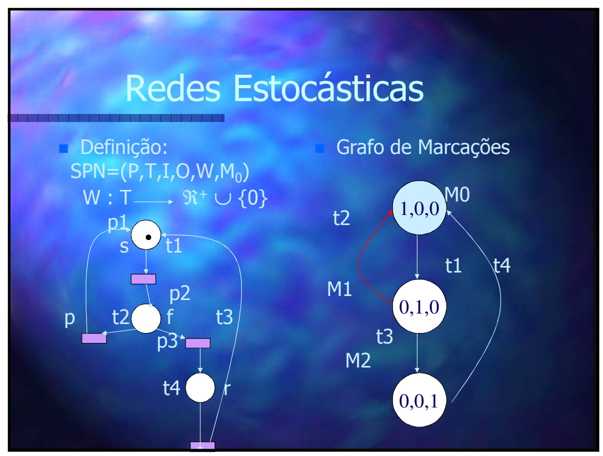
**Semântica de Disparo de Transição**

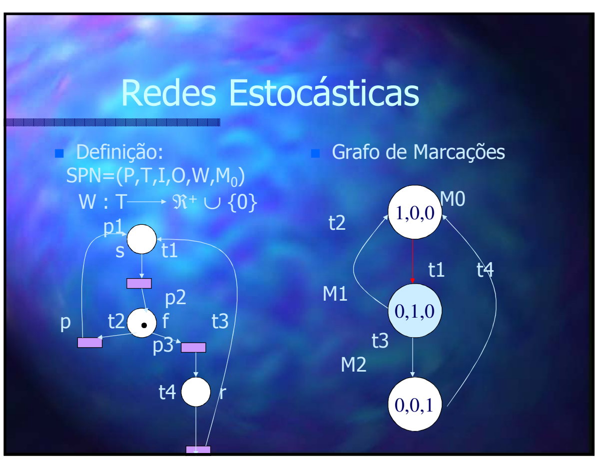
- Uma transição $t_j$ é disparável se estiver habilitada
  - Regras de habilitação
    M[$t_j$ > ,  M(pi) ≥ I(pi, $t_j$)
    ∀ pi ∈P
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- *Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo
  Se M[$t_j$ >M'
  M'(pi)=M0(pi) - I(pi, $t_j$)+O(pi, $t_j$), ∀ pi ∈P

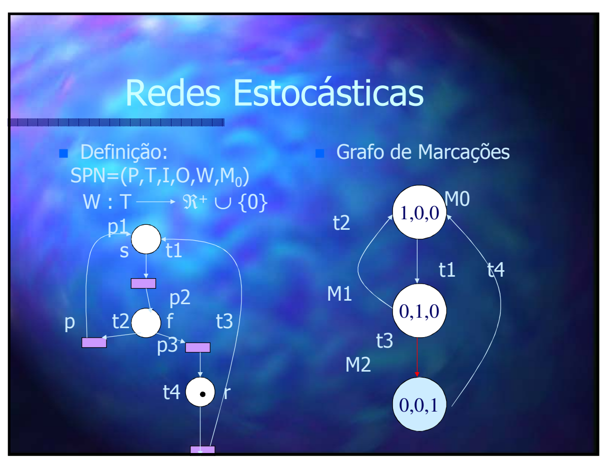

Redes Estocásticas
Conflito
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
1,0,0
M0
t2
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
1,0,0
M0
t2
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1

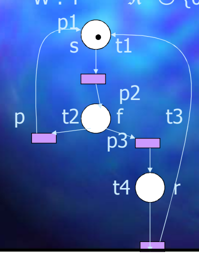

Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
1,0,0
M0
t2
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1


Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
1,0,0
M0
t2
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1

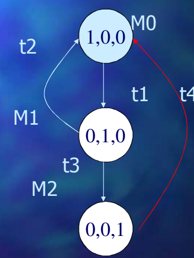

Redes Estocásticas
Definição:
SPN=(P,T,I,O,W,M0)
W : T → ℜ+ ∪ {0}
p1
s
t1
p2
p
t2
f
t3
p3
t4
r
Grafo de Marcações
1,0,0
M0
t2
t1
t4
M1
0,1,0
t3
M2
0,0,1

## Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,$M_0$)
  $W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$

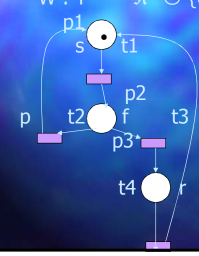



- Grafo de Marcações

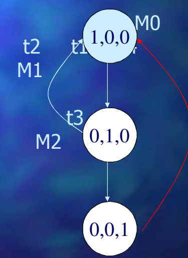



## Redes Estocásticas

- Definição:
  SPN=(P,T,I,O,W,$M_0$)
  $W : T \longrightarrow \Re^+ \cup \{0\}$

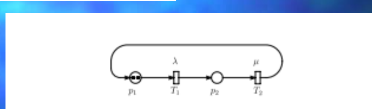


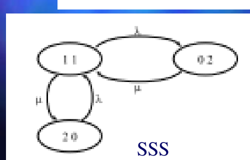

- Grafo de Marcações

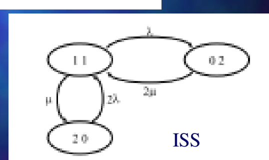



## Redes Estocásticas

Semântica de Temporização






## Redes Estocásticas

- Em geral, a CTMC associada a uma SPN é obtida da seguinte maneira:
  - O espaço de estados $S = \{s_i\}$ corresponde ao *reachability set* $RS(N,M_0) = \{M_i\}$ da rede marcada N.
  - As *transition rates* de cada estado $s_i$ (corresponde a marcação $M_i$) para cada estado $s_j$ ($M_j$) são obtidas pela soma de todas as *firing rates* associadas às transições que estão habilitadas em $M_i$ e cujo disparo levam a $M_j$.

## Redes Estocásticas

- Assumindo-se que todas as transições operam em *Single Server Semantics* (SS) e taxas (*rates*) independentes da marcação, tem-se:
- $q_{ij} = \begin{cases} \sum_{tk \in ej(Mi)} \omega_k & i \neq j \\ -\,q_i & i = j \end{cases}$

onde $Q = [q_{ij}]$ gerador infinitesimal (matriz de taxas)

$q_i = \sum_{tk \in e(Mi)} \omega_k$

$\omega_k$ é a taxa de disparo de $t_k$.

$e_j(M_i) = \{t_k \mid t_k \in e(M_i) \wedge M_i[t_k>M_j\}$ é o conjunto de transições que estão hablitadas em $M_i$ e cujo disparo levam a $M_j$.

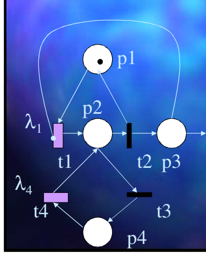
$e(M_i)$ conjunto de transições habilitadas em $M_i$.

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Definição:
  GSPN=(P,T,I,O,H,Π,W,$M_0$)

P,T,I,O definidos como usualmente.

$H : P \times T \rightarrow \aleph$ é a função de mapeamento de que representam os arcos inibidores




$\Pi : T \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ for temporizada} \\ \aleph^+ & \text{se } t \text{ for imediata} \end{cases}$
(Prioridade)

$W : T \rightarrow \Re^+$ (ou $W : T \times M \rightarrow \Re^+$) é

1. uma função que associa taxas de distribuição exponencial às transições temporizadas e
2. pesos usados na computação das probabilidades de disparo das transições imediatas

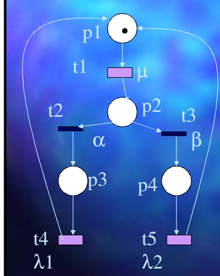
$M_0$- Marcação inicial - $M_0 : P \rightarrow \aleph$

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

**Semântica de Disparo de Transição**

- Regras de habilitação
  $M[t_j >$ , $M(pi) >= I(pi, t_j)$ e $M(pi) < H(pi, t_j)$
  $\forall\, pi \in P$
- Uma transição $t_j$ é disparável se estiver habilitada
- Transições com *delays* menores disparam primeiro (*Race*)
- Transições imediatas disparam instantaneamente com prioridades sobre as temporizadas
- Diferentes níveis de prioridade podem ser associados às transições imediatas.
- Transições imediatas com mesmo nível de prioridade associada disparam de acordo com o peso associado a cada uma.
- *Enabling memory, resampling, age memory*
- Regras de disparo
  Se $M[t_j > M'$
  $M'(pi) = M0(pi) - I(pi, t_j) + O(pi, t_j)$, $\forall\, pi \in P$

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)




*Reachability Set*

$RS = VS \cup TS$

$VS \cap TS = \varnothing$

VS – *Vanishing set:*

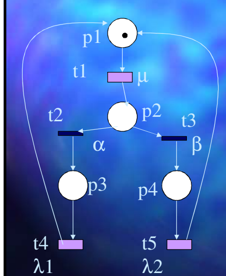
Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

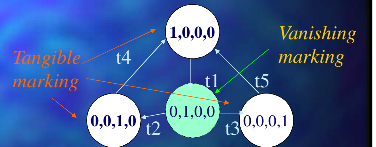
TS – *Tangible set:*

Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.

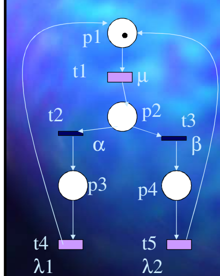
## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações




## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)




$P\{t_k|m_j\} = \omega_k/q_j$

$q_j = \Sigma_{tk \in e(Mi)}\, \omega_k$

$\omega_k$ é a taxa de disparo de $t_k$.

$e(M_j)$ conjunto de transições habilitadas em $M_j$.

Quando a marcação é *vanishing*, $\omega_k$ é um peso (transição imediata).

Quando a marcação é *tangible*, $\omega_k$ é a taxa.

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

Assumindo a ausência de confusão, o cálculo do ECS consiste em particionar as transições imediatas em conjuntos os quais as transição de cada conjunto possam estar em conflito.

Contudo, transições de diferentes ECS são concorrente.

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

Quando diversas transições imediatas estão habilitadas em uma mesma marcação (*vanishing*), decidir qual transição dispara só faz sentido quando na presença de conflito.

Quando transições de um único ECS são as únicas imediatas

$P\{t_k|m_i\} = \omega_k/w_k(m_i)$

$w_k(m_i) = \Sigma_{tj \in [ECS(tk) \wedge e(Mi)]}\, \omega_j$

Os pesos podem ser diferentes em diferentes marcações, mas a relação entre estes pesos é constante (sem confusão)

## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

*Reachability Set*

$RS = VS \cup TS$

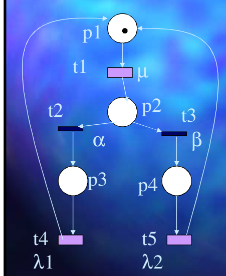
$VS \cap TS = \varnothing$

VS – *Vanishing set:*

Marcações em que as transições disparáveis são imediatas.

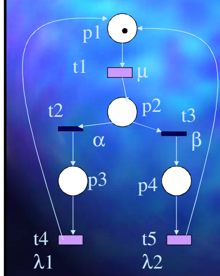
TS – *Tangible set:*

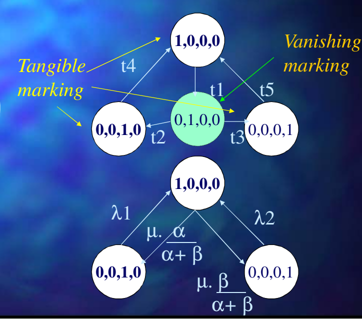
Marcações onde as transições habilitadas são temporizadas.




## Redes Estocásticas Generalizada (GSPN)

- Grafo de Marcações




## Redes Estocásticas

- Para garantir a existência de probabilidade estacionária, a rede deve ser:
- limitada *(bounded)*
- reversível e
- livre de bloqueio *(deadlock-free)*

$\Pi Q = 0, \ \sum_{Mi \in RS(N)} \pi_i = 1$

Probabilidade estacionária de uma marcação $M_i$

$(\pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots, \pi_n)\, Q = (0, \ldots, 0, \ldots, 0)$

$\sum_1^n \pi_i = 1$

## Redes Estocásticas

- Soluções Transientes

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \Pi(t)Q \ , \ \Pi(0) = (\pi_0(0), \ldots, \pi_{n-1}(0))$$

Uma solução formal para o sistema acima é:

$\Pi(t) = \Pi(0)e^{Qt}$

## Redes Estocásticas

- Dada $M_j \in TS(N)$, a probabilidade de se disparar $t_k$ ($t_k$ está habilitada em $M_j$) em $M_j$ é:

$p(t_k, M_j) = \lambda_k/\lambda_{j,}, \quad \lambda_j = \sum_{t \in Tj} \lambda_t$

$T_j = \{t \mid M_j\ [t>\}$

$\lambda_t$ é a taxa associada a transição $t$ através da $W$

## Redes Estocásticas

- Dadas $M_i \in VS(N)$, a probabilidade de se disparar $t_k$ em $M_i$ é:

$p(t_k, M_i) = \omega_k/\omega_k(M_i),$

$\omega_k(M_i) = \sum_{tj \in \{ECS(tk) \wedge Mi\ [tj>\}} \omega_j$

ECS(tk) – *Extended Conflict Set*

$\omega_k(M_i)$ o peso associado à transição $t_k$ na marcação $M_i$.

Caso haja mais de uma transição imediata, de diferentes ECS, habilitadas em uma marcação M, não importa a ordem de disparo, desde que a rede seja livre de confusão.

## Redes Estocásticas

- Tempo de permanência numa marcação *(sojourn time)*

$tm_j = 1/\lambda_j$

$\lambda_j = \Sigma_{t \in Tj} \lambda_t$

$T_j = \{t \mid M_j [t>\}$

$\lambda_t$ é a taxa associada a transição $t$ através da $W$

## Redes Estocásticas

- Probabilidade que um lugar $p_j$ tenha $k$ marcas

$p(pj,k) = \Sigma_{i \in S1} p_i$

$S_1 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i(p_j)=k\}$

- Número esperado de marcas no lugar $p_j$

$$Em(p_j) = \sum_{x=1}^{K} x .p(pj,x)$$

$K$ é o número máximo de marcas que o lugar $pj$ pode conter

## Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição temporizada

$TR(t_j) = \sum_{i \in S2} p_i \cdot \lambda_j$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- $p_i$ é a probabilidade estacionária de uma marcação $Mi$ que habilita $t_j$
- $\lambda_j$ é a taxa associada à transição $t_j$

## Redes Estocásticas

- Tempo médio entre disparos de uma transição

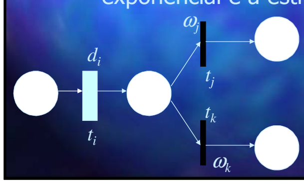
$T= 1/TR(t_j) = 1/(\sum_{i \in S2} p_i \cdot \lambda_j)$

$S_2 = \{ i \in \{1,2,..,S\} \mid M_i[t_j>\}$

- $p_i$ é a probabilidade estacionária de uma marcação $Mi$ que habilita $t_j$
- $\lambda_j$ é a taxa associada à transição $t_j$

## Redes Estocásticas

- *Throughput rate* de uma transição imediata
  - Pode ser calculada de uma transição exponencial e a estrutura do modelo GSPN.




$TR(t_j) = TR(t_i) \times (\omega_j / \omega_j + \omega_j)$

*tj e tk são as únicas transições de um ECS.*

## Redes Estocásticas

- *Littles's law*

$E[X] = \lambda E[s]$ (ergódico)

E[X] - tamanho médio da fila.

E[s] - Tempo médio de serviço do sistema.

$\lambda$ - taxa de chegada

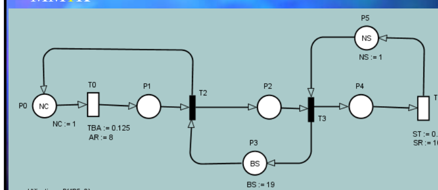
## Redes Estocásticas

- *Tempo médio de espera em um lugar*
  - $Wait(p_i) = \dfrac{Em(p_i)}{\sum_{tj \in I(pi)} TR(t_j)} = \dfrac{Em(p_i)}{\sum_{tj \in O(pi)} TR(t_j)}$
  - $Em(p_i)$ é o número médio de marcas no lugar $p_i$.
  - $TR(t_j)$ *throughput* da transição $t_j$.

## Redes Estocásticas

Representação explícita do descarte

MM1K




Utilization = P{#P5=0}
Throughput = P{#P4>0}*(1/ST)
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P4}
MST = (E{#P2}+E{#P4})*TBA
MQT = E{#P2}*TBA
DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}
DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}*AR

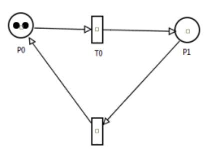
Utilization = 0.798513290494
Throughput = 7.985132904942
MQS = 3.036090276985
MSS = 3.834603567479
MST = 0.479325445935
MQT = 0.379511284623
DiscardProb = 0.001858386882
DiscardRate = 0.014867095058

```
λ = 8.; μ = 10.; n = 1; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```

| | |
|---|---|
| **Basic Properties** | |
| QueueNotation | M/M/1/20 |
| ArrivalRate | 8. |
| ServiceRate | 10. |
| UtilizationFactor | 0.798138 |
| Throughput | 7.98138 |
| ServiceChannels | 1 |
| SystemCapacity | 20 |
| InitialState | 0 |
| **Performance Measures** | |
| MeanSystemSize | 3.80451 |
| MeanSystemTime | 0.476673 |
| MeanQueueSize | 3.00637 |
| MeanQueueTime | 0.376673 |

## Redes Estocásticas

Throughput de transições *K-server semantics*




$TP(T0) = E\{\#P0\} \times \lambda$

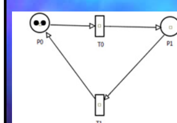
VALOR ESPERADO DO LUGAR DE ENTRADA DO T0.

$$Throughput(T_0) = \sum_{i=1}^{n} P\{EnablingDegree(T_0) = i\} \times i\lambda$$

Where $n$ is the highest enabling degree of $T_0$.

## Redes Estocásticas

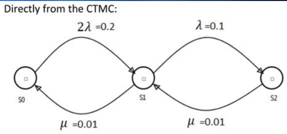
Throughput de transições *K-server semantics*




$Throughput(T_0) = \pi(s_0) \times 2\lambda + \pi(s_1) \times \lambda$
$Throughput(T_0) = P\{m(P_0) = 2\} \times 2\lambda + P\{m(P_0) = 1\} \times \lambda$
$Throughput(T_0) = P\{EnablingDegree(T_0) = 2\} \times 2\lambda + P\{EnablingDegree(T_0) = 1\} \times \lambda$

$TP(T_0) = P\{\#P0 = 2\} \times 0.2 + P\{\#P0 = 1\} \times 0.1 = 0.009954751$

Directly from the CTMC:



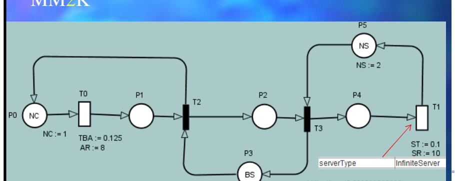

$\pi(s2)$=0.9049773755656109
$\pi(s1)$=0.09049773755656108
$\pi(s0)$=0.004524886877828055

$Throughput(T_0) = \pi(s_0) \times 2\lambda + \pi(s_1) \times \lambda = 0.009954751$

## Redes Estocásticas

Representação implícita do descarte

MM2K




Utilization = E{#P4}/NS
Throughput = E{#P4}*SR
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P4}
MST = (E{#P2}+E{#P4})*TBA
MQT = E{#P2}*TBA
DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}
DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS)}*AR

Utilization = 0.399999998492
Throughput = 7.999999969842
MQS = 0.152380897055
MSS = 0.95238089404
MST = 0.119047611755
MQT = 0.019047612132
DiscardProb = 3.77E-9
DiscardRate = 3.0158E-8

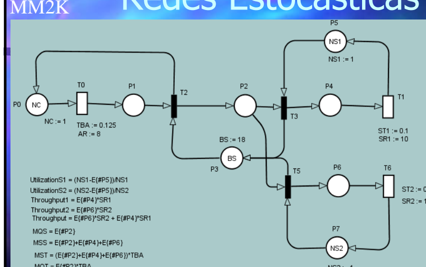
```
λ = 8.; μ = 10.; n = 2; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```

| | |
|---|---|
| **Basic Properties** | |
| QueueNotation | M/M/2/20 |
| ArrivalRate | 8. |
| ServiceRate | 10. |
| UtilizationFactor | 0.4 |
| Throughput | 8. |
| ServiceChannels | 2 |
| SystemCapacity | 20 |
| InitialState | 0 |
| **Performance Measures** | |
| MeanSystemSize | 0.952381 |
| MeanSystemTime | 0.119048 |
| MeanQueueSize | 0.152381 |
| MeanQueueTime | 0.0190476 |

## Redes Estocásticas

MM2K

Equivalente ao anterior. Servidores representados individualmente

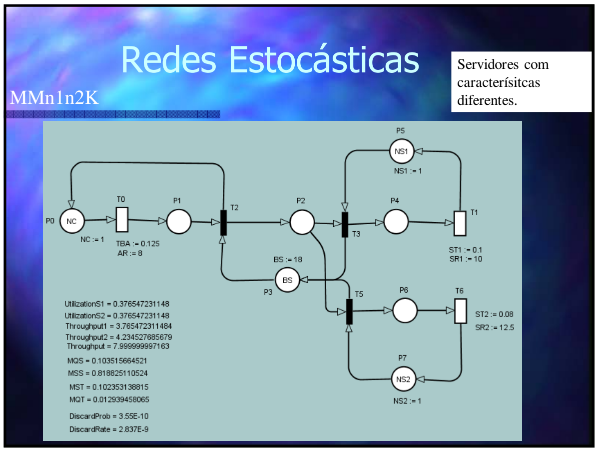


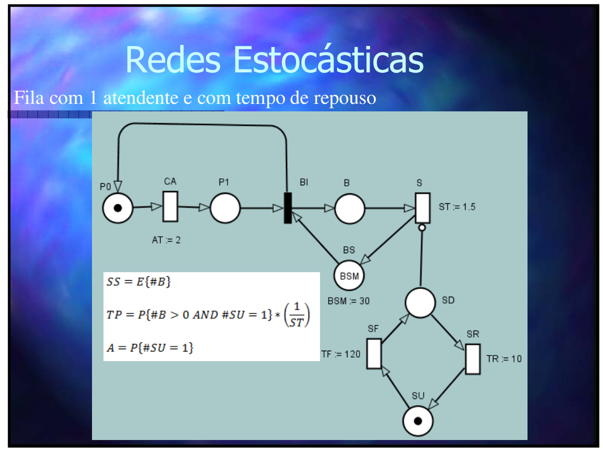

UtilizationS1 = (NS1-E{#P5})/NS1
UtilizationS2 = (NS2-E{#P5})/NS2
Throughput1 = E{#P4}*SR1
Throughput2 = E{#P6}*SR2
Throughput = E{#P6}*SR2 + E{#P4}*SR1
MQS = E{#P2}
MSS = E{#P2}+E{#P4}+E{#P6}
MST = (E{#P2}+E{#P4}+E{#P6})*TBA
MQT = E{#P2}*TBA
DiscardProb = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS1) AND (#P6=NS2)}
DiscardRate = P{(#P1=1) AND (#P2=BS) AND (#P4=NS1) AND (#P6=NS2)}*AR

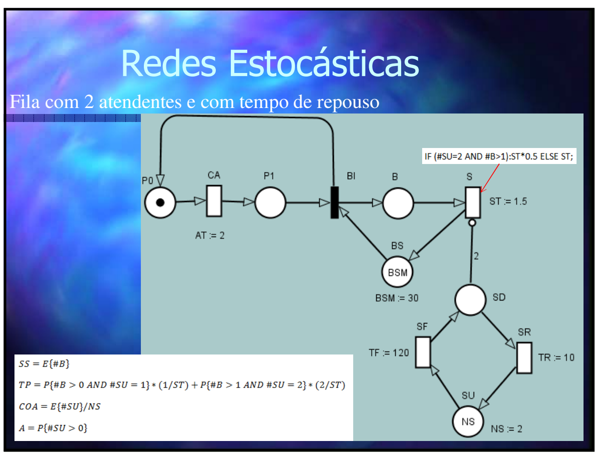
UtilizationS1 = 0.376547231148
UtilizationS2 = 0.338762214854
Throughput1 = 3.765472311484
Throughput2 = 4.234527685679
Throughput = 7.999999997163
MQS = 0.103515664521
MSS = 0.818825110524
MST = 0.102353138815
MQT = 0.012939458065
DiscardProb = 3.55E-10
DiscardRate = 2.837E-9

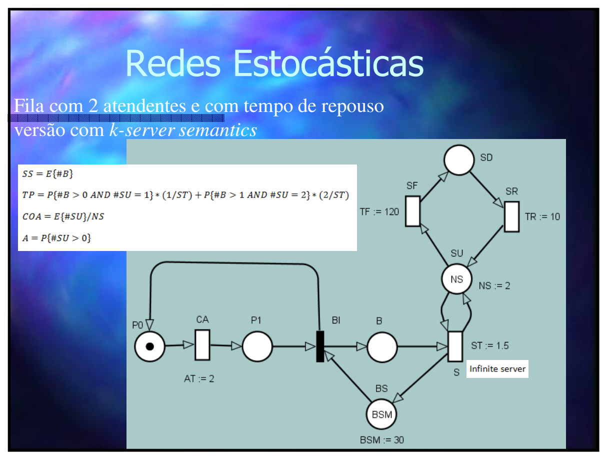
```
λ = 8.; μ = 10.; n = 2; k = 20;
Q = QueueingProcess[λ, μ, n, k];
QueueProperties[Q]
```

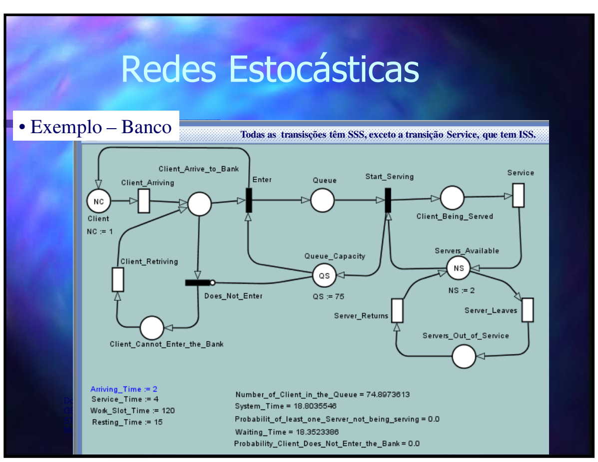
| | |
|---|---|
| **Basic Properties** | |
| QueueNotation | M/M/2/20 |
| ArrivalRate | 8. |
| ServiceRate | 10. |
| UtilizationFactor | 0.4 |
| Throughput | 8. |
| ServiceChannels | 2 |
| SystemCapacity | 20 |
| InitialState | 0 |
| **Performance Measures** | |
| MeanSystemSize | 0.952381 |
| MeanSystemTime | 0.119048 |
| MeanQueueSize | 0.152381 |
| MeanQueueTime | 0.0190476 |

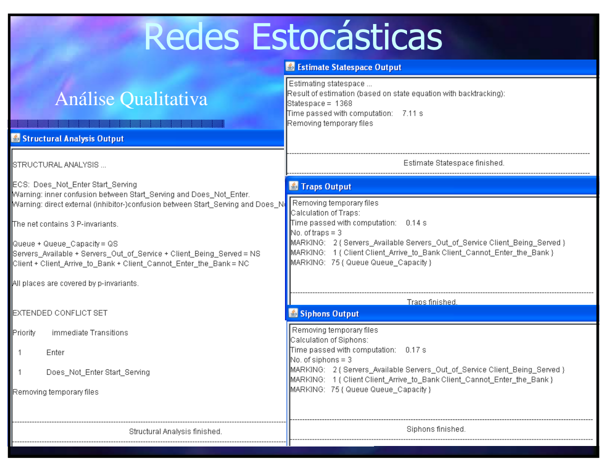

Redes Estocásticas
MMn1n2K
Servidores com caracterísitcas diferentes.
UtilizationS1 = 0.376547231148
UtilizationS2 = 0.376547231148
Throughput1 = 3.765472311484
Throughput2 = 4.234527685679
Throughput = 7.999999997163
MQS = 0.103515664521
MSS = 0.818825110524
MST = 0.102353138815
MQT = 0.012939458065
DiscardProb = 3.55E-10
DiscardRate = 2.837E-9
NC := 1
TBA := 0.125
AR := 8
BS := 18
ST1 := 0.1
SR1 := 10
ST2 := 0.08
SR2 := 12.5
NS1 := 1
NS2 := 1

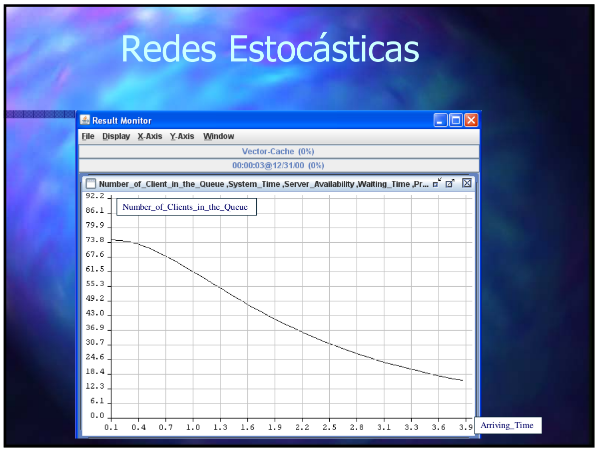

Redes Estocásticas
Fila com 1 atendente e com tempo de repouso
SS = E{#B}
TP = P{#B > 0 AND #SU = 1} * (1/ST)
A = P{#SU = 1}
AT := 2
ST := 1.5
BSM := 30
TF := 120
TR := 10

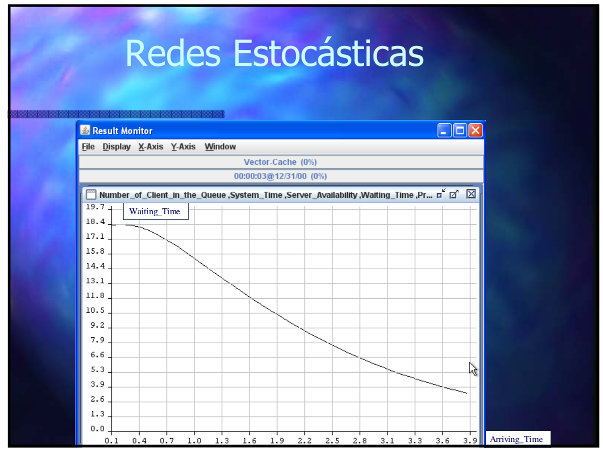

Redes Estocásticas
Fila com 2 atendentes e com tempo de repouso
IF (#SU=2 AND #B>1):ST*0.5 ELSE ST;
SS = E{#B}
TP = P{#B > 0 AND #SU = 1} * (1/ST) + P{#B > 1 AND #SU = 2} * (2/ST)
COA = E{#SU}/NS
A = P{#SU > 0}
AT := 2
ST := 1.5
BSM := 30
TF := 120
TR := 10
NS := 2

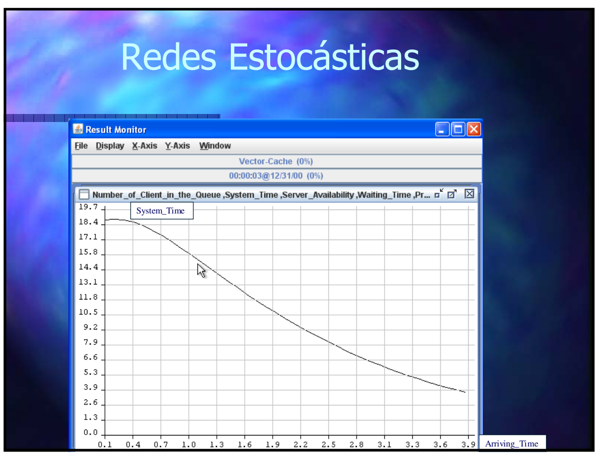

Redes Estocásticas
Fila com 2 atendentes e com tempo de repouso
versão com k-server semantics
SS = E{#B}
TP = P{#B > 0 AND #SU = 1} * (1/ST) + P{#B > 1 AND #SU = 2} * (2/ST)
COA = E{#SU}/NS
A = P{#SU > 0}
TF := 120
TR := 10
NS := 2
ST := 1.5
Infinite server
AT := 2
BSM := 30


Redes Estocásticas
• Exemplo – Banco
Todas as transições têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.
Arriving_Time := 2
Service_Time := 4
Work_Slot_Time := 120
Resting_Time := 15
Number_of_Client_in_the_Queue = 74.8973613
System_Time = 18.8035546
Probabilit_of_least_one_Server_not_being_serving = 0.0
Waiting_Time = 18.3523386
Probability_Client_Does_Not_Enter_the_Bank = 0.0

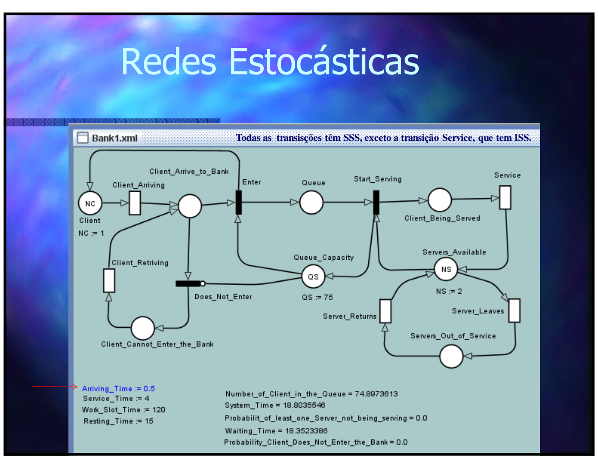

Redes Estocásticas
Análise Qualitativa
Estimate Statespace Output
Estimating statespace ...
Result of estimation (based on state equation with backtracking):
Statespace = 1368
Time passed with computation: 7.11 s
Removing temporary files
Estimate Statespace finished.
Structural Analysis Output
STRUCTURAL ANALYSIS ...
ECS: Does_Not_Enter Start_Serving
Warning: inner confusion between Start_Serving and Does_Not_Enter.
The net contains 3 P-invariants.
Queue + Queue_Capacity = QS
Servers_Available + Servers_Out_of_Service + Client_Being_Served = NS
Client + Client_Arrive_to_Bank + Client_Cannot_Enter_the_Bank = NC
All places are covered by p-invariants.
EXTENDED CONFLICT SET
Priority immediate Transitions
1 Enter
1 Does_Not_Enter Start_Serving
Removing temporary files
Structural Analysis finished.
Traps Output
Removing temporary files
Calculation of Traps:
Time passed with computation: 0.14 s
No. of traps = 3
MARKING: 2 { Servers_Available Servers_Out_of_Service Client_Being_Served }
MARKING: 1 { Client Client_Arrive_to_Bank Client_Cannot_Enter_the_Bank }
MARKING: 75 { Queue Queue_Capacity }
Siphons Output
Removing temporary files
Calculation of Siphons:
Time passed with computation: 0.17 s
No. of siphons = 3
MARKING: 2 { Servers_Available Servers_Out_of_Service Client_Being_Served }
MARKING: 1 { Client Client_Arrive_to_Bank Client_Cannot_Enter_the_Bank }
MARKING: 75 { Queue Queue_Capacity }
Siphons finished.


Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:03@12/31/00 (0%)
Number_of_Clients_in_the_Queue
Arriving_Time


Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:03@12/31/00 (0%)
Waiting_Time
Arriving_Time

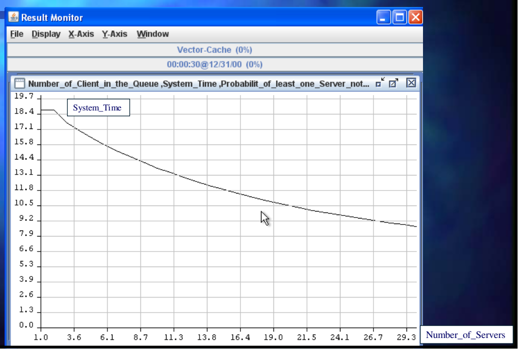

Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:03@12/31/00 (0%)
System_Time
Arriving_Time


Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:03@12/31/00 (0%)
Probability of at least one server not being serving
Arriving_Time

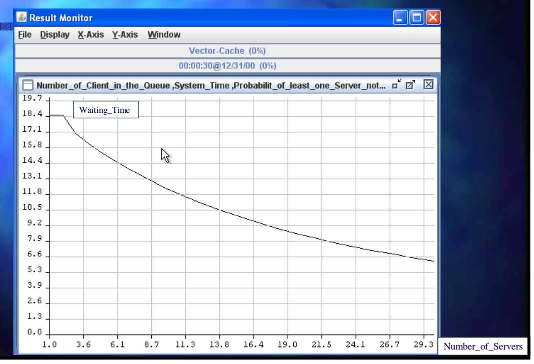

Redes Estocásticas
Bank1.xml
Todas as transições têm SSS, exceto a transição Service, que tem ISS.
Client_Arrive_to_Bank
Client_Arriving
Enter
Queue
Start_Serving
Service
NC
Client
NC := 1
Client_Being_Served
Queue_Capacity
Servers_Available
Client_Retriving
QS
NS
Does_Not_Enter
QS := 75
NS := 2
Server_Returns
Server_Leaves
Servers_Out_of_Service
Client_Cannot_Enter_the_Bank
Arriving_Time := 0.5
Service_Time := 4
Work_Slot_Time := 120
Resting_Time := 15
Number_of_Client_in_the_Queue = 74.8973613
System_Time = 18.8035546
Probabilit_of_least_one_Server_not_being_serving = 0.0
Waiting_Time = 18.3523386
Probability_Client_Does_Not_Enter_the_Bank = 0.0


Redes Estocásticas
Result Monitor
File Display X-Axis Y-Axis Window
Vector-Cache (0%)
00:00:30@12/31/00 (0%)
Number_of_Clients_in_the_Queue
Number_of_Servers

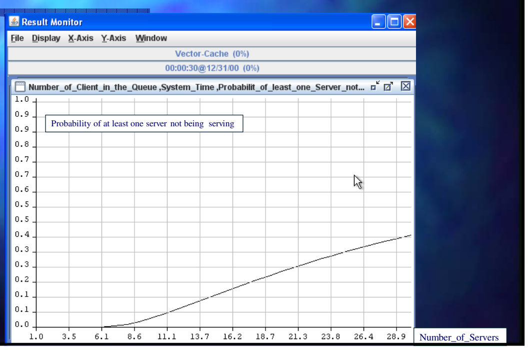
## Redes Estocásticas



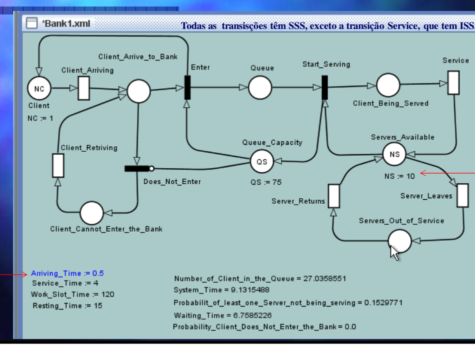

## Redes Estocásticas



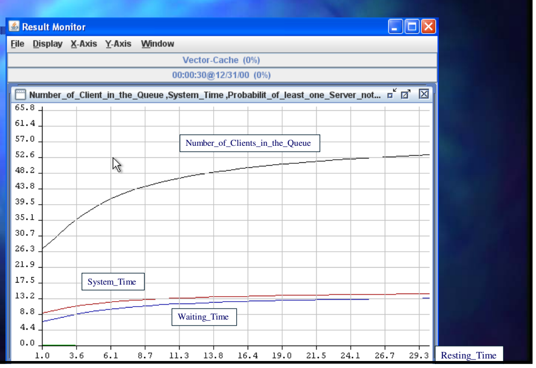

## Redes Estocásticas




## Redes Estocásticas

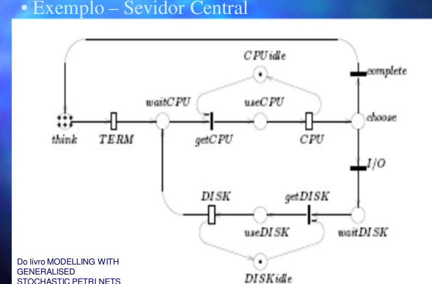



## Redes Estocásticas




## Redes Estocásticas

- Exemplo – Sevidor Central



## Redes Estocásticas

- Aproximando Outras Distribuições
  - Variáveis Suplementares
  - Aproximação por Fases
    - *Moment Matching*

  Para encontrar uma distribuição por fase adequada para uma distribuição genérica, duas atividades são fundamentais:
  - Determinar o tipo de aproximação necessária.
  - Encontrar os parâmetros numéricos da aproximação.

## Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Qualidade da aproximação: quanto mais próximo for a distribuição por fase da distribuição real, melhor.
  - Medidas de aproximação:
    - *Moment matching*
    - Encontrar um pdf (ou cdf) que seguem a pdf real numa determinada região de interesse.

## Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Número de Estados da Aproximação: é importante fazer com que o número de estados seja o menor possível.
- Facilidade da obtenção do modelo markoviano resultante: pode ser possível obter uma aproximação que gere excelentes resultados. No entanto, pode não ser fácil a integração no modelo markoviano resultante.

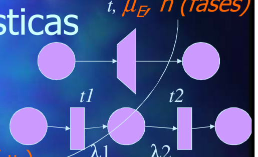
## Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases

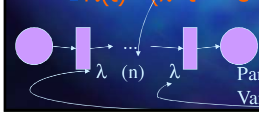
Pontos a serem considerados na escolha de uma aproximação por fases.

- Facilidade de obtenção dos parâmetros da aproximação: quanto mais parâmetros sejam necessários para especificar a aproximação, mais difícil se torna para encontrá-los.

## Redes Estocásticas




- Aproximação por Fases
- Distribuição de Erlang
  - $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ($\lambda_1 = 1/\mu_1, \lambda_2 = 1/\mu_2$)
  - $f\tau(t) = (f\tau_1 * f\tau_2)(t) = \lambda_1 \lambda_2 (e^{-\lambda 1t} - e^{-\lambda 2t})/(\lambda_1 - \lambda_2)$
  - Generalizando para n fases iguais a λ.
    - $f\tau(t) = (\lambda^n t^{(n-1)} e^{-\lambda t})/(n-1)!\ ,\ t \geq 0$

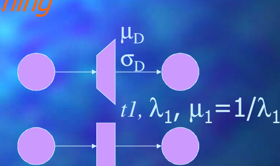



Parâmentros: n, λ; Valor Esperado: $\mu_E = n/\lambda$
Variância: $1/n\lambda^2$ (λ - de cada fase)

## Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*

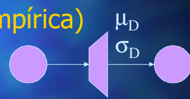


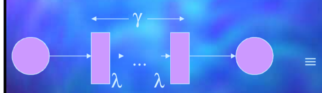

- Se $\mu_D/\sigma_D = 1$ então uma transição exponencial é suficiente. $\lambda_1 = 1/\mu_D$

## Redes Estocásticas

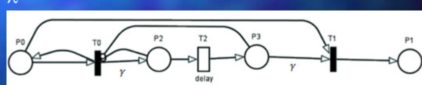
Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*




≡



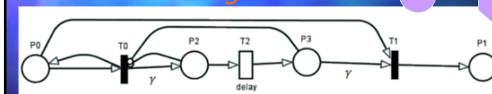

– Se $\mu_D/\sigma_D = n \neq 1$, $n \in Z$

$\gamma = (\mu_D/\sigma_D)^2 = n^2$, $\lambda = \gamma/\mu_D = n^2/\mu_D$

## Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*


Erlang distribution

$CV < 1$

$\frac{1}{CV} = \frac{E[t]}{\sigma} = \frac{\mu_D}{\sigma_D} = n$

$n \in \mathbb{Z}, n > 1$

$\gamma = \left(\frac{1}{CV}\right)^2$

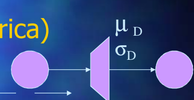
$\lambda = \frac{\gamma}{E[t]}$

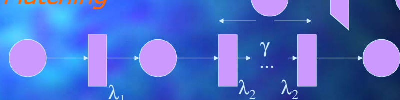
$delay = \frac{1}{\lambda}$

## Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*




– Se $\mu_D/\sigma_D > 1$ e $\mu_D/\sigma_D \notin Z$

– $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$

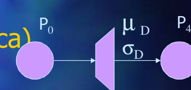
$\lambda_1 = 1/\mu_1$ $\mu_1 = \mu_D \mp \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

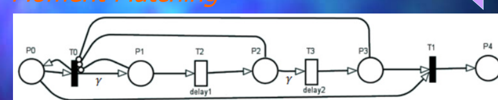
$\lambda_2 = 1/\mu_2$ $\mu_2 = \gamma\mu_D \pm \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

## Redes Estocásticas

Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*




– Se $\mu_D/\sigma_D > 1$ e $\mu_D/\sigma_D \notin Z$

– $(\mu_D/\sigma_D)^2 - 1 \leq \gamma < (\mu_D/\sigma_D)^2$

$\lambda_1 = 1/\mu_1$ $\mu_1 = \mu_D \mp \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

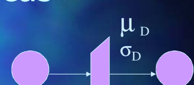
$\lambda_2 = 1/\mu_2$ $\mu_2 = \gamma\mu_D \pm \text{sqrt}(\gamma(\gamma+1)\sigma_D^2 - \gamma\mu_D^2)/(\gamma+1)$

delay1=$1/\lambda_1$, delay2=$1/\lambda_2$

## Redes Estocásticas

Distribuição Determinística

- *Moment Matching*




Aproxima-se, fazendo-se $\sigma_D$ pequeno

⇒ γ torna-se grande.

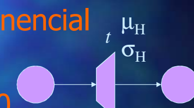
≡


– Se $\mu_D/\sigma_D = x \neq 1$, $x \in Z$ ($c = \sigma_D/\mu_D < 1$)

$\gamma = x^2$, $\lambda = x^2/\mu_D$

## Redes Estocásticas

- Aproximação por Fases
- Distribuição de Hiperexponencial



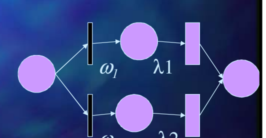

$f\tau(t) = \omega_1 f\tau_1(t) + \omega_2 f\tau_2(t),\ t \geq 0$

$\sum^n_{j=1} \omega_j = 1$

Parâmentros:

Valor Esperado: $\mu_H = \sum_j \omega_j/\lambda_j$

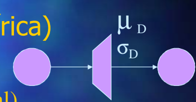
Variância: $2 \sum_j \omega_j / \lambda_j^2 - \mu_H^2$



# Redes Estocásticas

## Distribuição Especificada (empírica)

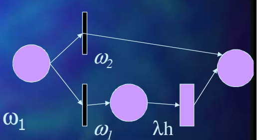
- *Moment Matching*




$\mu_H = \omega_1 / \lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)

$\sigma_H = [\mathrm{sqrt}\,(2\,\omega_1 - \omega_1^2)] / \lambda_H$

- Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)



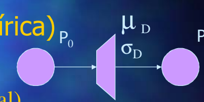

$\omega_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $\omega_2 = 1- \omega_1$

$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$,

# Redes Estocásticas

## Distribuição Especificada (empírica)

- *Moment Matching*




$\mu_H = \omega_1 / \lambda_H$ (para esta Hiperexponencial)

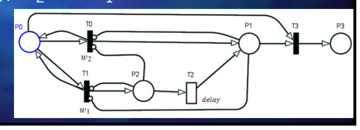
$\sigma_H = [\mathrm{sqrt}\,(2\,\omega_1 - \omega_1^2)] / \lambda_H$

- Se $\mu_D/\sigma_D < 1$ ($c=\sigma_D/\mu_D>1$)

$\omega_1 = 2\mu_D^2/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$, $\omega_2 = 1- \omega_1$

$\lambda_h = 2\mu_D/(\mu_D^2+\sigma_D^2)$

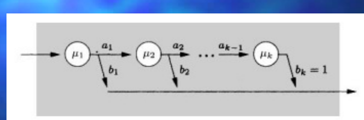
delay$=1/\lambda_h$




# Redes Estocásticas

## Distribuição de Cox

Cox generalizou a idéia de composição de fase exponenciais para gera probabilidades e taxas complexas.




Nestes slides $\mu_k$ são taxas (diferentemente dos anteriores)

# Redes Estocásticas

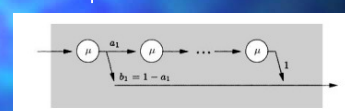
## Distribuição de Cox

Nestes slides $\mu$ é taxa (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV ≤ 1

$$\mu_j = \mu \quad j = 1,\ldots,k, \qquad a_j = 1 \quad j = 2,\ldots,k-1.$$




$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu},$$
$$\mathrm{var}\,(X) = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k)+k-2)}{\mu^2},$$
$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k)+k-2)}{[b_1 + k(1-b_1)]^2}.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$ ➢ Número de fases

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2+4-4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)},$$

$$\mu = \frac{k - b_1\cdot(k-1)}{\overline{X}}.$$ ➢ Taxa das fases

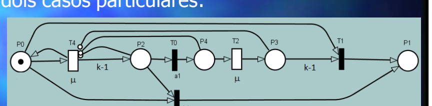
# Redes Estocásticas

## Distribuição de Cox

Nestes slides $\mu$ é taxa (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV ≤ 1




$$\mu_j = \mu \quad j = 1,\ldots,k, \qquad a_j = 1 \quad j = 2,\ldots,k-1.$$

$$\overline{X} = \frac{b_1 + k(1-b_1)}{\mu},$$
$$\mathrm{var}\,(X) = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k)+k-2)}{\mu^2},$$
$$c_X^2 = \frac{k + b_1(k-1)\,(b_1(1-k)+k-2)}{[b_1 + k(1-b_1)]^2}.$$

$$k = \left\lceil \frac{1}{c_X^2} \right\rceil$$ ➢ Número de fases

$$b_1 = \frac{2kc_X^2 + (k-2) - \sqrt{k^2+4-4kc_X^2}}{2(c_X^2+1)(k-1)},$$

$$\mu = \frac{k - b_1\cdot(k-1)}{\overline{X}}.$$ ➢ Taxa das fases

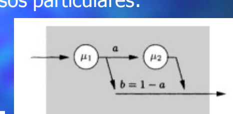
# Redes Estocásticas

## Distribuição de Cox

Nestes slides $\mu_1$ e $\mu_2$ são taxas (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV > 1




$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$
$$\mathrm{var}\,(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2\cdot\mu_2^2},$$
$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}}, \qquad a = \frac{1}{2c_X^2}.$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X}c_X^2}$$

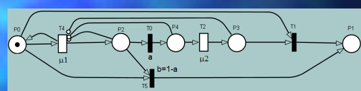
## Redes Estocásticas

### Distribuição de Cox

Nestes slides $\mu_1$ e $\mu_2$ são taxas (diferentemente dos anteriores)

Simplificamos em dois casos particulares:

- Caso CV > 1




$$\overline{X} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{a}{\mu_2},$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{\mu_1^2 \cdot \mu_2^2},$$

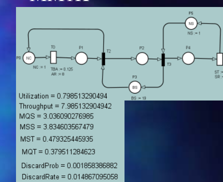
$$c_X^2 = \frac{\mu_2^2 + a\mu_1^2(2-a)}{(\mu_2 + a\mu_1)^2}.$$

$$\mu_1 = \frac{2}{\overline{X}}, \quad a = \frac{1}{2c_X^2}.$$

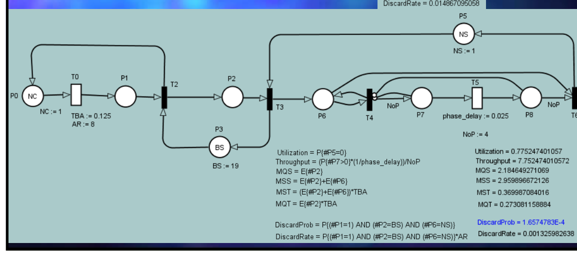
$$\mu_2 = \frac{1}{\overline{X} c_X^2}$$

## Redes Estocásticas

MM1K

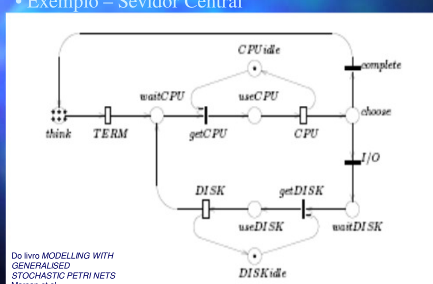



ME1K




## Redes Estocásticas

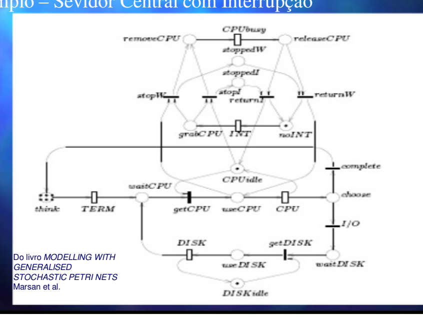
- Exemplo – Sevidor Central




Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

## Redes Estocásticas

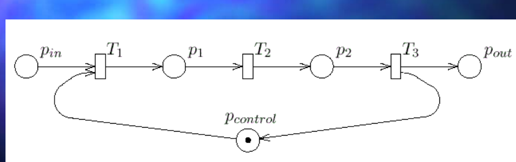
- Exemplo – Sevidor Central com Interrupção




Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

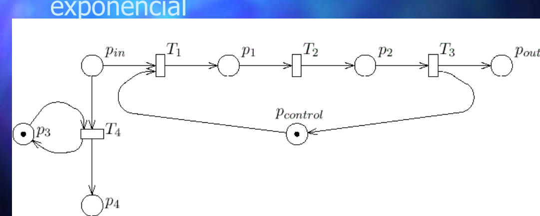
## Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 Fases



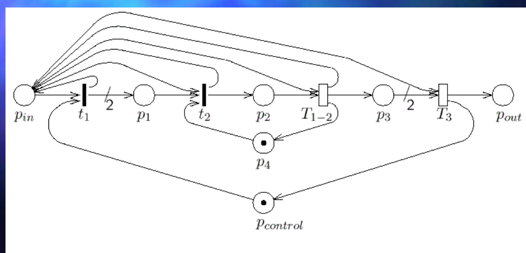

## Modelando Políticas de Memória

- Conflito entre Erlang com 3 fases e exponencial



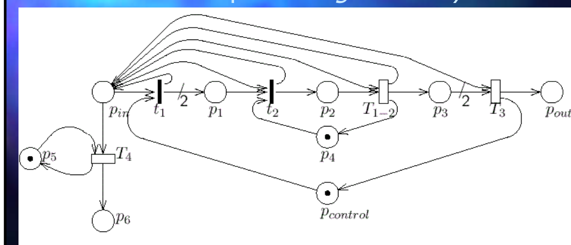
## Modelando Políticas de Memória

- Erlang com 3 fases com interrupção



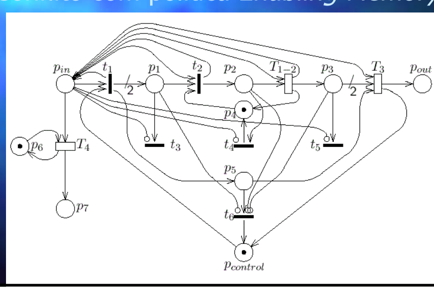
## Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Age Memory*



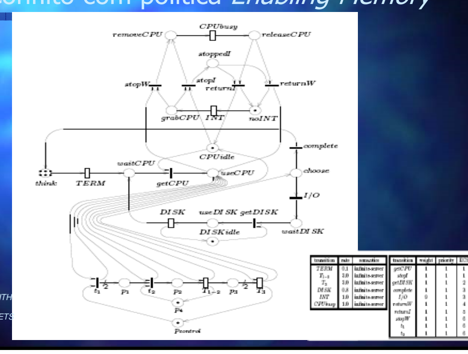
## Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



## Modelando Políticas de Memória

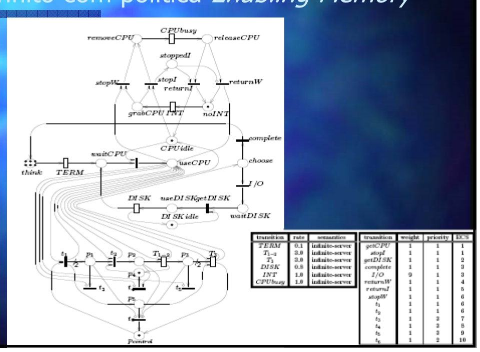
- Conflito com política *Enabling Memory*



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

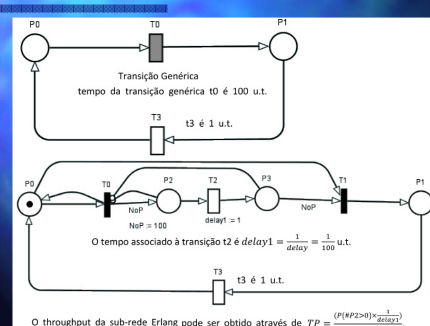
## Modelando Políticas de Memória

- Conflito com política *Enabling Memory*



Do livro *MODELLING WITH GENERALISED STOCHASTIC PETRI NETS* Marsan et al.

## *Throughput* de uma Transição Erlang



## DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,$M_0$,D,W) - Marsan,Chiola 1987
  - P é o conjunto de lugares,
  - $T = T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

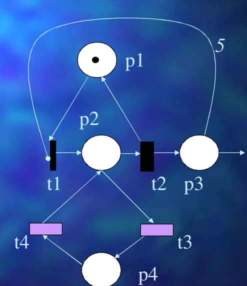
  $i_k(t_j)$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$
  $o_k(t_j)$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$
  $h_k(t_j)$: $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$
  - $\Pi: T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - $M_0$, é marcação inicial,

## DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- DSPN = (P,T,I,O,H,Π,$M_0$,D,W)
  - D: $T_{exp} \cup T_{det} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - W: $T_{im} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.
- Quando $T_{det} = \emptyset$ a DSPN é uma GSPN.
- Embora seja possível a análise de modelos com mais de uma transição determinística simultaneamente habilitadas, as ferramentas, normalmente, somente implementam métodos que considerem apenas uma transição determinística habilitada por marcação.

## DSPN – *Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:
  - $T_{im} = \{t_1\}$
  - $T_{exp}=\{t_3,t_4\}$
  - $T_{det}=\{t_2\}$




## EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Definição
- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,$M_0$,D,W) -
  - P é o conjunto de lugares,
  - $T = T_{im} \cup T_{exp} \cup T_{det}$,
  - I, O, H denotam funções (vetores de funções) de entrada, saídas e de inibição que mapeiam transições em multi-conjuntos de lugares:

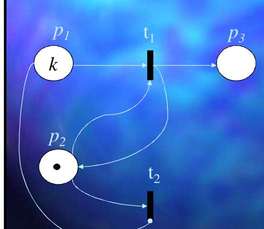
  $i_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$
  $o_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$
  $h_k(t_j)$: $P \times T \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{N}$, $\forall p_k \in P$, $\forall t_j \in T$
  - $\Pi: T_{im} \rightarrow \mathbb{N}$,
  - $M_0$, é marcação inicial,

## EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

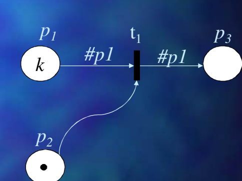
- EDSPN = (P,T,I,O,H,Π,$M_0$,D,W)
  - D: $(T_{exp} \cup T_{det}) \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um tempo médio às transições estocásticas e um tempo constante as transições determinísticas,
  - W: $T_{im} \times \mathbb{N}^{|P|} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atribui um peso às transições imeditadas.

## EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Exemplo:



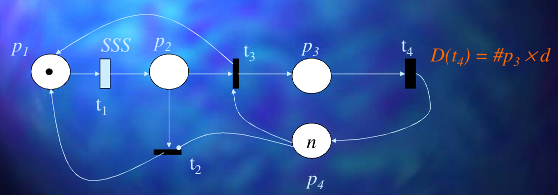

*Modelo em DSPN para limpar $p_1$.*




*Modelo em EDSPN para limpar $p_1$ (arcos dependentes de marcação).*

## EDSPN – *Extended Deterministic and Stochastic PN*

- Tempos dependentes da carga




## Redes Estocásticas

- Considerações
  - Redes de Petri estocásticas são uma representação compacta de alto nível das CTMC
  - Equivalência com CTMC
  - Análise quantitativa
  - Análise qualitativa
  - Modelagem de sistemas concorrentes, não-determinísticos e assíncronos. Modelagem de sincronismo, escolha, mútua exclusão etc

## Redes Estocásticas

- Algumas Referências:
  - Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets, A. Marsan et al, John Wiley & Sons, 1995.
  - Performance Modelling with Deterministic and Stochastic Petri Nets, C. Lindermann, John Wiley & Sons, 1998.
- http://www.daimi.au.dk/PetriNets