Avaliação de Desempenho

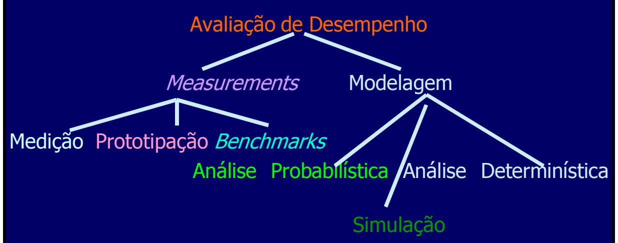
Paulo Maciel

Centro de Informática - UFPE

Objetivo

- É o estudo, fixação e aplicação de métodos e modelos para Avaliação de Desempenho de sistemas.

Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho



Programa

- Visão geral sobre *Performance Engineering.*
- Avaliação de Desempenho
- Estudo de protocolos para medição.
- Conceitos Básicos e Erros em Medição
- Técnicas de Medição e Ferramentas
- Estatística Descritiva.
- Inferência Estatística
- Aplicações
- Leis Operacionais
- Introdução à Teoria das Filas.
- Introdução às PN
- Cadeias de Markov
  - Modelos de tempo discreto
    - Análise estacionária
    - Análise transiente
  - Modelos de tempo contínuo
    - Análise estacionária
    - Análise transiente
- (D)(G)SPN.
- IGSPN
- Modelos não-markovianos.
  - Aproximações por fases.
  - Variáveis complementares: TPN (Zuberek)
    - Avaliação estacionária
- Composições e decomposições.
- Introdução a simulação estocástica.
- Aplicações.

Programa – Mestrado Profissional

- Avaliação de Desempenho
- Estudo de protocolos para medição.
- Conceitos Básicos e Erros em Medição
- Técnicas de Medição e Ferramentas
- Estatística Descritiva na ADS
- Inferência Estatística na ADS
- Aplicações
- Leis Operacionais
- Cadeias de Markov
  - Modelos de tempo discreto
    - Análise estacionária
  - Modelos de tempo contínuo
    - Análise estacionária
- Aplicações

Metodologia

- Aulas expositivas
- Aulas práticas.
- Desenvolvimento de estudo de casos.

Avaliação

- Resolução de listas.
- Avaliação dos estudos de caso.

Bibliografia Básica

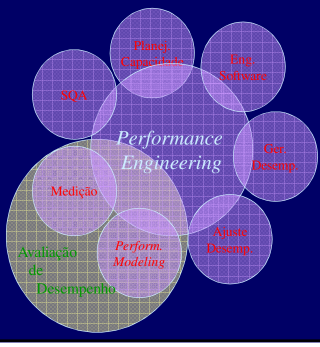
- **Measuring Computer Performance: A Practitioner's Guide,** David J. Lilja , Cambridge University Press, 2000.
- **Queueing Networks and Markov Chains:** Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications, Second Edition, **Gunter Bolch, Stefan Greiner, Hermann de Meer**, Kishor S. Trivedi, WILEYINTERSCIENCE, 2007.
- **Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets**, Marsan, A., Balbo, G., Conte, G., Donatelli, S., Franceschinis, G., *Wiley Series in Parallel* Computing, 1995
- **Probability and Statistics with Reliability, Queueing, and Computer Science Applications**, Trivedi. K., *2nd edition, Wiley*, 2002.
- **Art of Computer Systems Performance Analysis Techniques For Experimental Design Measurements Simulation And Modelingm,** *Raj Jain,* Wiley Computer Publishing, John Wiley & Sons, Inc,1991.

Aspectos da *Performance Engineering*

- Definição - *Performance Engineeirng* se refere a um conjunto de métodos que possibilita o desenvolvimento de sistemas de maneira que se atendam restrições de desempenho.
- Objetivos:
  - Definição de processos, métodos e modelos que possibilitem avaliar características de desempenho no processo de desenvolvimento e de maneira a minimizar riscos associados ao desempenho.
  - Este processo deve ser integrado ao processo de desenvolvimento existente das organizações.

Aspectos da *Performance Engineering*

- Interrelações:



Aspectos da *Performance Engineering*

- Motivação:
  - Sistemas projetados sem a preocupação sobre os aspectos de desempenho podem gerar atrasos, o não fornecimento de serviços em tempo hábil, falhas catastróficas, perdas financeiras etc
  - Alguns exemplos:
    - O orçamento planejado para o desenvolvimento do sistema de reservas de lugares do aeroporto de Denver teve reajuste de mais 2 bilhões de dólares devido as características de desempenho inadequadas.
    - O sistema de informação, desenvolvido pela IBM, para avaliação das competições individuais das Olimpíadas de Atlanta foi testado com 150 usuários. O sistema entrou em colapso, pois o número de usuários durante o período operacional ultrapassou 1000.

Aspectos da *Performance Engineering*

- Cuidados
  - Os modelos não devem ser demasiadamente complexos, o que provocaria ineficiência.
  - A sua aplicação deve justificar os custos decorrentes.
  - Qualificação dos envolvidos
  - Ferramentas de suporte.

Aspectos da *Performance Engineering*

- Considerando o desenvolvimento de sistemas comunicantes com recursos distribuídos, alguns princípios devem ser considerados:
  - Exatidão e Fidelidade
  - Compartilhamento de recursos
    - Compartilhe recursos. Se for necessário acesso exclusivo, procure reduzir o tempo associado à região crítica.
  - Use processamento paralelo principalmente quando este reduzir os efeitos temporais causados pela comunicação.
  - Identifique as funcionalidades dominantes (carga) e procure reduzir o tempo de processamento.
  - Instrumente o sistema em desenvolvimento de maneira que se possa realizar medições para análise de cenários de carga, recursos e desempenho. (*Design for Testability)*

Avaliação de Desempenho

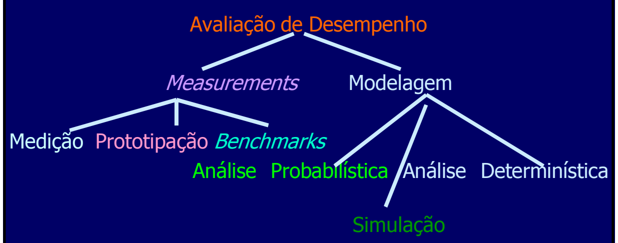
- Definição - se refere a um conjunto de métodos que possibilita investigar o comportamento temporal de sistemas.
- Possui longa tradição no estudo e dimensionamento de sistemas de comunicação, sistemas de manufatura, pesquisa operacional.
- Avaliação de desempenho de sistemas computacionais iniciou nos anos 60.
- Estudo sobre sistemas concorrentes (anos 60).
- Sistemas de recursos compartilhados × Sistemas de tempo real.

- Interpretações do Tempo -

A noção de tempo pode ser representada de diversas maneiras nos sistemas computacionais.

- **Tempo Lógico** **é definido a partir de relações de precedência entre eventos permitindo estabelecer ordens causais entre conjunto de eventos.**
- **Tempo Físico** **é um tempo métrico que permite representar quantitativamente a distância entre eventos e estabelecer ordens totais entre eventos.**
- **Tempo Contínuo** **segue a natureza uniforme e contínua do tempo físico e é isomorfo ao conjunto dos reais.**
- **Tempo Discreto** **é uma simplificação do tempo contínuo onde a relação de isomorfismo é com o conjunto dos naturais.**
- **Tempo Global** **fornece uma única referência temporal para todos os componentes do sistema.**
- **Tempo Local** **é a noção em que cada componente do sistema tem sua própria referência temporal.**

Classificação das Técnicas de Avaliação de Desempenho



Classificação da Técnicas de Avaliação de Desempenho

Modelos Temporizados

- Com todos estes pontos de vistas, diversos modelos têm sido propostos na literatura para tratar (modelar e analisar) os sistemas sob o ponto de vista temporal. Dentre os modelos temporais, podemos ressaltar:
- Lógicas Temporais: Linear Time Temporal Logic, Causal Temporal Logic
- Álgebras de Processos Temporais : Timed CSP,SPA
- Autômatos Temporizados
- Cadeias de Markov
- Redes de Fila
- Redes de Petri Temporizadas: Timed PN, Time PN, SPN, GSPN, DSPN

Modelos Temporizados

- Algumas destas classes de modelos temporizados possibilitam a análise temporal dos sistemas seja sob o ponto de vista determinístico ou sob o ponto de vista probabilístico. Para modelagem e avaliação de sistemas críticos, são de particular interesse os modelos que possibilitem a representação de tempos físicos e não apenas o tempo lógico.
- Os modelos que possibilitam a especificação do tempo físico, podem representar os tempo de foras distintas, por exemplo:
  - por Intervalos
  - de forma Determinística
  - de forma Probabilística

Análise de Desempenho

- Por quê utilizar modelagem estocástica?
  - Em função de razões técno-econômicas, muitos sistemas compartilham recursos o que cria conflitos que provocam retardos.
  - Variação dos tempos de serviço, falhas e execução de processos em background (concorrência).
  - Interrelações complexas, ausência de informações detalhadas e aleatoriedade.
  - Torna impossível a representação destes sistema através de modelos determinísticos.

Modelagem para Análise de Desempenho

- Algumas Medidas
  - Tempo de manufatura
  - Vazão (*Throughput*)
  - *Turnaround time*
  - Utilização
  - Capacidade
  - Confiabilidade
  - Disponibilidade
  - Taxa de descarte

Análise de Desempenho

- Analíticos
  - Determinísticos
    - Melhor e pior casos
  - Probabilisticos
    - Valores prováveis
- Simulação
    - Análise exaustiva
- Medição
  - Medidas obtidas do sistema real
  - *Benchmarks*
  - Protótipos

Avaliação de Desempenho

- Sistema de Tempo Real
  - Exemplos
    - Controle de processo
    - Rôbos
    - Sistemas de controle de aeronaves.
  - Objetivos
    - Corretude
    - Tolerância a falha
  - Propriedades de interesse
    - *Liveness, safety*
  - Tempo determinístico
  - Modelos
    - TA, EFSM, TPN, RTPA

- Sistema de Recursos Compartilhados
  - Exemplos
    - *Time-sharing computers.*
    - Arquiteturas cliente-servidor
    - Sistemas de telefonia, comunicação,
    - Linhas de produção.
  - Objetivos
    - Uso econômico de recursos
    - Tolerância à falhas
  - Propriedades de interesse
    - *Throughput*, utilização, retardo, probabilidade de perda.
  - Tempo estocástico
  - Modelos
    - QN, SPN, SPA

Checklist para evitar erros comuns em um Projeto de Avalição de Desempenho

1. O sistema/problema a ser avaliado está claramente definido e compreendido, assim como os critérios da avaliação?
2. Os critérios de avaliação foram definidos de maneira clara, objetiva e de forma não viesada?
3. Apresente a idéia de forma clara e demonstre confiança.
4. Envolva a alta-gerência para fique claro a importância do projeto.
5. Defina um plano de ação (metodologia), ressaltando as etapas, pré-condições, insumos, produtos, evidências (pós-condições), funções e responsáveis.
6. Solucione disputas (internas e externas).
7. Verifique se etapas da avaliação foram seguidas de maneira sistemática.
8. Avalie se as métricas definidas são relevantes para a avaliação.
9. Verifique se a carga considerada é adequada.
10. A técnica de avaliação é adequada?
11. O nível de abstração é apropriado?
12. O conjunto de parâmetros que afetam o desempenho está completamente (considerando o nível de abstração considerado) definido?

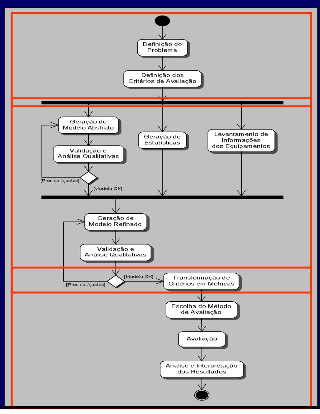
Checklist para evitar erros comuns em Avalição de Desempenho

13. Quais destes parâmetros serão variados?
14. A análise é estatisticamente confiável?
15. Foi realizada análise de sensibilidade?
16. Os erros das "entradas" podem causar erros significantes nos resultados?
17. *Outliers* foram tratados de forma adequada?
18. Alterações futuras do sistema e da carga foram consideradas?
19. Variabilidade da "entrada" e dos resultados foram consideradas?
20. Os resultados obtidos são fáceis de explicar, foram apresentados com análise, interpretação e com o auxílio de gráficos?
21. A forma de apresentação dos resultados é adequada para o público, audiência ou cliente?

Macro-Atividades de um Processo de Avaliação de Desemenpeho (com modelagem)

1. **Compreensão geral do problema/sistema a ser avaliado.**
2. **Definição inicial dos critérios de desempenho a serem avaliados.**
3. **Identificação dos componentes.**
4. **Refinamento dos critérios de avaliação**
5. **Geração do modelo abstrato.**
6. **Planejamento da medição.**
7. **Coleta dos dados.**
8. **Análise dos dados coletados associados aos componentes (influentes) do sistema/problema.**
9. **Geração do modelo refinado.**
10. **Definição e mapeamento das métricas no modelo refinado.**
11. **Escolha dos métodos de avaliação dos modelos.**
12. **Desagregação do modelo refinado.**
13. **Avaliação.**
14. **Agregação.**
15. **Análise dos resultados e recomendações.**

Exemplo de um Fluxo Geral de uma Metodologia



Informações Adicionais no Documento

- Para cada Atividade constam:
  - Objetivo
  - Responsável
  - Pré-condições
  - Entradas
  - Ações
  - Saídas
  - Pós-Condições

Exemplo do Detalhamento das Atividades

Atividade: Geração de Modelo Abstrato

Objetivo	Geração de modelo abstrato
Responsável	*Modelador.*
Pré-condições	Conhecimento do *Modelador* sobre o escopo do problema, compreendendo as relações entre os dispositivos/equipamentos e os critérios que serão utilizados para avaliar o sistema.
Entradas	*Critérios de Avaliação* e *Documento de Escopo*.

Exemplo do Detalhamento das Atividades

Atividade: Geração de Modelo Abstrato

Ações	▪ Estudar o *Diagrama do Problema*, dividindo o escopo total em subsistemas (SS). Para fazer isto, considere a coesão dos equipamentos dentro do SS e o tamanho do modelo de modo a evitar a explosão de estados. ▪ Modelar cada tipo básico de equipamento, utilizar componentes básicos e regras de composição definidos. ▪ Agrupar os equipamentos de cada SS para formar um único modelo para o SS, representando as dependências entre estes e utilizando as regras de composição. ▪ Utilizar as regras de composição para criar as dependências série, paralelo, série-paralelo, *bridge* entre os SS.

Exemplo do Detalhamento das Atividades

Atividade: Geração de Modelo Abstrato

Ações	▪ Nesta fase, a priori, as informações temporais podem ser desconsideradas, dado que o objetivo é a geração de um modelo o qual será posteriormente refinado. O modelo refinado terá informações temporais, que serão devidamente representadas. Contudo, se desejar, pode-se gerar um modelo no qual todas as informações temporais sejam exponencialmente distribuídas. Posteriormente, estas informações – como no caso descrito a priori – serão representadas de forma mais específica. ▪ Realizar ajustes no modelo em função do resultado da próxima atividade (Validação e Análise Qualitativas). Estes ajustes podem se referir à redução dos SS, correção de modelos com propriedades qualitativas indesejáveis – modelos ilimitados, por exemplo –, entre outros aspectos.

Exemplo do Detalhamento das Atividades

Atividade: Geração de Modelo Abstrato

Saídas	*Modelo Abstrato.*
Pós-condições	Modelo abstrato validado para o sistema de interesse representado no *Diagrama do Problema.*

Procedimento de Medição

- Os principais pré-requisito para realização que se realize um procedimento de medição é compreensão do sistema, seus componentes relevantes, *interfaces*, critérios de avaliação e espaço de decisão.

Planejar a medição → Coletar dados → Análise dos dados → Recomendações

Planejamento da Medição

- Tendo o avaliador compreendido o sistema, os critérios de avaliação e o espaço para tomada de decisão, o planejamento do processo de medição pode ser realizado.
- O resultado desta fase é um documento que descreva o processo de medição.
- Este documento deve descrever "o que, quando, onde, como e a freqüência" do processo de coleta dos dados, assim a forma de armazená-los, plano de análise e quem deverá realizar cada tarefa.

Planejamento da Medição
Coleta dos Dados

- O que medir. Um conjunto de critérios subjetivos (do usuário, cliente) devem ser transformados em métricas (objetivas).
- Ex.: Critérios subjetivos: produzir itens para atender a demanda. Assistir um vídeo (via internet) com qualidade satisfatória.

  Métricas: *throughput*, disponibilidade, *jitter* etc

Planejamento da Medição
Coleta dos Dados

- O que medir - Detemine o tipo do dado

Nível	Resumo	Exemplo	Explicação
Nominal	Apenas categórico. Dados não podem ser arranjado em um esquema de ordem.	Cores, Sim/Não, Casado/solteiro/divorciado/viúvo	Categorias ou nomes
Ordinal	As categorias são ordenada, mas as diferenças não podem ser encontradas ou não têm significado.	Conceitos: A,B,C,D Postos: primeiro, segundo, terceiro...	Um ordem é estabelecida, mas as diferenças não podem ser encontradas ou não têm significado.
Intervalar	As diferenças são significativas, mas não existe ponto zero (inicial) natural e as razões não têm sentido.	Temperaturas Anos	0°C não significa nenhum calor. 40°C não é duas vezes mais quente que 20°C
Razão	Há um ponto zero natural e as razões são significativas.	Peso Preço Distância	40 Km é duas vezes mais distante que 20Km

Planejamento da Medição

Coleta dos Dados

- O que medir.
- Existem dados históricos
  - Se vai usa-los, CUIDADO!
    - Podem ser dados correlacionados: impede avaliação de causa e efeito
    - Os dados podem ter sido manipulados para controlar uma determinada saída.
    - Diversas variáveis que podem afetar os dados registrados podem não ter estado constante.
    - Os dados coletados (dependendo do tamanho) podem contemplar apenas uma sub-região da imagem real possível.

Planejamento da Medição

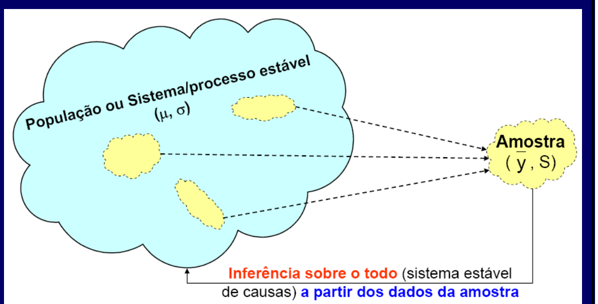
Coleta dos Dados

- Onde medir.

O avaliador deve definir onde realizar as medições. Processo menos detalhados (ou imaturos) normalmente consideram a medição no final do processo, enquanto processos mais detalhados (ou mais maduros) consideram medição dentro do processo.

Planejamento da Medição

Coleta dos Dados



Planejamento da Medição

Coleta dos Dados

- **Amostra Aleatória Simples: uma amostra na qual cada item da população tem chances iguais de serem selecionados.**
- **Censo: seleção de todos os itens da população.**
- **Parâmetro: medida calculada da população.**

Planejamento da Medição

Coleta dos Dados

- **Estimativas (*Estimations*) são baseadas nos resultados de experimentos.**
- **O conjunto de todos os possíveis valores de um experimento é denominado de população.**
- **Parâmetro: medida calculada da população.**
- **Censo: seleção de todos os itens da população.**
- **Métodos de inferência estatística auxiliam na estimativa de parâmetros da população através da escolha adequada de um sub-conjunto representativo da população (amostra)**

Planejamento da Medição

Coleta dos Dados

- **Estimativas (*Estimates*) são valores calculados de amostras observadas.**
- **Amostra aleatória é um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.**
- **Amostra Aleatória Simples: uma amostra na qual cada item da população tem chances iguais de serem selecionados.**
- **Estatística é qualquer função de valores de variáveis aleatórias.**
- **Estimador é qualquer estatística usada para estimar um valor de um parâmetros da população.**

Planejamento da Medição
Coleta dos Dados

- Quando e a frequência. O avaliador deve especificar detalhadamente o momento (Quando) e a freqüência das medições para garantir a representatividade dos dados coletados.
  - Defina os requisitos para preservar a ordem de medição (principalmente quando tempo é o parâmetro).
  - Defina os requisitos para coletar os dados em grupo, quando se desejar avaliar condições distintas (em períodos diversos).
  - Defina os critérios necessários para estimar o tamanho da amostra.
  - Determine o tamanho da amostra.

Planejamento da Medição
Coleta dos Dados

- O avaliador deve especificar detalhadamente Como realizar as medidas, o que inclui:
  - Definir os requisitos computacionais e operacionais.
  - e o processo de calibração dos equipamentos e ferramentas (computacionais) a serem utilizadas.
- Quem é responsável pela medição?

Planejamento da Medição
Coleta dos Dados

- Armazenamento e Acesso aos Dados
  - Comumente esta atividade é negligenciada. No entanto, é fundamental que se planeje cuidadosamente a forma de armazenamento dos dados para que seja possível a utilização das ferramentas computacionais de análise.
  - O que deve ser armazenado?
  - Quando e onde deve ser armazenado?
  - Como será realizado o armazenamento?
  - Qual é a política de *backup?*
  - Quem é responsável*?*

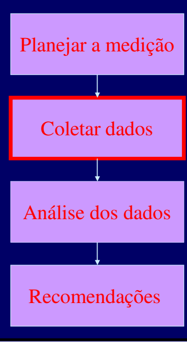
Planejamento da Medição
Análise dos Dados

- Nesta fase do planejamento o avaliador deve considerar os procedimentos de análise a serem realizados e como serão apresentados os resultados.

Planejamento da Medição

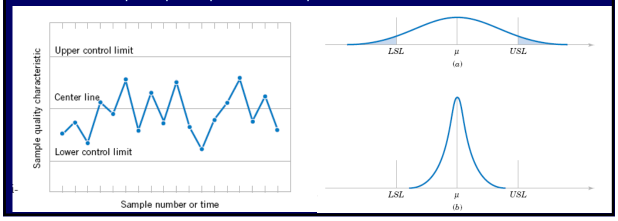
- O resultado do planejamento é um documento que define o PROTOCOLO DE MEDIÇÃO (Plano de Medição), que descreve a coleta dos dados, armazenamento, análise e apresentação dos dados.
- Este protocolo deve circular e ser bem conhecido por todos aqueles que deverão aplicá-lo.
- Um planejamento para revisão dos protocolos é recomendável.

Procedimento de Medição



Coleta dos Dados

- Esta fase corresponde a atividade obtenção dos dados, estabelecida na fase de planejamento.
  - Garanta que as amostra são selecionadas de maneira aleatória.
  - Registre os dados e as condições presentes no momento da medição.
  - Examine a amostra para garantir que o processo é suficientemente estável para que se possa realizar previsões.



Coleta dos Dados

- Se ocorrerem imprevistos, tais quais dados fora de faixa, dados suspeitos, o avaliador deve cuidadosamente rever o experimento.
  - Análise exploratória dos dados.
  - É melhor corrigir neste momento do que deixar para depois.
  - Qualidade dos dados.
- O armazenamento de arquivos *log* são essenciais.

Procedimento de Medição

Planejar a medição

↓

Coletar dados

↓

Análise dos dados

↓

Recomendações

Análise dos Dados

- Esta fase corresponde a aplicação de métodos estatísticos para a análise dos dados coletados, apresentando-os de maneira adequada. Os resultados mais importantes devem ser ressaltados.
  - Apresente os dados graficamente.
  - Verifique se as critérios assumidos para se estimar o tamanho da amostra e para analise foram consideradas. Se for o caso, efetue correções (incluindo coleta de dados adicionais).
  - Analise os dados.
  - Realize analise de sensibilidade, considerando outras amostras e veja os efeitos nas conclusões. Se for o caso, reveja as conclusões.

Procedimento de Medição

Planejar a medição

↓

Coletar dados

↓

Análise dos dados

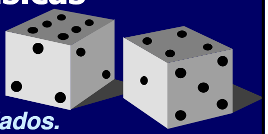
↓

Recomendações

Apresentação dos Resultados e Recomendações

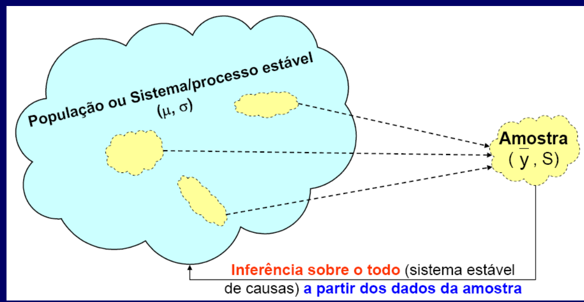
- Escreva um relatório que sumarize a analise realizada, enfatizando as conclusões de maneira significativa com relação ao problema original.
- Apresente os resultados de maneira gráfica apropriada.
- Faça recomendações (se for o caso) para eventuais ajustes no sistema (processo).

Definições Básicas



- Estatística Descritiva: *Obtenção e análise de dados.*
- Inferência Estatística: análise, decisão ou estmativa baseada nos dados.
- População: conjunto de todas a medidas de interesse.
- Amostra: porção da população através da qual informações são obtidas.

População Versus Amostra



Definições Básicas

- **Amostra Aleatória Simples**: uma amostra na qual cada item da população tem chances iguais de serem selecionados.
- **Censo**: seleção de todos os itens da população.
- **Parâmetro**: medida calculada da população.

Definições Básicas

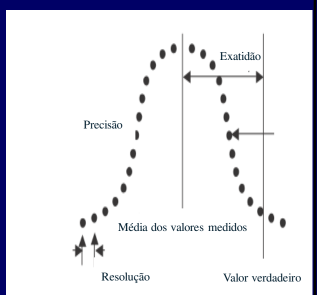
- Estimativas (*Estimations*) são baseadas nos resultados de experimentos.
- O conjunto de todos os possíveis valores de um experimento é denominado de **população**.
- **Parâmetro**: medida calculada da população.
- **Censo**: seleção de todos os itens da população.
- Métodos de inferência estatística auxiliam na estimativa de parâmetros da população através da escolha adequada de um sub-conjunto representativo da população (**amostra**)

Definições Básicas

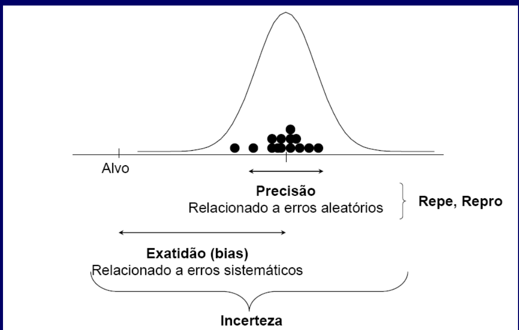
- Estimativas (*Estimates*) são valores calculados de amostras observadas.
- **Amostra aleatória** é um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.
- **Amostra Aleatória Simples**: uma amostra na qual cada item da população tem chances iguais de serem selecionados.
- **Estatística** é qualquer função de valores de variáveis aleatórias. $\hat{\Theta} = \Theta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- **Estimador** é qualquer estatística usada para estimar um valor de um parâmetros da população.

Definições Básicas

- Exatidão (*accuracy*),
  - a diferença entre o valor medido e o valor referência correpondente.
- Precisão
  - É um medida da dispersão do conjunto de dados obtidos na medição. Esta relacionada a repetitibilidade.
- Resolução
  - Correponde a menor alteração que pode ser detectada por ferramental de medição.

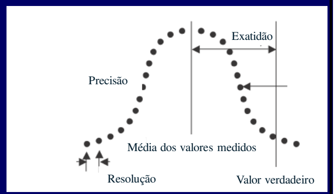


Definições Básicas



Erros em Experimentos de Medição

- Erros devido a
  - exatidão (*accuracy*),
  - precisão,
  - resolução.



- Modelo matemático do erro.
- Intervalo de confiança.
- Quantas medidas precisam ser obtidas para que se tenha o erro máxima almejado?

Erros em Experimentos de Medição

- Qual alvo, superior ou inferior, exibe o **menor viés**?

- Qual alvo exibe resultados **mais “precisos”**?

- Qual você prefere?

Erros em Experimentos

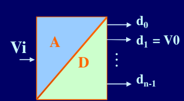
- Erros → *"ruído"* nos valores medidos
- Erros Sistemáticos
  - Normalmente é resultado e má condução do experimento.
  - Em muitas situações os erros sistemáticos sobre a exatidão do sistema de medida pode ser controlado
    - através da experiência do condutor do experimento,
    - isolamento do sistema.
- Exemplos
  - Esqueceu de limpar a cache antes de executar a aplicação.
  - Alteração de temperatura modifica o relógio

Erros em Experimentos

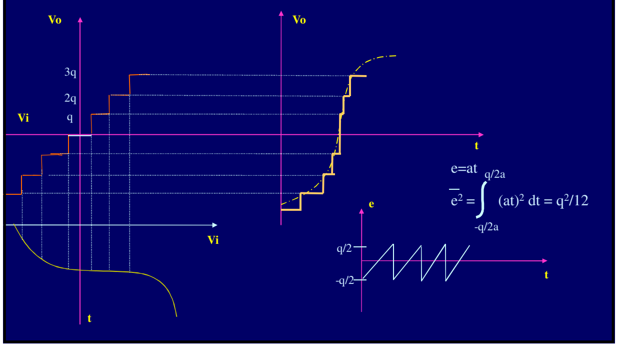
- Erros aleatórios
  - Imprevisíveis, não-determinísticos
  - Normalmente não há viés.
- Resultado de
  - Limitações das ferramentas de medição
  - Leitura feita pelo observador da informação provida pela ferramenta
  - Presença de uma atividade aleatória (não suficientemente compreendida) no sistema.
- Normalmente é difícil controlar
  - Usa-se ferramentas estatísticas para se caracterizar e quantificar (interlavo de confiança)

Quantização

- É a aproximação que envolve a dimensão real da grandeza medida e a resolução do ferramental disponível.
- Operação não-linear
- Intervalos entre níveis: *quantum* (q)



Quantização



Erros de Quantização

- É um erro inerente da ferramental utilizado, pois a operação de quantização é não-linear.
  - Tem valor absoluto de 0,5 quantum.
  -
  - Este erro depende apenas da resolução do sistema.
  - É um erro teórico

Temporizadores de Intervalo

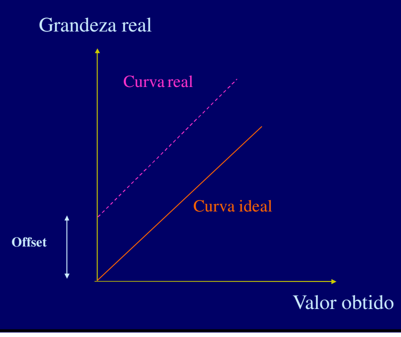
- Ferramenta fundamental para medição,
- Prover uma base de tempo,
- Possibilita a medição de tempo de execução.

Resolução

- É comumente definida como a menor mudança dectada como fração do fundo de escala.
  - **r** = *quantum/fundo de escala*
  - **r = 1/2^n**
- Se n=10, r=1/1024 ≈ 1/1000 = 0,1%

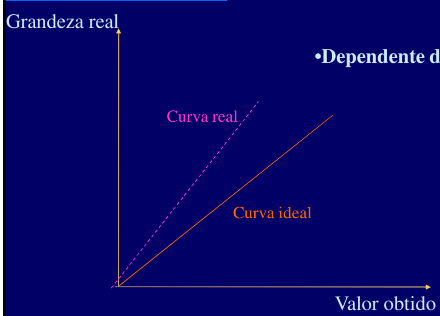
Erro de Offset

•É constante

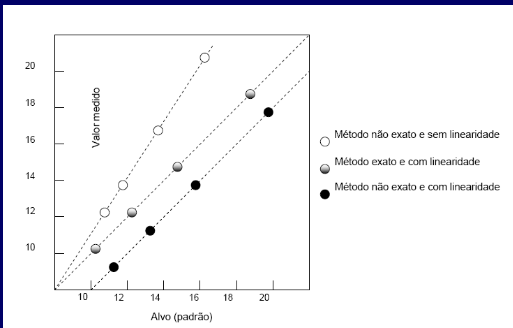


Erro de Linearidade

•Dependente do valor de entrada.



Definições Básicas



Definições Básicas

- **Ausência de viés (exatidão): informa que, em média, o estimador deve prover o valor verdadeiro.**
- **Eficiência: informação a respeito da variabilidade de um estimador em relação a outro.**
- **Consistência: informa que o valor, em termos probabilíticos, deve convergir para o valor verdadeiro**
- **Fidelidade.**

Propriedades de um estimador

- **Estimador: é qualquer estatística $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ usada para estimar o valor do parâmetro θ da população.**
- **Ausência de viés (exatidão): informa que, em média, o estimador deve prover o valor verdadeiro.**

Uma estatística $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é um estimador não viesado de um parâmetro θ se $E[\hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta.$

Propriedades de um estimador

- **Eficiência: informação a respeito da variabilidade de um estimador em relação a outro.**

Um estimador $\hat{\Theta}_1$ de um parâmetro θ é dito ser mais eficiente que um outro estimador $\hat{\Theta}_2$ se:

1. **$\hat{\Theta}_1$ e $\hat{\Theta}_2$ são estimadores de θ**
2. **$\mathrm{Var}[\hat{\Theta}_1] \leq Var[\hat{\Theta}_2],\ \forall\, \theta$**
3. **$\mathrm{Var}[\hat{\Theta}_1] < Var[\hat{\Theta}_2]\ \ \exists\, \theta$**

Relaciona a precisão dos estimadores.

Propriedades de um estimador

- **Consistência: informa que o valor, em termos probabilíticos, deve convergir para o valor verdadeiro**

Um estimador $\hat{\Theta}$ de um parâmetro θ é dito ser consistente se $\hat{\Theta}$ converge, em probabilidade para θ.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\Theta} - \theta| \geq \epsilon) = 0.$$

n é o tamanho da amostra.

Está associada a exatidão do estimador.

Estratégias para medição

- *Event driven*
- *Tracing*
- Amostragem
- Indireta
- *Profiling*

Eventos

- Muitas estratégias de medição são baseadas em eventos.
- Evento são mudanças predefinidas no estado do sistema.
- A definição depende da métrica a ser avaliada.
  - Referência a memória,
  - Acesso a disco,
  - Mudança do valor do registrador de estado,
  - Mensagem na rede,
  - Interrupção do processador
  - etc

Classificação dos Eventos

- Métrica de ***contagem*** de eventos
  - O número de ocorrência do evento E1

  Ex.:
  - Número de falta na cache
  - Número de operações de I/O
  - Número de interrupções do processador
  - Número de itens recebidos

Classificação dos Eventos

- Métricas baseadas em ***eventos secundários***
  - Registra-se um valor quando sempre que ocorre um evento,
  - Registra o tamanho do bloco para cada operação de I/O,
  - Contagem do número de operações,
  - Encontra-se a tamanho médio da informações de I/O transferida.

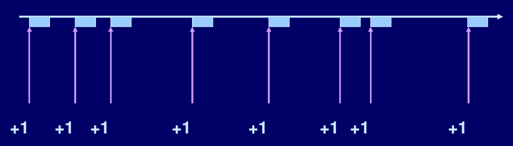
Event-Driven Measuring

Event-Driven

- A ferramenta básica para implementar esta estratégia é um contador.
- Registra a informação necessária apenas na ocorrência dos eventos selecionados,
- Altera o sistema para registrar o evento,
- Pode fazer *dump* dos dados após a finalização da aplicação.
  - Ex.: contador do número de execução da rotina de *page fault*.

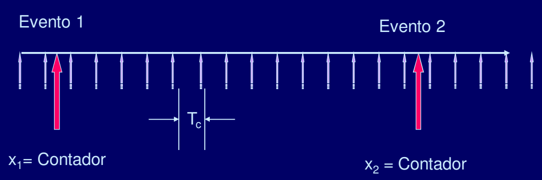
Event-Driven

- Medição
  - Conta exatamente 8 eventos



Event-Driven

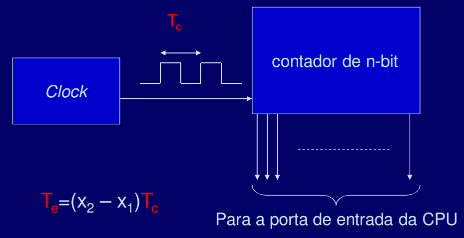
- Temporizadores de Intervalo
  - Conta o número de pulsos entre dois eventos.



$T_e=(x_2 - x_1)T_c$

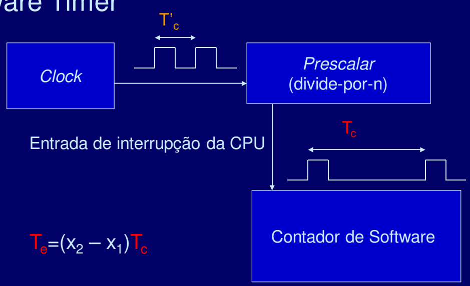
Event-Driven

- Hardware Timer



Event-Driven

- Hardware Timer



Obs.: fale sobre a Interrupção INT 08h, INT 1Ch (processadores X86).

Event-Driven

- Temporizador software:

Start_count = read_timer();

porção do programa a ser medido

Stop_count = read_timer();

Elapsed_time = (stop_count – start_count)* clock_period;

Event-Driven

- ***Timer Rollover***
  - Contador de n-bit
    - *contagem* = $[0, 2^n-1]$
  - *Rollover* = transição da $(2^n - 1) \rightarrow 0$
  - Se ocorre *rollover* entre eventos *start/stop*
    - então *contador* = $(x_2 - x_1) < 0$
  - Verifique se *contador* < 0
    - Medir outra vez
    - Some 2^n a contagem

Event-Driven

- *Overhead* no sistema
  - Apenas quando ocorre o evento de interesse,
  - Eventos pouco freqüentes → **pouca perturbação**
  - Eventos freqüentes → forte perturbação.
- O comportamento do sistema continua sendo típico?
  - A perturbação altera o sistema em medição

Event-Driven

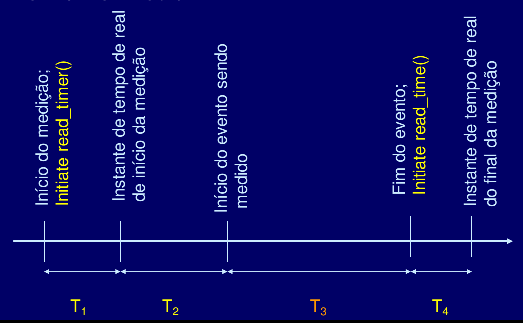
- **Timer Overhead**

```
start_count = read_timer();
    porção do programa a ser medido
stop_count = read_timer();
elapsed_time = (stop_count – start_count)* clock_period;
```

- Para acessar o *timer*
  - Mín. de 1 leitura em memória → *subroutine call*
  - Mín. of 1 escrita em memória → *subroutine call*
- Uma vez no *start*, e outra vez no *stop.*

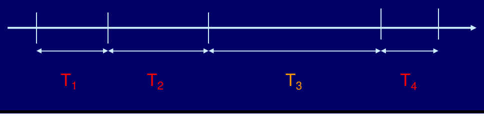
Event-Driven

- **Timer Overhead**



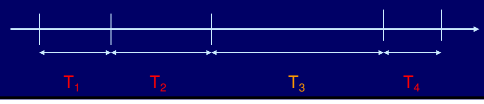
Event-Driven

- **Timer Overhead**
  - T_1 = tempo para ler o contador,
  - T_2 = tempo para armazenar o valor do contador,
  - T_3 = intervalo de tempo do evento em medição,
  - T_4 = tempo para ler o contador
    - $T_4 = T_1$



Event-Driven

- **Timer Overhead**
  - T_e = intervalo de tempo do evento = T_3
  - No entanto, o tempo medido é:
    - $T_m = T_2 + T_3 + T_4$
  - $T_e = T_m - (T_2 + T_4) = T_m - (T_1 + T_2)$
  - *Timer overhead* = $T_{ovhd} = (T_1 + T_2)$



Event-Driven

- **Timer Overhead**
  - Se $T_e >> T_{ovhd}$
    - Ignore o *overhead*
  - Se $T_e \approx T_{ovhd}$
    - Medição será altamente suspeita
  - T_{ovhd} pode variar substancialmente,
  - *Good rule of thumb*
    - T_e deve ser 100-1000x > T_{ovhd}

Event-Driven

- Aspectos Importantes
  - Depende de quando o evento ocorre,
  - Pode não ser fácil se estimar perturbações,
  - Por quanto tempo medir?
  - Pode se uma boa alternativa quandos os eventos inseridos têm baixa baixa freqüência de execução.

Medição Indireta

Medição Indireta

- Usado quando a métrica desejada não pode ser obtida diretamente,
- Mede-se algo diretamente e deriva-se ou se deduz a métrica desejada,
- Depende da habilidade e criatividade do avaliador

Medição Indireta

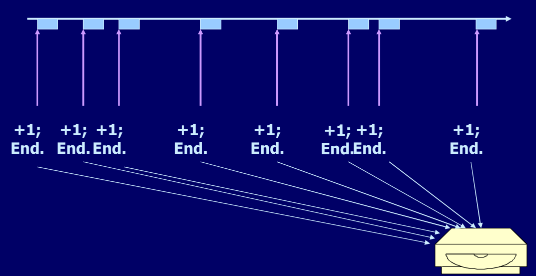
- Métricas baseadas em ***eventos secundários***
  - Registra-se um valor quando sempre que ocorre um evento,
  - Registra o tamanho do bloco para cada operação de I/O,
  - Contagem do número de operações,
  - Encontra-se a tamanho médio da informações de I/O transferida.

Tracing

Tracing

- Baseada na estratégia *event-driven*
- No entanto, registra o estado do sistema:
  - Ocorrência do evento - contagem
  - Informação adicional para identificar o evento
  - Ex.: endereço que causou *page faults*
  - Em processadores pode ser implementado através de: *single step interruption, breakpoint interruption.*
    - Processadores da família X86: INT 01h, INT 03h.
- *Overhead*
  - Devido ao acesso à memória ou disco
  - Devido ao registro do estado do sistema
- Perturbação relativamente alta.

Tracing

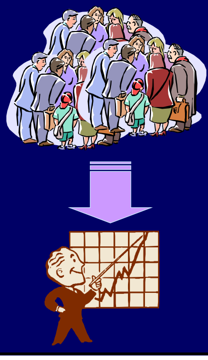


- Registra 8 eventos e mais outros dados.

Amostragem

Amostragem estatística

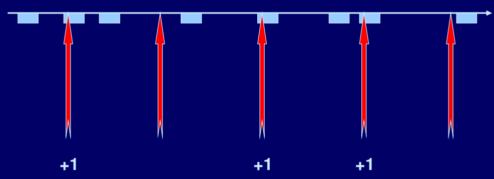
- Seleciona um conjunto aleatório da população,
- Obtém informação apenas deste sub-conjunto,
- Infere-se sobre os parâmetros da população,
- Os resultados são resumos estatísticos com probabilidades de erro.



Amostragem

- Registra o estado necessário em intervalos de tempo
- *Overhead*
  - Independente da freqüência específica do evento,
  - Depende da freqüência de amostragem
- Perde alguns eventos
- Produz resumo estatístico
  - Pode perder eventos raros,
  - Cada replicação produzirá resultados diferentes.

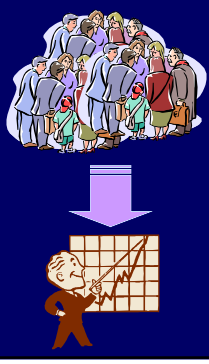
Amostragem



- Conta 3 eventos em 5 amostras

Amostragem estatística

- Seleciona um conjunto aleatório da população,
- Obtém informação apenas deste sub-conjunto,
- Infere-se sobre os parâmetros da população,
- Os resultados são resumos estatísticos com probabilidades de erro.



Comparação

	Contagem de eventos	*Tracing*	Amostragem
Resolução	Cont. exata	Info. detalh.	Resumo estatístico
Overhead	baixo	alto	Constante
Perturbação	~ #eventos	alta	Fixo

Comparação

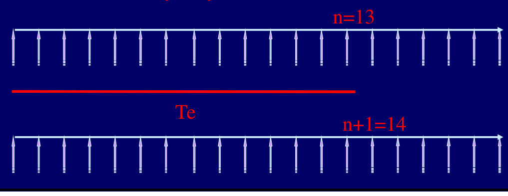
- **Contagem de eventos**
  - Melhor para eventos de baixa freqüência,
  - Necessário quando uma contagem exata é exigida.
- **Amostragem**
  - Melhor alternativa quando a freqüência dos eventos é alta,
  - Se um resumo estatístico é adequado.
- ***Tracing***
  - Adequado quando informações adicionais são necessárias.

Erro de quantização

Tc – Período do clock

Te = nTc + Δ – Duração do evento

nTc < Te < (n+1) Tc

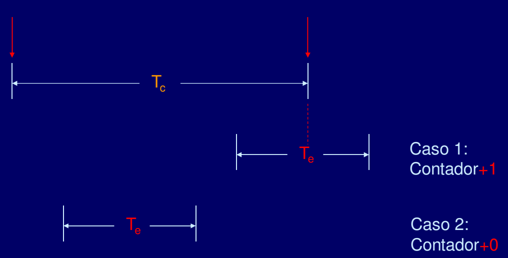


Medidas Aproximadas de Intervalos de Tempo Curtos

Medidas Aproximadas de Intervalos de Tempo Curtos

- Como medir um evento, cuja duração é menor que a resolução do ferramental de medição (por exemplo, o clock - T_c)?
- Não é possível medir diretamente um evento que $T_e < T_c$
- O *Overhead* torna difícil medir em situações em que $T_e > nT_c$, quando n é um inteiro pequeno.

Experimento de Bernoulli



Experimento de Bernoulli

- Experimento de Bernoulli
  - Resultado= +1 com probabilidade *p*
  - Resultado = +0 com probabilidade (1-*p*)
  - Equivalente ao lançamento de uma moeda (com viés – se p≠0,5) ,
- Repita *n* vezes
  - Aproxima-se de uma distribuição binomial
  - Apenas aproxima, pois não há garantia de que cada medição seja independente.
    - Na prática, normalmente é próximo.

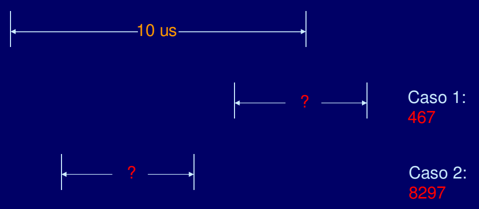
Experimento de Bernoulli

- *m* = número de ocorrência do Caso 1 Contador+1
- *n* = Número total de medidas,
- A proporção média é a razão *m/n*
- Use intervalo de confiança para proporção.

$$T_e = \frac{m}{n} T_c$$

Exemplo

- Resolução do Clock = 10 us
- n = 8764 medições
- m = 467 ticks de clock ticks contados
- 95% confidence interval



Exemplo

$$(c_1, c_2) = \frac{467}{8764} \mp 1.96 \sqrt{\frac{\frac{467}{8764}\left(1 - \frac{467}{8764}\right)}{8764}}$$
$$= (0.0486, 0.0580)$$

- Escalar pelo período de clock = 10 us
- Probabilida de 95% do tempo do evento estar no intervalor (0.49, 0.58) us Welcome to Minitab, press

Test and CI for One Proportion

Sample	X	N	Sample p	95% CI
1	467	8764	0,053286	(0,048676; 0,058196)

Obtido através do MINITAB

Profiling

Profiling

- Características básicas
  - Caracterização do comportamento global,
  - Fornece uma visão global da aplicação,
  - Obtém-se o tempo de "permanência" em cada funcionalidade.

Profiling

- Fornece um visão global do tempo de execução da aplicação,
- Calcula-se a proporção do que se permanece em determinados estados em relação ao tempo total.
  - Fração de tempo em cada rotina,
  - Fração de tempo no núcleo do SO,
  - Fração do tempo em operações de I/O,
- Encontra-se gargalos e *hot-spots*
  - Otimize estas parte primeiro.

Profiling

- Fornece um visão global do tempo de execução da aplicação.
- Normalmente utlilizados para:
  - encotrar *mixes* de instruções utilizadas,
  - estatístics de uso de registradores,
  - estatísticas de desvios.
- Comumente aceitam:
  - um programa executável como entrada,
  - decodificam e analisam as intruções do executável.
- Adicionam código (*probes*) à aplicação a ser monitorada. Alguns adicionam o código (probes) durante a compiliação
- ou obtém amostras do contador de programa.

Profiling

Estratégias:

- *Basic Block counting*
- *Program Counter sampling*

Profiling

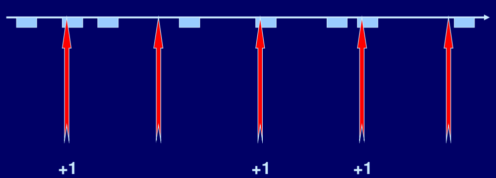
- Contagem de Bloco Básico
  - Bloco Básico
    - Seqüência de instruções sem desvios de fluxo,
    - Quando a primeira instrução é executada, todas as demais do mesmo bloco serão executadas,
    - Entrada única e saída única.

Profiling

- Contagem de Bloco Básico
  - Gere um programa *profile* inserindo instruções adicionais em cada bloco:
    - Incremente um único contador em todas as vezes que se entra no bloco.
  - Gere um histograma da execução do programa.
  - Pode realizar um pós-processamento para encontrar a freqüência de execução das instruções (dos blocos).

Profiling

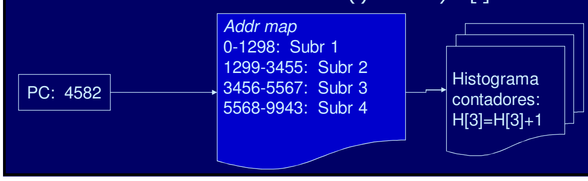
▪Amostragem do Contador de Programa



- Periodicamente interrompe a aplicação em intervalos de tempo fixos,
- Registra-se a informação do estado no serviço de interrupção,
- Após a finalização, obtém-se um *profile* global

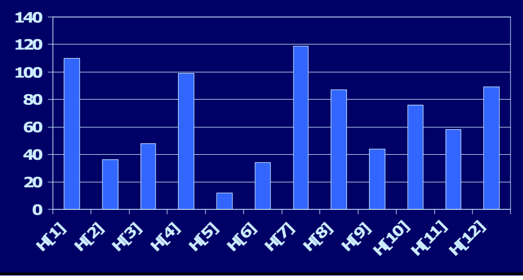
Profiling

- Em cada interrupção
  - Examina-se o PC no endereço de retorno armazenado na pilha,
  - Usa-se o mapa de endereço para se referenciar a sub-rotina i.
  - Incrementa-se o elemento (i) do *array* H[i]



Profiling

▪Amostragem do Contador de Programa



Profiling

▪Amostragem do Contador de Programa

- n = total de interrupções,
- Pós-processamento
  - H[i]/n = proporção de execução na sub-rotina i
  - (H[i]/n) * (Tempo de observação) = Tempo em cada sub-rotina i

Profiling

▪Amostragem do Contador de Programa

- Neste processo
  - Diferentes contagens são obtidas a cada vez que o experimento é realizado,
- Infere-se sobre o comportamento do programa a partir de uma amostra.
- Deve ser utilizado intervalo de confiança para quantificar a precisão dos resultados.

Profiling

▪Exemplo1
(Amostragem do Contador de Programa)

- Tempo entre interrupções = 10 ms
- H[A] = 12 interruções na sub-rotina A,
- n = 800 amotras
  - Programa executou por 8 s
- Tempo na sub-rotina A?
  - Intervalo de confiança de 99%
- p = H[A] /n = 12 / 800 = 0,015

Profiling

$$(c_1, c_2) = 0.015 \mp 2.576 \sqrt{\frac{0.015\,(1-0.015\,)}{800}}$$

$$= (0.0039\ ,0.0261\ )\ \%$$

$$(8 \times 0.0039\ ,8 \times 0.0261\ ) = (0{,}0312,\quad 0{,}2088)\,\mathrm{s}$$

- 99% de probabilidade de que o programa permaneça entre 0,39-2,61% (proporção) do seu tempo de execução na sub-rotina A
- Intervalo largo.
- No entanto, em menos de 3% do tempo de execução se esteve dentro da sub-rotina A,
- Inicie otimizando em outro local.

Profiling

▪Exemplo2
(Amostragem do Contador de Programa)

- Tempo entre interrupções = 40 us
- 36128 interrupções na sub-rotina A (H[A])
- Programa executou por 10 s
- Qual o tempo da sub-rotina?
  - intervalo de confiança de 90%
- H[A] = 36128 (interrupções na sub-rotina A)
- n = 10 s / 40 us = 250 000 (número de total de interrupções)
- p = H[A] /n = 0,144 (proporção de execução na sub-rotina A)

Profiling

$$(c_1, c_2) = 0.144512 \mp 1.645\sqrt{\frac{0.144512(0.855488)}{250000}}$$
$$= (0.144, 0.146)\ \%$$
$$= (10\times 0.144,\ 10\times 0.146)$$
$$= (1.44, 1.46)\text{s}$$

- 90% de probabilidade de que o programa permaneça entre 14.4-14.6% (proporção) do seu tempo de execução na sub-rotina A.
- O tempo que o processador ficou executando o programa está entre 1.44 e 1.46 s.

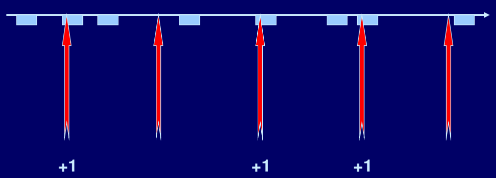
Profiling

▪Amostragem do Contador de Programa

- Redução do Tamanho do Intervalo
  - Adote um intervalo de confiança menor,
  - Colete mais amostras
    - Execute o programa por mais tempo
      - Pode não ser possível.
    - Aumente a taxa de amostragem
      - Pode ser fixada (limitada) pelo sistema ou ferramental.
      - Aumenta o overhead e/ou perturbação
    - Execute múltiplas vezes e some as amostras de cada execução.

Profiling

▪Amostragem do Contador de Programa

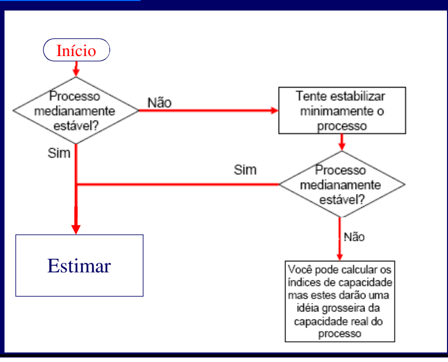


- Amostragem periódica × Amostragem aleatória
- Interrupções devem ocorrer assíncronomente para qualquer evento do sistema (evitar viés, correlação)
  - As amostras devem ser independentes entre si,
  - Caso contrário, a correlação entre os eventos pode ser forte.

Comparação

	Amostragem do Contador de Programa	Contagem de Bloco Básico
Saída	Estimativa estatística	Contagem exata
Overhead	Rotina de serviço de interrupção	Intruções extra em cada bloco
Perturbação	Aleatoriamente distribuída	Alta
Repetitibilidade	Dentro de variância estatística	Perfeita

Orientação para Medição



Orientação para Medição

- A estabilidade pode ser calculada utilizando CEP (X,R,S) para verificar a posição e variabilidade.

Aferição do Processo de Medição

•Número de categorias Distintas (Minitab)
•Regra dos dez:

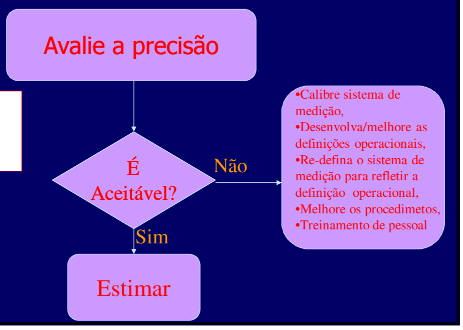
Range/resolução > 10

Rule of Ten

Aferição do Processo de Medição

•CEP
•Estudo de viés
•Estudo de linearidade
•Verficação simplificada

Aferição do Processo de Medição



•CEP
•Verficação simplificada

Aferição do Processo de Medição

•**Verficação simplificada**:

% erro = $\dfrac{5 \times S + 2\,|master - \bar{x}|}{\text{tolerância}}$

•Ideal: < 10%
•Máximo: 30%

•Avalie o resultado de forma cuidadosa

Aferição do Processo de Medição

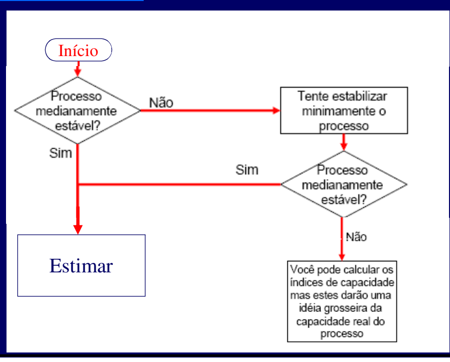
- Exemplo:

Gauge Readings after Rework		
Master Shaft Standardized Reading = 1.0004 Allowable Shaft Dimensions: max = 1.0050, min = 0.9960, so tolerance = 0.0090 (all dimensions in inches)		
Inspector A	Reading #	Dimension
	1	1.0008
	2	1.0006
	3	1.0001
	4	1.0011
	5	1.0004
	6	0.9998
	7	1.0007
Inspector B	1	0.9996
	2	0.9999
	3	1.001
	4	1.0005
	5	1.0001
	6	1.0003
	7	1.0002
Inspector C	1	1.0007
	2	1.0006
	3	0.9996
	4	0.9999
	5	1.0004
	6	1.0006
	7	1.0003
Average X = $\bar{X}$		1.000343
Standard Deviation s =		0.000426
5s =		0.002131

$$\% \text{ gauge error} = \frac{5s + 2 * |master - \bar{x}|}{tolerance} * 100$$

$$\% \text{ gauge error} = \frac{0.0021 + 0.0001}{0.0090} * 100 = 24.4\%$$

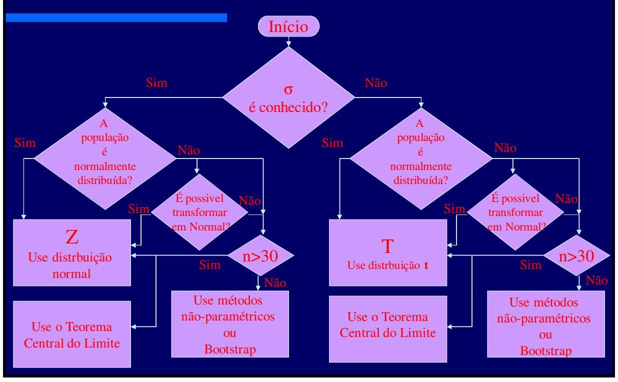
Orientação para Medição



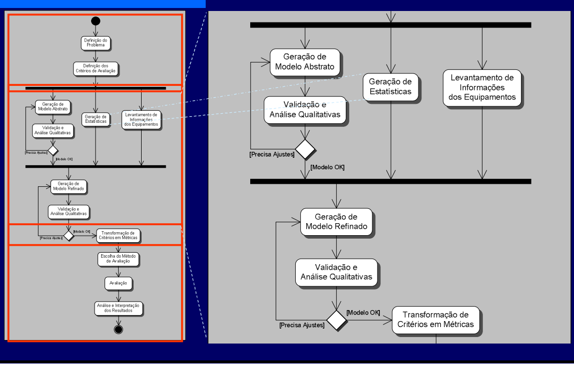
Orientação para Inferência

- Qual é o nível de mensuração dos dados?
  - (Nominal,ordinal,intervalar,razão)
- O estudo envolve uma, duas ou mais populações?
- Há uma afirmativa a ser testada ou um parâmetros a ser estimado?
- Qual é o parâmetro relevante?
  - Média, variância/desvio-padrão, proporção.
- O desvio populacional é conhecido?
- Há razões para supor que a população seja normalmente distribuída?

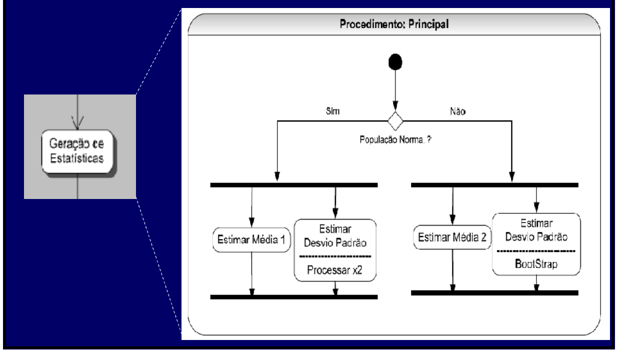
Orientação para Inferência



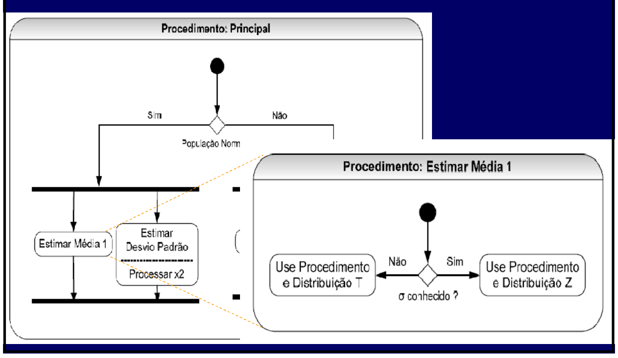
Exemplo de um Fluxo Geral de uma Metodologia



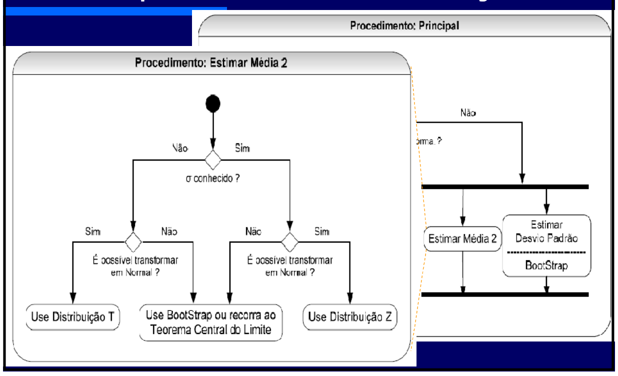
Exemplo de um Fluxo Geral de uma Metodologia



Exemplo de um Fluxo Geral de uma Metodologia



Exemplo de um Fluxo Geral de uma Metodologia



Análise dos Dados

- Indivíduos são objetos descritos por um conjunto de dados.
- Uma variável é uma característica do indivíduo que pode assumir diferentes valores.
- Uma variável categórica situa um indivíduo numa determinada classe.
- Uma variável quantitativa assume valores numéricos
- A distribuição de uma variável nos fornece os valores que esta assume e sua freqüência.

Análise dos Dados

- Níveis de Mensuração

Nível	Resumo	Exemplo	Explicação
Nominal	Apenas categórico. Dados não podem ser arranjado em um esquema de ordem.	Cores, Sim/Não, Casado/solteiro/divorciado /viúvo	Categorias ou nomes
Ordinal	As categorias são ordenada, mas as diferenças não podem ser encontradas ou não têm significado.	Conceitos: A,B,C,D Postos: primeiro, segundo, terceiro...	Um ordem é estabelecida, mas as diferenças não podem ser encontradas ou não têm significado.
Intervalar	As diferenças são significativas, mas não existe ponto zero (inicial) natural e as razões não têm sentido.	Temperaturas Anos	0°C não significa nenhum calor. 40°C não é duas vezes mais quente que 20°C
Razão	Há um ponto zero natural e as razões são significativas.	Peso Preço Distância	40 Km é duas vezes mais distante que 20Km

Análise dos Dados

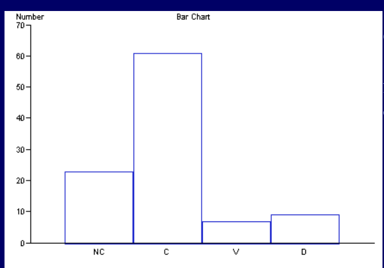
- Alguns gráficos para variáveis categóricas relacionam a categoria a uma contagem ou percentagem.
  - Gráfico de Barras
  - Gráfico de Pareto
  - Gráfico de Setores

Análise dos Dados
Variáveis Categóricas

Estado civil	Número (milhões)	Percentagem
Nunca casado	43,9	22,9
Casado	116,7	60,9
Viúvo	13,4	7,0
Divorciado	17,6	9,2

Análise dos Dados
Variáveis Categóricas

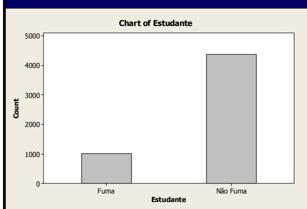
Gráfico de Barras Simples

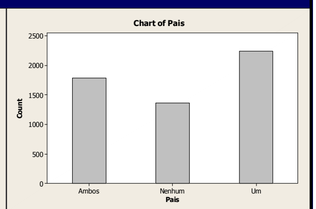


O eixo vertical pode ser uma contagem, freqüência, percentual ou uma função.

Análise dos Dados
Variáveis Categóricas

Gráfico de Barras Simples





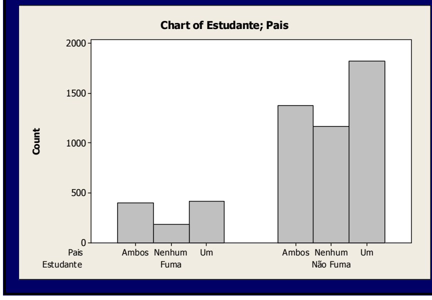
C:\Paulo\Tools\Estatistica Empresarial\Dados\Minitab\cap02\EX02_079.MTW

MINITAB

Análise dos Dados

Variáveis Categóricas

Gráfico de Barras com *Clusters*

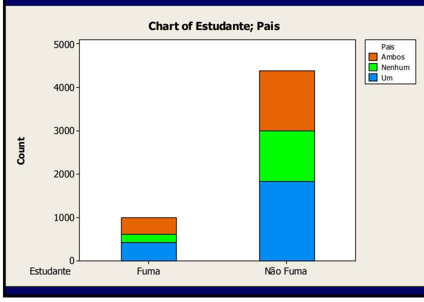


O eixo vertical pode ser uma contagem, freqüência, percentual ou uma função.

Análise dos Dados

Variáveis Categóricas

Gráfico de Barras com Pilha



O eixo vertical pode ser uma contagem, freqüência, percentual ou uma função.

Análise dos Dados

Variáveis Categóricas

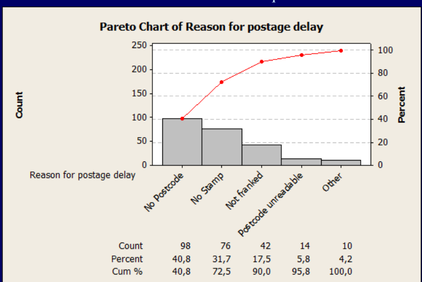
Minitab

C:\Paulo\Tools\Minitab 14\Exemplos\QSBCToolBox\Files & Templates for Six Sigma and MINITAB - V14.0\PARETO-POSTAGE.mpj

Gráfico de Pareto

•Opcionalmente pode-se ter uma linha apresentando freqüência acumulada

•O eixo vertical pode ser uma contagem, freqüência, percentual ou uma função.

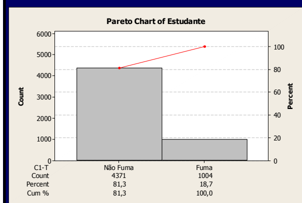


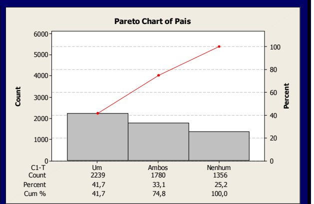
•O gráfico de Pareto é um Gráfico
de Barras para para onde o arranjo
das barras se dá em função da freqüência.
as barras com maior freqüência são
ficam mais a esquerda que as barras de menor freqüência.

Análise dos Dados

Variáveis Categóricas

Gráfico de Pareto





Análise dos Dados

Variáveis Categóricas

Gráfico de Pareto

Table 4 Travels report: São Mateus Frigorífico

Route	Vehicle	Zone	Weight	Exit Date	Return Date	Duration
Route 1	3-axle	1	14	01/04/06	01/12/06	190
Route 1	3-axle	1	13	01/12/06	01/21/06	220
Route 1	3-axle	1	14	01/22/06	01/30/06	192
Route 2	MB 710	2	6	01/02/06	01/04/06	46
Route 2	MB 710	2	6	01/04/06	01/07/06	71
Route 2	MB 710	2	6	01/05/06	01/07/06	57
Route 3	3-axle	3	15	01/03/06	01/10/06	174
Route 3	3-axle	3	13	01/17/06	01/24/06	176
Route 3	3-axle	3	13	01/28/06	02/04/06	171
Route 3	2-axle	4	10	01/05/06	01/10/06	132
Route 3	2-axle	4	8	01/09/06	01/14/06	119
Route 3	2-axle	4	7	01/23/06	01/28/06	118

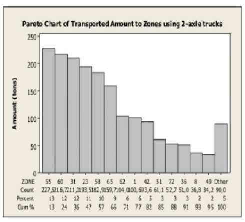
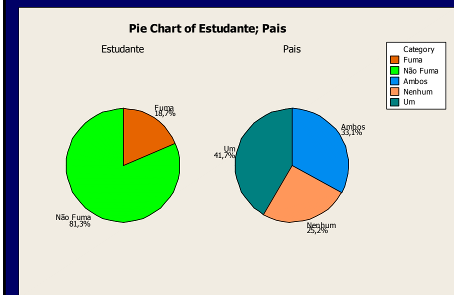


Fig. 32 Pareto analysis of transported amount to zones served by 2-axle trucks.

Análise dos Dados

Variáveis Categóricas

Gráfico de Setores



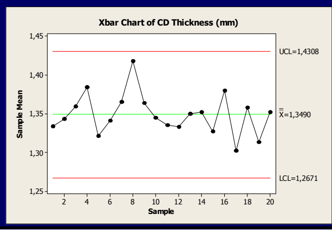
•Os setores podem ser rotulados com contagens, freqüências, percentuais ou funções.

Análise dos Dados

- Distribuição de uma variável quantitativa registra seus valores numéricos e a freqüência de ocorrência de cada valor.
- Alguns gráficos para representação de distribuição.
  - Gráfico de Pontos
  - Gráfico de Ramos-e-folhas
    - Impróprio para representação de grandes conjuntos de dados.
  - Histograma
    - Divide o intervalo de valores de uma variável em intervalos e apresenta o número ou percentagem que se enquadra em cada intervalo.
  - Gráfico de freqüência cumulativa
  - Diagrama de caixa

Análise dos Dados

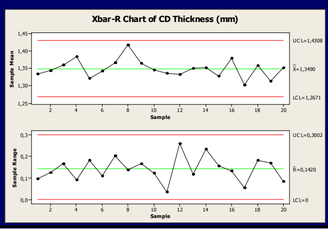
- Processo Estável
  - Os resultados da análise de um processo estável podem ser caracterizados por medidas "resumo".



•Gráficos de Controle:
- •Gráfico x (média)
- •Gráfico R (amplitude)
- •Gáfico S (desvio padrão)

Análise dos Dados

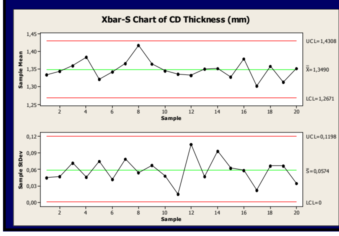
- Processo Estável
  - Os resultados da análise de um processo estável podem ser caracterizados por medidas "resumo".



•Gráficos de Controle:
- •Gráfico x (média)
- •Gráfico R (amplitude)
- •Gáfico S (desvio padrão)

Análise dos Dados

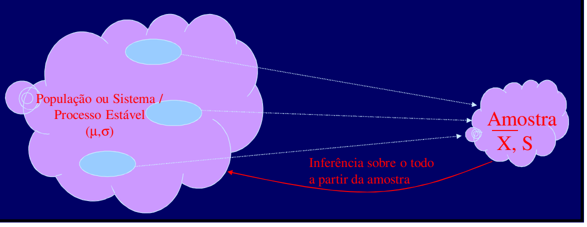
- Processo Estável
  - Os resultados da análise de um processo estável podem ser caracterizados por medidas "resumo".



•Gráficos de Controle:
- •Gráfico x (média)
- •Gráfico R (amplitude)
- •Gáfico S (desvio padrão)

Análise dos Dados

- Processo Estável
  - As medidas resumo permitem realizar inferência sobre o sistema a partir de dados de amostras.



Análise dos Dados

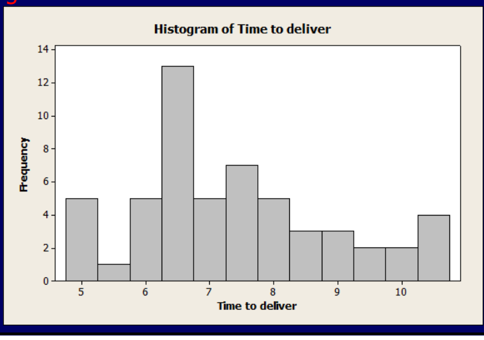
- Histograma
  - Dividir o intervalo dos dados em classes de igual amplitude. Na prática, quando o número de observações é grande, normalmente se considera o Número de Classes =NC=(Número de observações)$^{1/2}$
  - Contar o número de observações em cada classe (tabela de freqüência).
  - Traçar o histograma. As classes são colocadas na horizontal e as freqüências na vertical. Não há espaçamento entre as classes. Cada classe é representada por uma barra de altura igual a freqüência.

Análise dos Dados

Minitab

C:\Paulo\Tools\Minitab 14\Exemplos\QSBCToolBox\ Files & Templates for Six Sigma and MINITAB - V14.0\ TIME TO DELIVER.MPJ

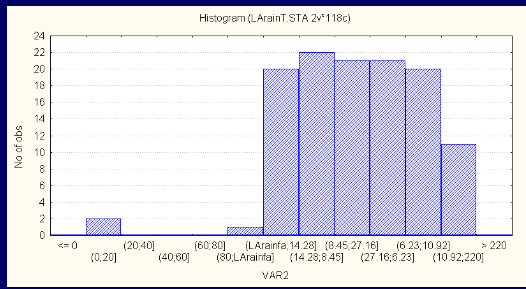
- Histograma



Análise dos Dados

Histograma

- Histograma



Análise dos Dados

- Exame de uma distribuição
  - Padrão geral e desvio acentuados.
  - Padrão geral:
    - Forma
    - Centro
    - Dispersão
  - Desvios acentuados
    - *Outliers*

Análise dos Dados

- Medidas de Centro
  - A Média x de um conjunto de observações é obtida somando os valores das observações e dividindo pelo número de observações.
  - $$\bar{x} \text{ or } \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$
- A média não imune à influência de observações extremas.
- Não é resistente

Análise dos Dados

- Medidas de Centro
  - A Média Aritmética Ponderada.
  - Média Harmônica

$$\bar{x} \text{ or } \mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{N} f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{N}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} x_i}}$$

Análise dos Dados

- Medidas de Centro
  - A Mediana de um conjunto de observações é o ponto médio de uma distribuição. É um número tal que metade das observações é inferior a ele e metade é superior.
  - Disponha todas as observações em ordem de tamanho (da menor para a maior).
  - Se o número de observações (n) é ímpar, a mediana é a observação central e localiza-se (n+1)/2 observações a partir da base.
  - Se o número de observações for par, a mediana é a média das duas observações centrais. A localização é novamente (n+1)/2
  - É resistente

Análise dos Dados

❑ Medidas de Centro

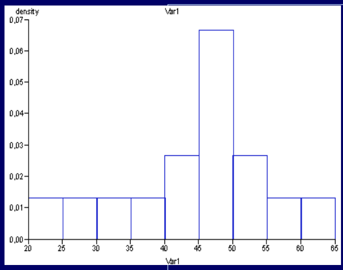
Midrange (Mr) é uma medida de centro.

$$Mr = \frac{Menor\_Valor + Maior\_Valor}{2}$$

Análise dos Dados

Mediana
E
Média

54
59
35
41
46
25
47
60
54
46
49
46
41
34
22



Mediana = 46
Máximo = 60
Mínimo = 22
1Q = 35
3Q = 54
IIQ = 19
$\overline{X}$ = 43,9333
σ = 11,2470
σ^2 = 126,4952

Análise dos Dados

- Medidas de Dispersão
  - Amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor de um conjunto de dados.
  - A = Maior valor – Menor Valor

Medida de dispersão simples, porém de fácil obtenção que provê informações importantes.

Análise dos Dados

- Medidas de Dispersão
  - A descrição numérica mais comum é a combinação da média (para medir o centro) e do desvio-padrão (s) para medir a dispersão.
  - O desvio-padrão mede a dispersão considerando o quão afastadas da média estão as observações. (mesma unidade da média)
  - A variância (s^2) de um conjunto de observações é a média do quadrado dos desvios destas (observações) em relação a média.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}$$

  - Desvio-padrão:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$

Análise dos Dados

- Medidas de Dispersão
  - Propriedades do Desvio-padrão:
    - s = 0 indica que não há dispersão.
    - Quanto mais dispersas as observações maior o s.
    - s não é resistente. Alguns valores extremos (*outliers*) podem tornar s grande.

Análise dos Dados

Ver
Zonas

Table 5 Parameters per zone.

Zone	Short Name	N	Interval (days) Mean	Interval (days) StDev	Time (hours) Mean	Time (hours) StDev	c
55	ZN_1	26	5,62	6,84	75,65	14,94	8
60	ZN_2	24	6,458	3,107	137,17	18,07	9
31	ZN_3	24	6,458	3,176	105,58	25,02	9
23	ZN_4	26	7,27	7,43	78,38	18,99	8
58	ZN_5	22	6,091	3,069	93,73	21,95	9
65	ZN_6	22	6,955	3,848	124	29,55	7
62	ZN_7	12	11,58	6,82	82,83	18	9
1	ZN_8	16	5,38	4,11	118,44	17,05	7
42	ZN_9	11	13,27	8,84	100,45	22,58	9
51	ZN_{10}	8	13,38	6,59	90,63	13,33	8
72	ZN_{11}	11	11,38	13,09	38,3	29,5	7
36	ZN_{12}	9	8,89	6,25	37,44	17,73	6
8	ZN_{13}	4	25,8	23,3	58,8	36,4	9
49	ZN_{14}	4	15,5	14,15	94	14,02	8

Análise dos Dados

- Medidas de Dispersão
  - Coeficiente de Variação descreve o desvio padrão em relação a média. Possibilita a comparar a variação para valores originados de diferentes populações.
    - $CV = s / \overline{x}$

Análise dos Dados

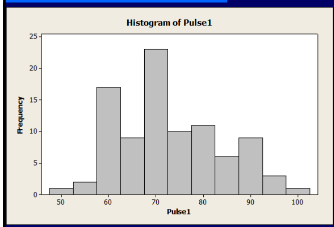
- Quantil
  - O quantil p de uma variável aleatória X é o valor x que soluciona
    - $p = P[X \leq x]$ ou $p = FX[x]$
    - Percentis, Quartis e Mediana são quantis.
  - O p-ésimo percentil de uma distribuição é o valor que tem *p* por cento das observações nele ou abaixo dele.
  - O 50° percentil é a mediana (medida de centro).
  - O 25° percentil é denominado 1° quartil.
  - O 75° percentil é o terceiro quartil.

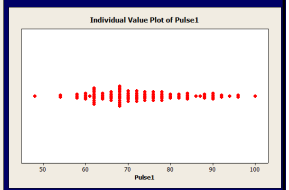
Análise dos Dados

- Medidas e Dispersão
  - Podemos descrever a dispersão (variabilidade) de uma distribuição mediantes os percentis.
  - O 50° percentil é a mediana (medida de centro).
  - O 25° percentil é denominado 1° quartil.
  - O 75° percentil é o terceiro quartil.
  - O 1° quartil pode ser obtido calculando-se a mediana dos dados que estão à esquerda (abaixo) da mediana global.
  - O 3° quartil pode ser obtido calculando-se a mediana dos dados que estão à direita (acima) da mediana global.

Análise dos Dados

Minitab





Descriptive Statistics: Pulse1

Variable	Count	Mean	StDev	Variance	CoefVar	Minimum	Q1	Median	Q3
Pulse1	92	72,87	11,01	121,19	15,11	48,00	64,00	71,00	80,00

Maximum	Range
100,00	52,00

Análise dos Dados

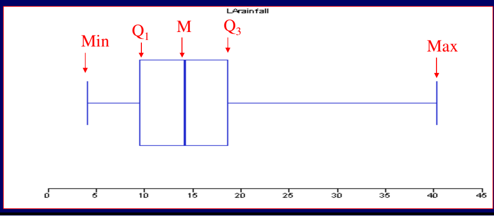
- Medidas e Dispersão
  - Intervalo interquartil: IIQ é a distância entre o primeiro e o terceiro quartil. $IIQ = Q_3 - Q_1$
  - O critério $1{,}5 \times$ IIQ para definir *Outliers* suaves:
    - Dados que estão abaixo de $Q_1 - (1{,}5 \times IIQ)$ são *outiliers* suaves.
    - Dados que estão acima de $Q_3 + (1{,}5 \times IIQ)$ são *outiliers* suaves.
  - Resumo dos cinco (5) números:
    - Mínimo Q_1 M Q_3 Máximo

Análise dos Dados

- Medidas e Dispersão
  - Intervalo interquartil: IIQ é a distância entre o primeiro e o terceiro quartil. $IIQ = Q_3 - Q_1$
  - O critério $3{,}0 \times$ IIQ para definir *Outliers* extremos:
    - Dados que estão abaixo de $Q_1 - (3{,}0 \times IIQ)$ são *outiliers* extremos.
    - Dados que estão acima de $Q_3 + (3{,}0 \times IIQ)$ são *outiliers* extremos.
  - Resumo dos cinco (5) números:
    - Mínimo Q_1 M Q_3 Máximo

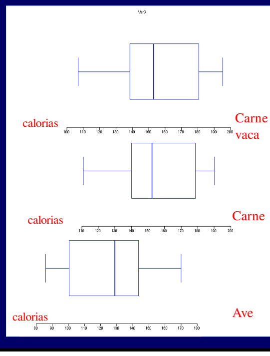
Análise dos Dados

- Diagrama de Caixa é um diagrama do resumo dos cinco número, como os *outiliers* suspeitos marcados individualmente.
  - Algumas ferramentas podem não marcar os *outliers* suspeitos, como também utilizar uma regra diferente do 1,5 IIQ e 3IIQ.



Análise dos Dados

- Diagrama de Caixa é um diagrama do resumo dos cinco número, como os *outiliers* suspeitos Marcados individualmente.
- Comparando distribuições.



Análise dos Dados

Minitab Excel Statistica

- Escolha da medida de centro e de dispersão
  - O resumo dos cinco números é, em geral, melhor do que a média e o desvio-padrão quando as distribuição são assimétricas ou quando a distribuição tiver fortes *outliers*.
  - Quando a distribuição for razoavelmente simétricas e sem *outliers*, a média e o desvio-padrão são recomendados.

- Excel (C:\Paulo\Tools\Statistics\Excel\PLANILHA\pulse.XLS)
- Statistica (C:\Paulo\Tools\Statistics\Statistica\Examples\pulse.sta)
- Minitab (C:\:\Paulo\Tools\Minitab 14\Data\Data\pulse.MPJ)

Análise dos Dados

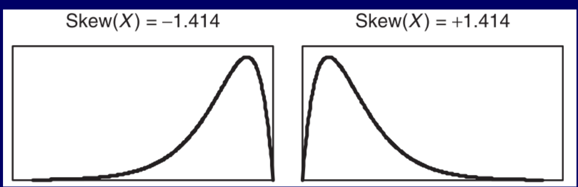
- Formas
  Skewness (Assimétria) e *Kurtose* (Curtose) são estatísticas sem unidade normalizadas de maneira que a Distribuição Normal tem as respectivas estatística igual a 0.
  - Uma distribuição é assimétrica se uma das caudas for maior que a outra.
  - Assimetria (*skewness*)

$$\text{Skew}[X] = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(E[(X - E[X])^2])^{3/2}} = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(V[X])^{3/2}}$$

  - Valores negativos ($\text{Skew}[X] < 0$)indicam que a cauda está a esquerda.
  - Valores positivos ($\text{Skew}[X] > 0$), indicam cauda à direita.
  - $\text{Skew}[X] = 0$ indica simetria.

Análise dos Dados

- Formas
  - Assimetria (*skewness*)



  - Valores negativos ($\text{Skew}[X] < 0$)indicam que a cauda está a esquerda.
  - Valores positivos ($\text{Skew}[X] > 0$), indicam cauda à direita.
  - $\text{Skew}[X] = 0$ indica simetria.

Análise dos Dados

- Formas
  - Curtose – medida de achatamento. Valores negativos indicam achatamento. Valores positivos indicam picos.

$$\text{Kurt}[X] = \frac{E[(X - E[X])^4]}{(E[(X - E[X])^2])^2} - 3 = \frac{E[(X - E[X])^4]}{(V[X])^2} - 3$$

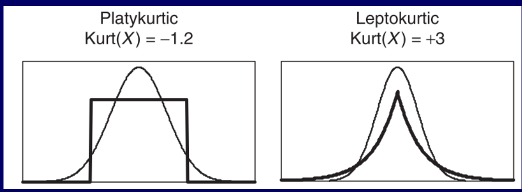
  - $\text{Kurt}[X] < 0$ indica achatamento no centro ou caudas truncadas (*platykurtic*),
  - $\text{Kurt}[X] > 0$ indica pico no centro ou caudas longas (*leptokurtic*),
  - $\text{Kurt}[X] = 0$ é denominada distribuição *mesokurtic*. A distribuição Normal é *mesokurtic*.

Análise dos Dados

TIME TO DELIVER

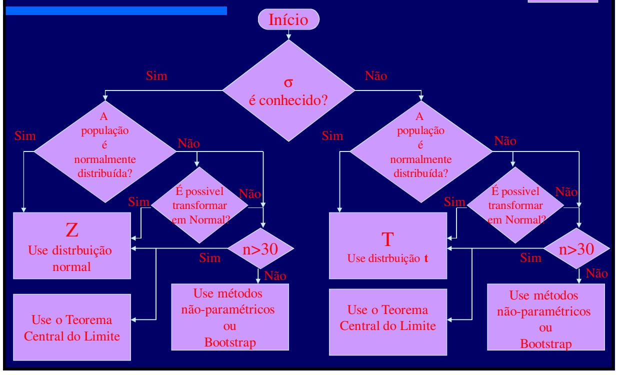
- Formas
  - Curtose

Ver exemplo:
Time to Deliver
Em C:\Paulo\Tools\Minitab 14
\Exemplos\QSBCToolBox
\Files & Templates for Six Sigma and MINITAB - V14.0



- $\text{Kurt}[X] < 0$ indica achatamento no centro ou caudas truncadas (*platykurtic*),
- $\text{Kurt}[X] > 0$ indica pico no centro ou caudas longas (*leptokurtic*),
- $\text{Kurt}[X] = 0$ é denominada distribuição *mesokurtic*. A distribuição

Orientação para Inferência



Medição

- Espaço de Probabilidade
  - Experimento aleatório é um experimento que em cada realização pode gerar diferentes resultados, mesmo que as condições sejam as mesmas em cada realização
  - Evento é qualquer conjunto de resultados (ou saídas) de um experimento.
  - Evento simples é um resultado (ou evento) que não pode ser decomposto em componentes mais simples.
  - O Complementar de evento A é representado po $\overline{A}$ e consiste em todos os resultados em que A não ocorre.

Medição

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω,E,*P*)
  - Ω é o espaço amostral é o conjunto de todos possíveis resultados de um experimento aleatório.
    - É definido em função do objetivo da análise.
    - Pode ser discreto ou contínuo.

Exemplos:

- Considere um experimento em que se seleciona um conector de metal e se mede sua espessura. Os possíveis valores associados a espessura depende da resolução do mecanismo de medição. No entanto, pode ser conveniente definir o espeço amostral através do conjunto de reais positivos.

$$S = R^{+} = \{x \mid x > 0\}$$

Medição

- Ω é o espaço amostral

Exemplos:

- Se se sabe que a espessura está entre 10 e 11 mm, o espaço amostral pode ser definido por:

$$S = \{x \mid 10 < x < 11\}$$

- Se o objetivo da analise é considerar apenas se o conector tem espessura fina, média ou espessa, o espaço de amostral pode considerar apenas os três possíveis resultados:

$$S = \{fino, médio, espesso\}$$

Medição

- Ω é o espaço amostral

Exemplos:

- Se o objetivo da analise é considerar apenas uma parte está em conformidade ou não com a especificação, o espaço amostral pode ser simplificado para:

$$S = \{sim, não\}$$

Medição

- **Espaço de Probabilidade**: OS = (Ω, E, P)
  - Ω é o espaço amostral é o conjunto de todos possíveis resultados de um experimento aleatório.
  - E – conjunto de eventos - é um coleção de subconjuntos de Ω - conjunto de eventos de interesse -, e satisfaz as seguintes condições:
  - Se $A \in E \Rightarrow \overline{A} \in E$
  - Se $A_1, A_2, \ldots$ são todos os eventos então $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in E$

Medição

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω, E, P)
  - P é uma função que mapeia todo evento $A \in E$ em um real, satisfazendo as seguintes condições:

1. $1 \geq P(A) \geq 0, \forall A \in E$
2. $P(\Omega)=1$
3. Se $A1, A2, \ldots$ São disjuntos, então: $P(\cup_{i=1}^{\infty} Ai) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ai)$

Medição

- Espaço de Probabilidade: OS = (Ω, E, P)
- Sejam A e $\overline{A}$ (seu complemento) eventos

$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

- Sejam A e B dois eventos eventos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Medição

- Variável Aleatória é uma função que reflete o resultado de um experimento aleatório. $X: \omega \rightarrow \Re$. $\{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}\ x \in \Re$.
- Uma variável aleatória normalmente é denotada por uma variável maiúscula (X, por exemplo). Após a realização do experimento, o valor obtido da variável aleatória normalmente é representado em letras minúsculas (x=70s, por exemplo).

Variáveis Aleatórias Resumo

- *Probability mass function (pmf)* – Seja Ω um espaço amostral discreto. $p(x)$, que denota uma pmf de uma variável aleatória X, é definida por $p(x) = P[X=x]$, tal que x assume valores de Ω.

Variáveis Aleatórias Resumo

- *Probability mass function (pmf)*

Suponha um sistema de comunicação no qual estejamos interessados em obter a probabilidade de que tenha ocorrido erro em no máximo três bits $P(X \leq 3)$. Considere que os possíveis valores de X são {0,1,2,3,4} erros e suponha que: $P(X=0) = 0{,}6561; P(X=1) = 0{,}2916; P(X=2) = 0{,}0486; P(X=3) = 0{,}0036; P(X=4) = 0{,}0001$.

O evento $\{X \leq 3\}$ é a união dos eventos $\{X=0\}, \{X=1\}, \{X=2\} e \{X=3\}$. Neste caso, os eventos são mutuamente exclusivos. Portanto:

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

Este método também possibilita determinar

$$P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0.0036$$

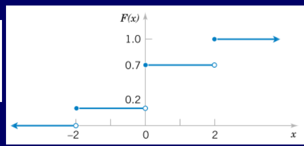
Variáveis Aleatórias
Resumo

- Função de Distribuição de Probabilidade Acumulativa (CDF) de uma variável aleatória X, denotada por F(X), é definida por $F(X) = P[X \leq x]\ \forall\ x \in \Re$
- F(X) é uma função monotônica não-decrescente tal que $0 \leq F(X) \leq 1$, onde $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$
- $F(X) = \sum_{y \leq x} p(y) \Rightarrow F(\infty) = \sum_{\forall y} p(y) = 1$

Variáveis Aleatórias
Resumo

Exemplo:determine a pmf de X, considerando que F(X) é definida como:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.2 & -2 \leq x < 0 \\ 0.7 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$



A pmf em cada ponto é a mudança da CDF em cada ponto, portanto:

$f(-2) = 0.2 - 0 = 0.2 \qquad f(0) = 0.7 - 0.2 = 0.5 \qquad f(2) = 1.0 - 0.7 = 0.3$

Medição

- Para variáveis aleatórias contínuas, a Função de Densidade de Probabilidade (pdf), f(x), é definida por:
  $f(x) = dF(x)/dx$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Como F(x) não é decrescente, f(x)≥0

Medição

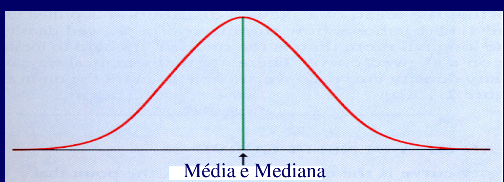
- Distribuições Normais

As curvas de densidade de probabilidade Normais são simétricas, unimodais e em forma de sino e descrevem as distribuições normais. Média, mediana e moda são iguais.

Todas as distribuições normais têm a mesma forma global e são descritas pela média μ e o desvio-padrão σ.

Distribuições Normais

- Distribuições Normais



Distribuições Normais

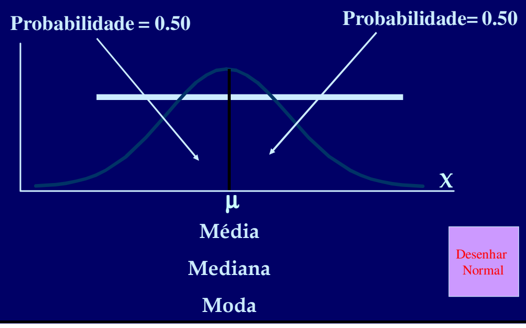
Função de Desensidade das Distribuições Normais

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

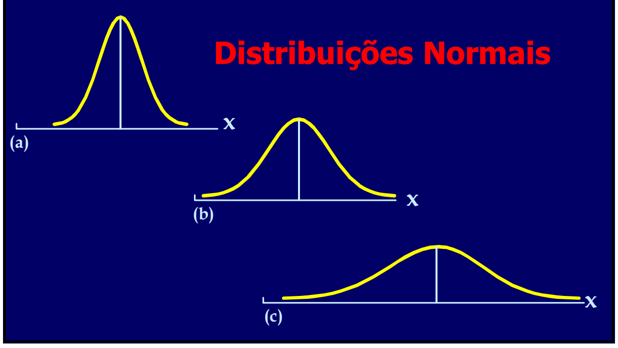
onde:

x = cada valor da variável aleatória contínua que $-\infty < x < \infty$.
σ = desvio-padrão da população
e = **Base do logaritmo natural = 2.7183**
μ = média da população

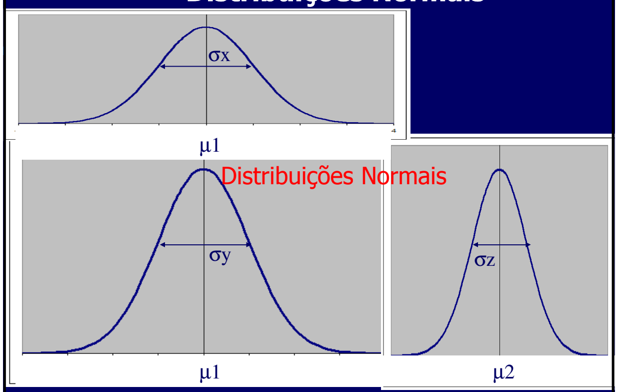
Distribuições Normais



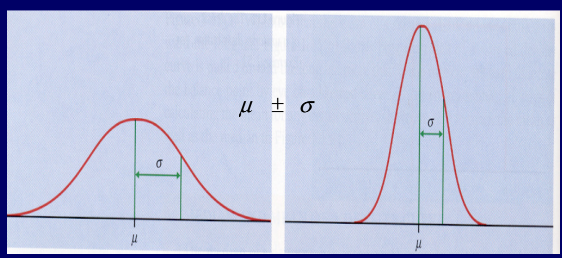
Distribuições Normais-



Distribuições Normais



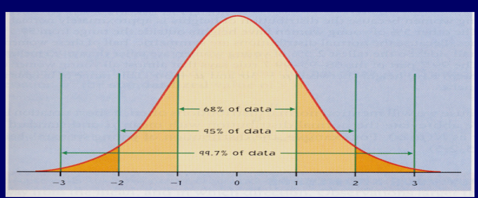
Distribuições Normais



Distribuições Normais

68-95-99.7 Regra

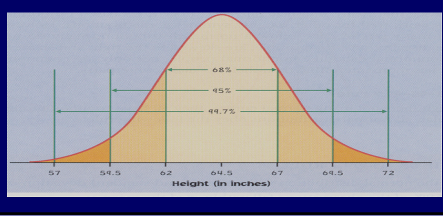
- Curva normal com média μ e desvio padrão σ
  - 68% das observações estão entre ± 1 σ
  - 95% das observações estão entre ± 2 σ
  - 99.7% das observações estão entre ± 3 σ



Distribuições Normais

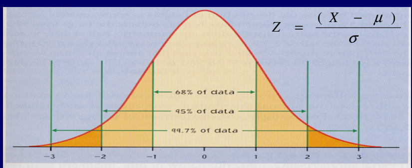
Exemplo

- A distribuição das alturas de mulheres jovens entre 18 e 24 anos é aproximadamente normal com média μ = 64.5 e σ = 2.5 polegadas.
- N(64.5, 2.5) – Notação abreviada da curva normal (N)



Distribuições Normais

- Padronização
  - Expressando valores em termos das distâncias da média.
  - Distância medida em desvios-padrão.
  - Valor padronizado (Z)



Distribuição Normal

Distribuição Normal Padronizada

- Quando se padroniza, todas as distribuições normais têm os mesmos

$$\mu = 0$$
$$\sigma = 1$$

- A padronização de uma variável com distribuição normal N(μ,σ) produz uma nova variável com distrbuição normal padronizada N(0,1).

Distribuição Normal

Distribuição Normal Padronizada

Ex.:

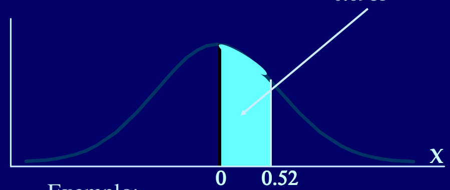
- O peso de uma população de mulheres é descrito pela seguinte distribuição N(64.5, 2.5)
- Qual a probabilidade de uma mulher pesar menos que 68 Kg?
- Qual é o valor padronizado de uma mulher que pesa 68 Kg? 60 Kg?

$$Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$$

Distribuição Normal

Aplicar no Statistica e calcular com Z

Área sob a Curva Normal



Exemplo:

z = 0.52 (ou -0.52)

A(z) = 0.6985 ou 69.85%

Área sob a Curva Normal

Aplicar no Statistica e calcular com Z

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.377	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

0,5 + valor

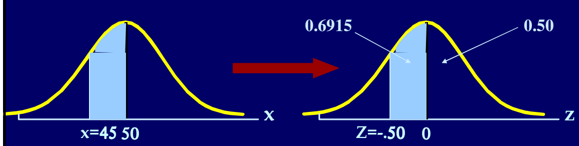
Distribuição Normal

Aplicar no Statistica e calcular com Z e X

Normal Padrão

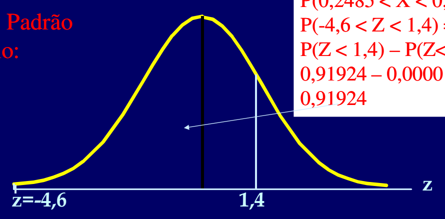
Exemplo:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{45 - 50}{10} = -0.50$$



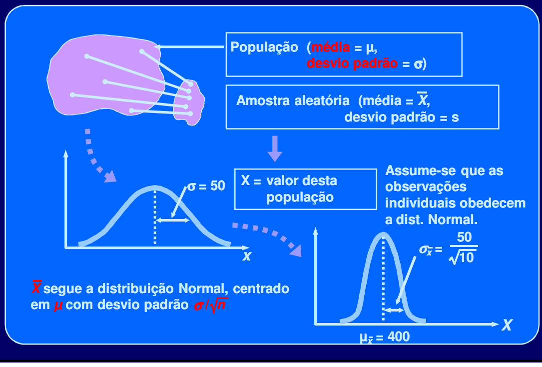
Distribuição Normal

Normal Padrão
Exemplo:

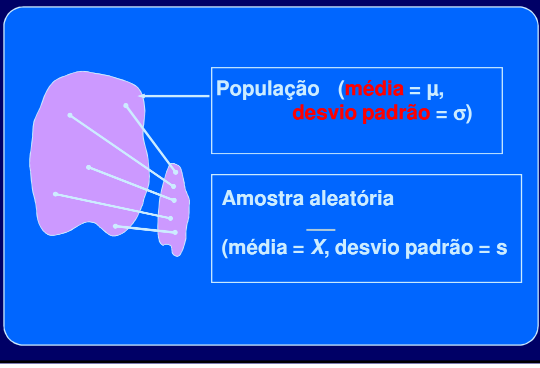


μ=0,2508
σ=0,0005
P(0,2485 < X < 0,2515) =
P(-4,6 < Z < 1,4) =
P(Z < 1,4) – P(Z<-4,6) =
0,91924 – 0,0000 =
0,91924

Curvas Normais



Curvas Normais



Teorema Central do Limite

- Considere $X_1, X_2,...,X_n$ variáveis aleatórias mutuamente independentes e identicamente distribuídas.
- Seja $(x_1,x_2,...x_n)$ uma n-tupla de valores onde x_i é um valor específico de X_i.
- Também se diz que $(x_1,x_2,...x_n)$ é um experimento aleatório de tamanho n.
- A estatística amostral $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é a média

Teorema Central do Limite

Se a população tem média $E[X_i] = \mu$ e variância $Var[X_i] = \sigma^2$, a média de $\bar{X}$ (média das médias) é

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n}\, n\, E[X_i] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$\text{Var}[\bar{X}] = E[(\bar{X} - \mu)^2] = E\left[(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\bar{X}_i - \mu))^2\right] =$$

$$\text{Var}[\bar{X}] = \left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(\bar{X}_i - \mu)^2\right] =$$

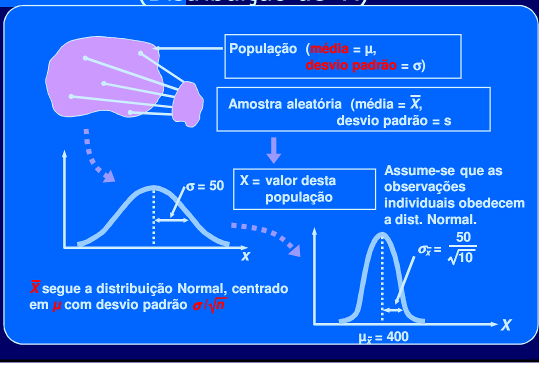
$$\text{Var}[\bar{X}] = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teorema Central do Limite

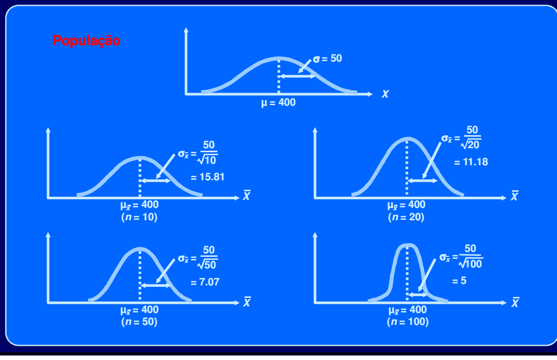
***Quando se obtem amostras grandes da população (n> 30), a média das amostra obedece aproximadamente a ditribuição normal com média μ* e desvio padrão (erro padrão)**

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Teorema Central do Limite
(Distribuição de $\overline{X}$)



Teorema Central do Limite
(Distribuição de $\overline{X}$)

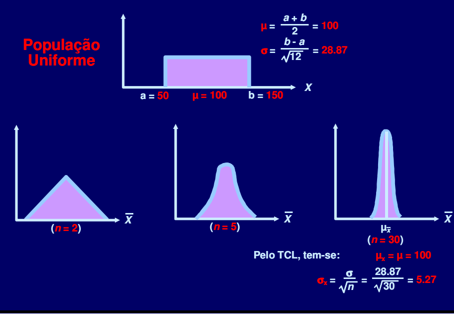


Distribuição de $\overline{X}$

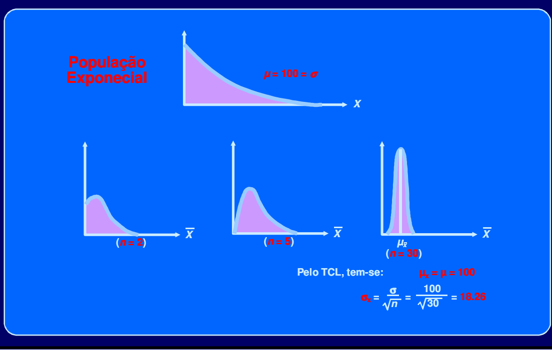
Média $= \mu_{\bar{x}} = \mu$

Desvio padrão $= \sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
(erro padrão)

Teorema Central do Limite
(Distribuição de $\overline{X}$)

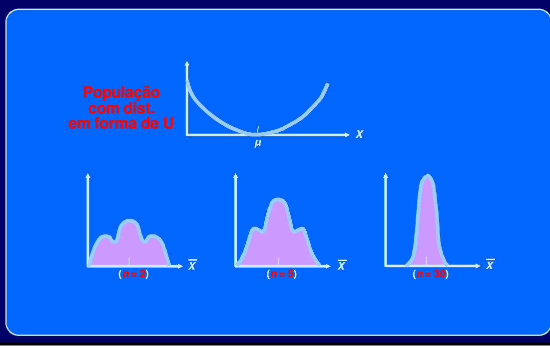


Teorema Central do Limite
(Distribuição de $\overline{X}$)



Teorema Central do Limite
(Distribuição de $\overline{X}$)

Demonstração Minitab



Estimador Não-Viesado

- Estimador:
  Qualquer estatística $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ usada para estimar o valor de um parâmetro θ de uma população é denominado estimador de θ

Um estimador $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é dito não-viesado de um parâmetro θ se $E[\hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta$

Estimador Não-Viesado

- A média amostral $\overline{X}$ é um estimador não-viesado da média da população μ (quando esta existe)

$$
\begin{aligned}
E[\overline{X}] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X] \\
&= \frac{1}{n} n E[X] \\
&= E[X] \\
&= \mu.
\end{aligned}
$$

Estimador Não-Viesado

- A variância amostral

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

é um estimador não-viesado da variância da σ^2 população (quando esta existe)

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \frac{2n}{n-1}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}_{\overline{X}}\overline{X} + \frac{n\overline{X}^2}{n-1} \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \boxed{- \frac{n}{n-1}\overline{X}^2}.
\end{aligned}
$$

Estimador Não-Viesado

Portanto

$$E[S^2] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] - \frac{n}{n-1}E[\overline{X}^2].$$

No entanto

$$E[X_i^2] = \mathrm{Var}[X_i] + (E[X_i])^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

Expansão de Taylor (veremos mais a frente)

E

$$E[\overline{X}^2] = \mathrm{Var}[\overline{X}] + (E[\overline{X}])^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

Variância da média amostral

Desta forma

$$
\begin{aligned}
E[S^2] &= \frac{1}{n-1}n(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Inferência

- Erro Tipo 1 (Erro do Consumidor)
  Rejeição de hipótese (H_0 – hipótese nula), quando esta é verdadeira (α - também chamado de nível de significância).

- Erro Tipo 2 (Erro do Produtor)
  Falha em rejeitar hipótese (H_0 – hipótese nula), quando ela é falsa (β).

Inferência

- Intervalo de Confiança

  – $P(l \leq \mu \leq u) = 1 - \alpha$ (coeficiente de confiança).

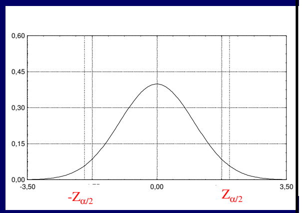
  – $l \leq \mu \leq u$ – Intervalo de confiança.

Inferência

- Intervalo de Confiança
  - Seja X uma variável aleatória com media μ e variância σ^2, e suponha que seja extraída uma amostra aleatória de tamanho n, $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pode-se obter um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ de confiança para μ, considerando-se a distribuição amostral da média amostral $\bar{X}$. Observamos que a distribuição de $\bar{X}$ é normal se X for normal e aproximadamente normal se as condições do Teorema Central do limite forem verificadas.
  - A média de $\bar{X}$ é μ, e a variância é σ^2/n. Assim, a distribuição da estatística $Z = (\bar{X} - \mu)/\ \sigma/n^{1/2}$ é tomada como a distribuição normal-padrão.

Inferência

- Intervalo de Confiança



$P\{-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$

$P\{-Z_{\alpha/2} \leq (\bar{X} - \mu)/\ \sigma/n^{1/2} \leq Z_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$

$P\{\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma/n^{1/2} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\ \sigma/n^{1/2}\}$
$= 1 - \alpha$

Inferência

- Intervalo de Confiança para Média populacional com desvio-padrão conhecido
  - $\bar{X} \pm Z^*(\sigma/\sqrt{n}) \Leftrightarrow \bar{X} - Z^*(\sigma/\sqrt{n}) \leq \mu \leq \bar{X} + Z^*(\sigma/\sqrt{n})$

Valor crítico ($Z_{\alpha/2}$) da tabela da distribuição t quando o GL tende para infinito (última linha da tabela), considerando um dado nível de significância (α)

Inferência

Minitab

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: suponha que um conjunto de atividades, denominado aqui por A1, executadas por um departamento de uma organização seja normalmente distribuído com desvio padrão σ=25min. Uma amostra aleatória simples, com 100 medidas, relativa a mensuração do tempo associado a este conjunto de tarefas foi obtido. Estime o tempo médio associado a este conjunto de atividade com um nível de confiança de 95%.

Inferência

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: Suponha uma linha de produção que fabrica papel de comprimento 11 polegadas e o desvio padrão seja conhecido (σ=0,02 polegadas). Em intervalos periódicos, são selecionados amostras (n=100 folhas) para determinar se o comprimento do papel se manteve em 11 polegadas. Deseja-se uma estimativa com nível de confiança de 97,5%.

Inferência

Statistica

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: (cont.) Uma amostra aleatória foi obtida e o comprimento médio da amostra foi $\bar{X}$ = 10,998.
  - Solução: $\bar{X} - Z^*(\sigma/\sqrt{n}) \leq \mu \leq \bar{X} + Z^*(\sigma/\sqrt{n})$

$10{,}998 - Z^*(0{,}02/10) \leq \mu \leq 10{,}998 + Z^*(0{,}02/10)$

Para nível de confiança de 97,5%, tem-se $Z^* = 1{,}96$, portanto:

$10{,}99408 \leq \mu \leq 11{,}00192$. Desta forma, conclui-se que o processo está operando de maneira apropriada.

Inferência

Statdisk
NromalPopSample

Minitab
NormalPopSample

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: desejamos estimar o tempo de serviço (normalmente distribuído) associado a uma determinada atividade de um departamento de prestação de serviço com um nível de confiança de 99%, considerando que se sabe o desvio padrão (σ=10) deste serviço (da população). Uma amostra aleatória simples, de tamanho igual a 100, foi adequadamente coletada. Forneça o intervalo de confiança para a média.

Inferência

- Intervalo de Confiança para Média populacional com desvio-padrão conhecido
  - Escolha do Tamanho da Amostra

$$\bar{X} \pm Z^*(\sigma/\sqrt{n})$$

$E = Z^*(\sigma/\sqrt{n})$

$n = (Z^*\sigma/E)^2$

E Margem de erro do intervalo de confiança.

Inferência

Statdisk
Funçao:
SampleSizeDetermination
1-α=0.99
E=7
σ=10

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: desejamos determinar o tamanho da amostra necessário se estimar o tempo de serviço (normalmente distribuído) de a uma determinada atividade de um departamento de prestação de serviço, com um nível de confiança de 99%, considerando que se sabe o desvio padrão (σ=10 unidades de tempo) deste serviço (da população) e considerando aceitável um erro de 7 unidades de tempo.
  - Qual o tamanho necessário da amostra?

Inferência

- Intervalo de Confiança para Média populacional com desvio-padrão conhecido com população finita
  - $\bar{X} \pm Z^*(\sigma/\sqrt{n})\ \underbrace{((N-n)/(N-1))^{1/2}}$

Fator de Correção
N – Tamanho da população
N – tamanho da amostra

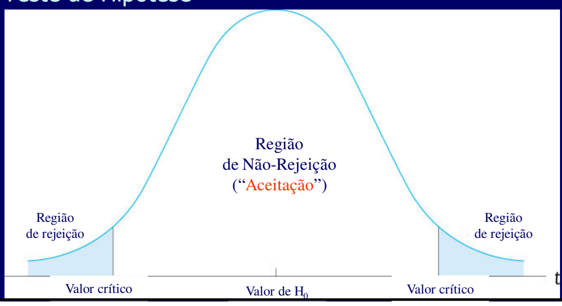
Valor crítico ($Z_{\alpha/2}$) da tabela da distribuição t quando o GL tende para infinito (última linha da tabela), considerando um dado nível de significância (α)

Inferência

- Teste de Hipótese
  - Procedimento que permite decidir se se rejeita ou aceita uma hipótese baseada em informações contidas em uma amostra.
  - A Hipótese Nula, H_0, é hipótese que se tem interesse rejeitar. A hipótese contraditória, H_1, é denominada Hipótese Alternativa.
  - As n observações (amostra) são divididas em duas regiões, Região de Aceitação – R(H_0) – e Região de Rejeição – R(H_1).

Inferência

- Teste de Hipótese



Inferência

- Teste de Hipótese (bicaudal)
  - O Teste de Hipótese Z para Média populacional com desvio-padrão conhecido

    - $H_0: \mu = e$
    - $H_1: \mu \neq e$

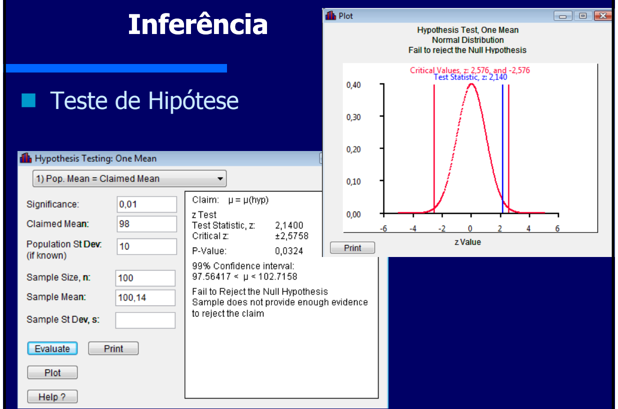
$$Z = (\overline{X} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})$$

Inferência

- Teste de Hipótese
  - Passos para o Hipótese para Média populacional com desvio-padrão conhecido
    1. Declare a Hipótese Nula, H_0.
    2. Declare a Hipótese alternativa, H_1.
    3. Escolha o nível de significância, α.
    4. Encontre os valores críticos que sub-dividem as regiões de rejeição e não-rejeição.
    5. Escolha o tamanho da amostra.
    6. Colete os dados da amostra.
    7. Calcule a média da amostra.
    8. Calcule a estatística Z.
    9. Determine se a estatística Z se encontra na região de rejeição ou na região de não-rejeição.
    10. Tome a decisão e a apresente nos termos do problema.

Inferência

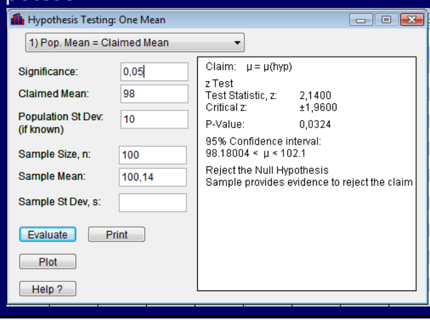
- Teste de Hipótese



Inferência

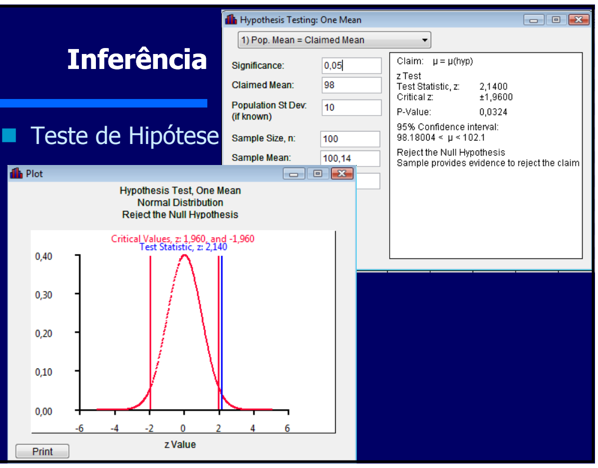
- Teste de Hipótese

Observe que se eu não exijo um nível de confiança muito alto (99%), ou seja, se me contentar com um nível de confiança de 95%, temos evidências para rejeitar a hipótese (nula) da média ser igual a 98 ut.



Inferência

- Teste de Hipótese



Inferência

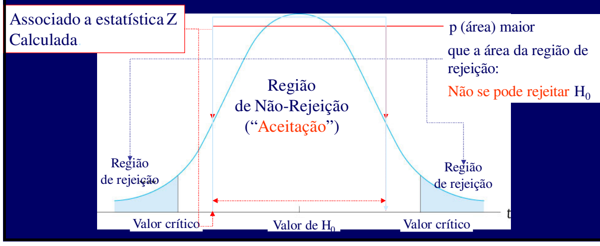
- Teste de Hipótese

  Exemplo:

  - Utilize os dados armazenados em NORMALPOPSAMPLE.MTW (NromalPopSample.sdd) e teste a hipótese de que a média seja 100 ut (unidades de tempo), sabendo-se que o desvio padrão populacional é 10, com 99% de confiança.

Inferência

- Teste de Hipótese
  - Nível de significância observado (O valor p):
    é o menor nível de significância no qual H_0 pode ser rejeitado para a amostra.



Inferência

- Teste de Hipótese
  - Passos para o Hipótese para Média populacional com desvio-padrão conhecido considerando o valor p
    1. Declare a Hipótese Nula, H_0.
    2. Declare a Hipótese alternativa, H_1.
    3. Escolha o nível de significância, α.
    4. Encontre os valores críticos que sub-dividem as regiões de rejeição e não-rejeição.
    5. Escolha o tamanho da amostra.
    6. Colete os dados da amostra.
    7. Calcule a média da amostra.
    8. Calcule a estatística Z.
    9. Calcule o valor de p com base na estatística Z.
    10. Compare o valor p com α.
    11. Tome a decisão e a apresente nos termos do problema.

Inferência

Minitab
NORMALPOPSAMPLE.MTW

- Teste de Hipótese
  - Exemplo: utilize os dados armazenados em NORMALPOPSAMPLE.MTW e teste a hipótese de que a média seja 100 ut (unidades de tempo), sabendo-se que o desvio padrão populacional é 10.

One-Sample Z: TempoServico

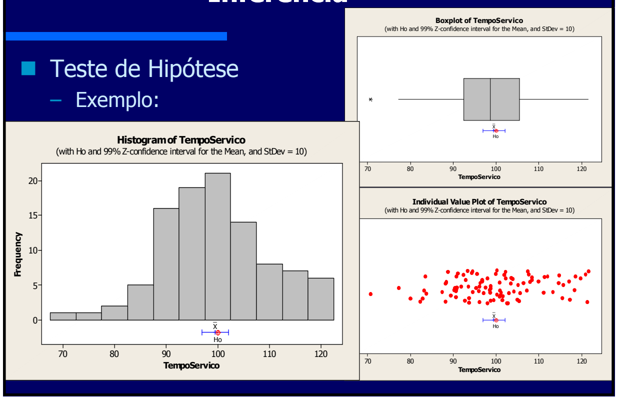
```
Test of mu = 100 vs not = 100
The assumed standard deviation = 10

Variable        N    Mean   StDev  SE Mean         99% CI              Z      P
TempoServico  100  99,4526  10,4051  1,0000  (96,8768; 102,0284)  -0,55  0,584
```

p=0,584 é muito maior que 1%, portanto não se pode rejeitar a hipótese nula (µ=100).

Inferência

- Teste de Hipótese
  - Exemplo:

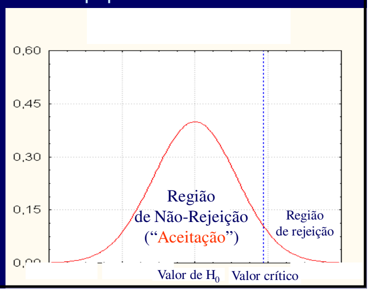


Inferência

- Teste de Hipótese (Unicaudais)

O Teste de Hipótese Z para Média populacional com desvio-padrão conhecido

- H_0 :µ≤n
- H_1 :µ> n



Inferência

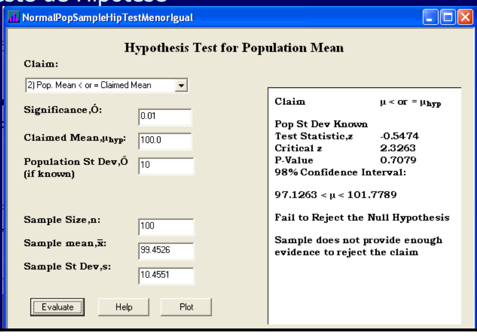
- Teste de Hipótese

Exemplo:

  - Utilize os dados armazenados em NORMALPOPSAMPLE.MTW (NromalPopSample.sdd) e teste a hipótese de que a média seja menor ou igual 100 ut (unidades de tempo), sabendo-se que o desvio padrão populacional é 10, com 98% de confiança.

Inferência

- Teste de Hipótese

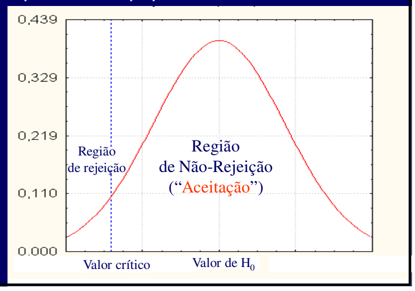


Inferência

- Teste de Hipótese (Unicaudais)

O Teste de Hipótese Z para Média populacional com desvio-padrão conhecido

- $H_0: \mu \geq n$
- $H_1: \mu < n$



Inferência

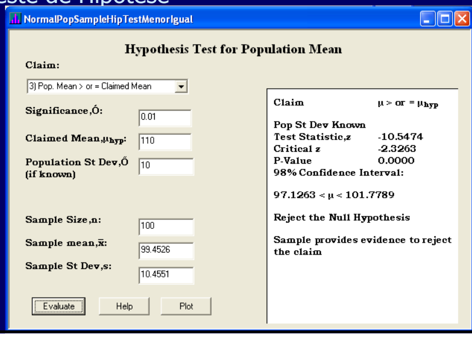
- Teste de Hipótese

Exemplo:

- Utilize os dados armazenados em NORMALPOPSAMPLE.MTW (NromalPopSample.sdd) e teste a hipótese de que a média seja maior ou igual 110 ut (unidades de tempo), sabendo-se que o desvio padrão populacional é 10, com 98% de confiança.

Inferência

- Teste de Hipótese



Inferência

- Distribuções t
- Se consideramos uma variável aleatória X normalmente distribuída, a estatística

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)}{(s / \sqrt{n})}$$

(normalizado pelo erro padrão, só que utiliza-se s ao invés de σ - dado que não se conhece σ.)

tem distribução t com n-1 graus de liberdade.

Inferência

- Distribuções t
- Se consideramos uma população normalmente distribuída, a estatística t para uma amostra de tamanho n tem distribuição t com n-1 grau de liberdade (DF,GL).
  - É muito parecida com a distribuição Normal.
  - É simétrica, unimodal, tem forma de sino.
  - Tem área maior nas caudas e menor no centro do que a Normal, dado que se desconhece o σ, portanto os valores de t têm maior variabilidade.

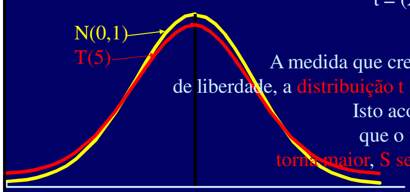
Inferência

Desenhar a dist.

t:\..\Tools\Statistica\Sta_win.e

- Distribuições t

$t = (\overline{X} - \mu) / (s/\sqrt{n})$



A medida que cresce o número de graus de liberdade, a distribuição t se aproxima da normal. Isto acontece porque a medida que o tamanho da amostra se torna maior, S se torna mais semelhante a σ.

Para uma S maior que 120 há pouca diferença entre as distribuições Z e t.

Inferência

Parte da tabela da distribuição t

	Probabilidade de uma cauda					
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
	Probabilidade das duas caudas = α					
df	0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707

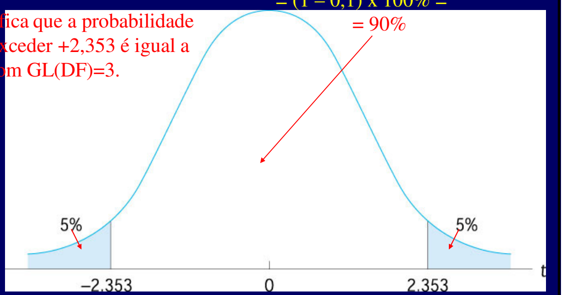
Significa que a probabilidade de t exceder +2,353 é igual a 5%
Com GL(DF)=3.

Inferência

Distribuição t com GL = 3

Nível de Confiança = (1-α) x 100%=
= (1 – 0,1) x 100% =
= 90%

Significa que a probabilidade de t exceder +2,353 é igual a 5% com GL(DF)=3.



Inferência

- Intervalo de Confiança para Média populacional com desvio-padrão desconhecido

– $\overline{X} \pm t^*(S/\sqrt{n}) \Leftrightarrow \overline{X} - t^*(S/\sqrt{n}) \leq \mu \leq \overline{X} + t^*(S/\sqrt{n})$

Valor crítico da tabela da distribuição t(n-1).
S é o desvio-padrão da amostra, considerando
Um nível de significância (α).

Inferência

Minitab

- Intervalo de Confiança
  – Exemplo: suponha que um conjunto de atividades, denominado aqui por A1, executadas por um departamento de uma organização seja normalmente distribuído com desvio padrão desconhecido. Uma amostra aleatória simples, com 100 medidas, relativa a mensuração do tempo associado a este conjunto de tarefas foi obtido. Estime o tempo médio associado a este conjunto de atividade com um nível de confiança de 95%.

Inferência

- Intervalo de Confiança para Média populacional com desvio-padrão desconhecido
  com população finita

– $\overline{X} \pm t^*(S/\sqrt{n})\ \underbrace{((N-n)/(N-1))^{1/2}}$

Fator de Correção
N – Tamanho da população
N – tamanho da amostra

Valor crítico da tabela da distribuição t(n-1).
S é o desvio-padrão da amostra, considerando
Um nível de significância (α). $t^* = t_{\alpha/2,n-1}$

Inferência

Tabela t

- Intervalo de Confiança para Média populacional com desvio-padrão desconhecido
  - Escolha do Tamanho da Amostra

$\bar{X} \pm t^* (S/\sqrt{n})$ $\qquad$ $E = t^* (S/\sqrt{n})$

E $\quad$ Margem de erro do intervalo de confiança.

Inferência

Excel
SampleSizeDetermination
$1-\alpha=0.95$
$E=7$

Statdisk
Funçao:
SampleSizeDetermination
$1-\alpha=0.95$
$E=7$

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: desejamos determinar o tamanho da amostra necessário se estimar o tempo de serviço (normalmente distribuído) de a uma determinada atividade de um departamento de prestação de serviço, com um nível de confiança de 95%, considerando que o desvio padrão amostral é 10 ut e considerando aceitável um erro de 7 unidades de tempo.
  - Qual o tamanho necessário da amostra?

Inferência

Statistica $\quad$ Excel
StatDisk $\quad$ Minitab

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: Suponha que se queira calcular o consumo médio anual de óleo (gl) usado para calefação em residências em uma determinada área. É selecionada uma amostra de 35 residências e o consumo médio destas residência está na tabela oiluse2T.txt.
  - Abrir /Tools/SSP/Example/oiluse2T.txt
  -

Inferência

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: Suponha que se queira calcular o consumo médio anual de óleo (gl) usado para calefação em residências em uma determinada área. É selecionada uma amostra de 35 residências e o consumo médio destas residência está na tabela oiluse2T.txt.
  - Se se deseja ter 95% de confiança que o intervalo obtido contém a média da população (consumo médio da área), teremos: $\bar{X}$ = 1122,7; S=295,72; t^* = t(n-1=34;p=0,025)=2,0322

Inferência

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: Suponha que se queira calcular o consumo médio anual de óleo (gl) usado para calefação em residências em uma determinada área. É selecionada uma amostra de 35 residências e o consumo médio destas residência está na tabela oiluse.txt. Se se deseja ter 95% de confiança que o intervalo obtido contém a média da população (consumo médio da área), teremos: $\bar{X}$ = 1122,73; S=295,70; t^* = t(n-1=34;p=0,025)=2,0322
  - 1122,73 ± 101,58 ⇔ 1021,12 ≤ μ ≤ 1224,28

Inferência

- Teste de Hipótese para Média populacional com desvio-padrão desconhecido
  - $\bar{X} \pm t^*(S/\sqrt{n}) \Leftrightarrow \bar{X} - t^*(S/\sqrt{n}) \le \mu \le \bar{X} + t^*(S/\sqrt{n})$

Valor crítico da tabela da distribuição t(n-1).
S é o desvio-padrão da amostra, considerando
Um nível de significância (α).

Inferência

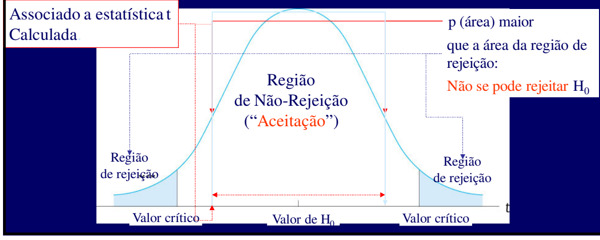
- Teste de Hipótese (bicaudal)
  - O Teste de Hipótese t para Média populacional com desvio-padrão desconhecido

  - $H_0 : \mu = n$
  - $H_1 : \mu \neq n$

$$t = (\overline{X} - \mu) / (s/\sqrt{n})$$

Inferência

- Teste de Hipótese
  - Nível de significância observado (O valor p): é o menor nível de significância no qual H_0 pode ser rejeitado para a amostra.



Inferência

- Teste de Hipótese
  - Passos para o Hipótese para Média populacional com desvio-padrão desconhecido
    1. Declare a Hipótese Nula, H_0.
    2. Declare a Hipótese alternativa, H_1.
    3. Escolha o nível de significância, α.
    4. Escolha o tamanho da amostra.
    5. Encontre os valores críticos que sub-dividem as regiões de rejeição e não-rejeição.
    6. Colete os dados da amostra.
    7. Calcule a média da amostra.
    8. Calcule a estatística t.
    9. Determine se a estatística t se encontra na região de rejeição ou na região de não-rejeição.
    10. Tome a decisão e a apresente nos termos do problema.

Inferência

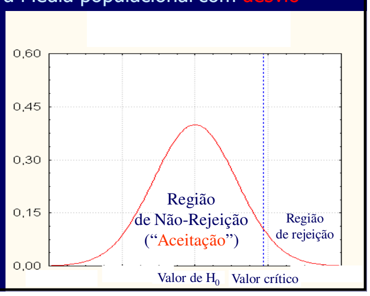
- Teste de Hipótese
  - Passos para o Hipótese para Média populacional com desvio-padrão desconhecido considerando o valor p
    1. Declare a Hipótese Nula, H_0.
    2. Declare a Hipótese alternativa, H_1.
    3. Escolha o nível de significância, α.
    4. Escolha o tamanho da amostra.
    5. Encontre os valores críticos que sub-dividem as regiões de rejeição e não-rejeição.
    6. Colete os dados da amostra.
    7. Calcule a média da amostra.
    8. Calcule a estatística t.
    9. Calcule o valor de p com base na estatística t.
    10. Compare o valor p com α.
    11. Tome a decisão e a apresente nos termos do problema.

Inferência

- Teste de Hipótese (Unicaudais)

O Teste de Hipótese t para Média populacional com desvio-padrão desconhecido

- $H_0 : \mu \leq n$
- $H_1 : \mu > n$

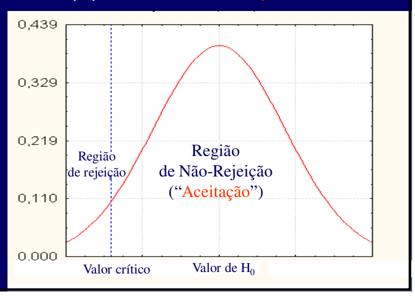


Inferência

- Teste de Hipótese (Unicaudais)

O Teste de Hipótese t para Média populacional com desvio padrão desconhecido

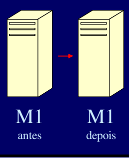
- $H_0 : \mu \geq n$
- $H_1 : \mu < n$

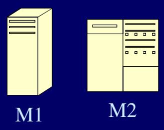


Inferência

Comparação entre Alternativas

- Use de Intervalo de Confiança
  - Comparação Emparelhada (*Before-and-after comparisons*)
  - Medições não correspondentes

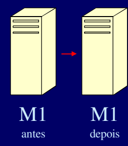




Inferência

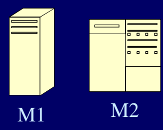
- Comparação Emparelhada
  Before-and-after
  (t-paired test)

A alteração feita provocou algum impacto estatisticamente significativo?



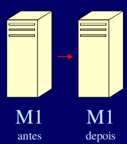
- **Medições não correspondentes**

Há diferença significativa entre os dois sistemas?



Inferência

- *Before-and-After Comparison*
- Premissas
  - Medições *Before-and-after* não são independentes
  - Variância entre os dois conjuntos de medições podem não ser iguais.
- → Medições são relacionadas
  - Formam pares de medidas
- Encontrar a diferença média



Inferência

- *Before-and-After Comparison*

b_i = medição antes

a_i = medição depois

$d_i = a_i - b_i$

$\bar{d}$ = média de d_i

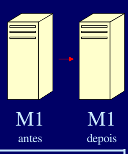
s_d = desvio padrão de d_i

$$(c_1, c_2) = \bar{d} \mp t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}, \text{ se } n < 30$$

$$(c_1, c_2) = \bar{d} \mp z_{1-\alpha/2} \frac{s_d}{\sqrt{n}}, \text{ se } n \geq 30$$

Inferência

- ***Before-and-After Comparison***



Medida (i)	Antes (b_i)	Depois (a_i)	Diferença ($d_i = b_i - a_i$)
1	85	86	-1
2	83	88	-5
3	94	90	4
4	90	95	-5
5	88	91	-3
6	87	83	4

Inferência

- ***Before-and-After Comparison***

Média das diferenças $= \bar{d} = -1$

Desvio padrão $= s_d = 4.15$

- Observando a média das diferenças, parece que o desempenho foi reduzido.
- No entanto, o desvio padrão é maior.

Inferência

•**Intervalo de Confiança para diferença das média com 95% de confiança**

$$t_{1-\alpha/2;n-1} = t_{0.975;5} = 2.571$$

	α/2		
n	0.90	0.95	0.975
...	...	...	...
5	1.476	2.015	2.571
6	1.440	1.943	2.447
...	...	...	...
∞	1.282	1.645	1.960

Inferência

•**Intervalo de Confiança para diferença das média com 95% de confiança**

$$c_{1,2} = \overline{d} \mp t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

$$t_{1-\alpha/2;n-1} = t_{0.975;5} = 2.571$$

$$c_{1,2} = -1 \mp 2.571\left(\frac{4.15}{\sqrt{6}}\right)$$

$$c_{1,2} = [-5.36, 3.36]$$

$$t_{1-\alpha/2;n-1} = t_{0.975;5} = 2.571$$

Inferência

•**Intervalo de Confiança para diferença das média com 95% de confiança**

- $c_{1,2}$ = [-5.36, 3.36]
- O intervalo inclui 0

→ Com 95% de confiança, não existe diferença significativa entre os dois sistemas.

Inferência

t-paired_test

Suponha que tenhamos dois computadores denominados C1 e C2 e um *benchmark* com 15 aplicações. Gostaríamos de comparar o desempenho destes computadores com relação ao *benchmark*.

Os esquipamentos foram isolados e os tempos de execução das aplicações foram medidos em cada computador. Os tempos médios de cada aplicação (cada aplicação foi medida diversas vezes) do *benchmark* foram calculados. Observa-se que as distribuições dos tempos de execução associada de cada aplicação não se afastam demasiadamente da distribuição Normal.

Os tempos médios de cada aplicação executada no computador C1 e C2 estão na tabela.

Podemos afirmar, com 95% de confiança, que um dos computadores tem melhor desempenho que o outro com relação à execução deste benchmark?

Inferência

- Outro exemplo: suponha que tenhamos um determinado sistema computacional (S) que realize uma algumas atividades (A,B,C,D,E,F,G). Os tempos médios para execução destas atividades são distribuídos de forma aproximadamente Normal e tem os respectivos valores:

ATIVIDADES	Tempo Médio (ms)
A	107.27
B	108.04
C	111.05
D	114.35
E	113.24
F	112.41
G	108.49

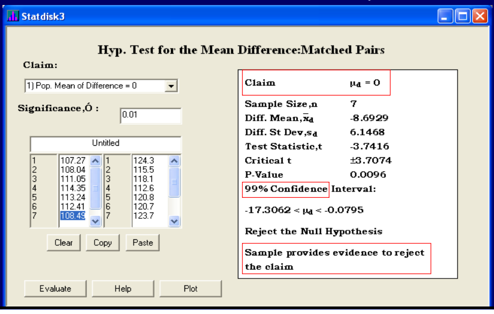
Inferência

- Outro exemplo (cont.): este sistema sofre ajuste que procuraram melhora os seu desempenho. Após os ajustes os tempos médios das atividades A,B,C,D,E,F e G passaram ser:

ATIVIDADES	Tempo Médio (ms)
A	124.3
B	115.5
C	118.1
D	112.6
E	120.8
F	120.7
G	123.7

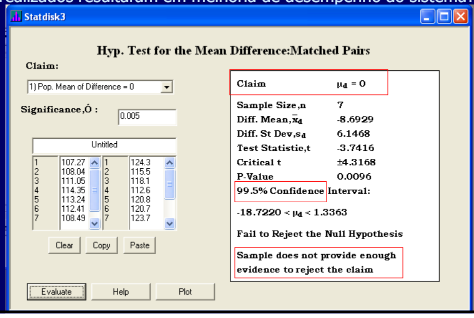
Inferência

- Outro exemplo (cont.). Podemos afirmar que os ajustes realizados resultaram em melhoria de desempenho do sistema?



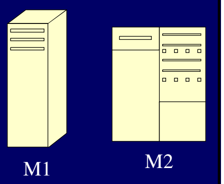
Inferência

- Outro exemplo (cont.). Podemos afirmar que os ajustes realizados resultaram em melhoria de desempenho do sistema?



Inferência

- **Medições não correspondentes**
  - Quando não há correspondência entre pares de medidas
  - Observações não-emparelhadas
  - n_1 medições do sistema M1
  - n_2 medições do sistema M2



Inferência

- Intervalo de Confiança para Diferença entre Médias

1. Calcule as médias.
2. Calcule a diferença das médias.
3. Calcule o desvio padrão da diferença das médias.
4. Calcule o intervalo de confiança para esta diferença.
5. Se não houver diferença significativa entre os sistemas, o intervalo inclui o 0.

Inferência

- Intervalo de Confiança para Diferença entre Médias

Diferença entre as médias:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$$

Dado que para X_1 e X_2 mutuamente independentes

$$Var[X_1 - X_2] = Var[X_1] + Var[X_2]$$

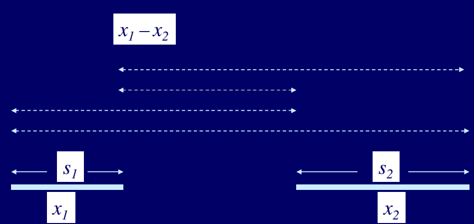
e que $s_x = \sqrt{Var[X_1] + Var[X_2]}$

Desvio padrão combinado:

$$s_x = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Inferência

- **Por quê os desvios padrões são somados?**



Inferência

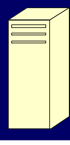
- **Grau de Liberdade**

Não somente fazer $n_{df} = n_1 + n_2 - 2$

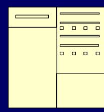
$$n_{df} = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Inferência

- **Exemplo 1 – Medição não correspondentes**



$n_1 = 12$ medidas
$\bar{x}_1 = 1243$ s
$s_1 = 38.5$



$n_2 = 7$ medidas
$\bar{x}_2 = 1085$ s
$s_2 = 54.0$

Inferência

- **Exemplo 1– Medição não correspondentes (cont.)**

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1243 - 1085 = 158$$

$$s_x = \sqrt{\frac{38.5^2}{12} + \frac{54^2}{7}} = 23.24$$

$$n_{df} = \frac{\left(\frac{38.5^2}{12} + \frac{54^2}{7}\right)^2}{\frac{\left(38.5^2/12\right)^2}{12-1} + \frac{\left(54^2/7\right)^2}{7-1}} = 9.62 \to 10$$

Inferência

- **Exemplo 1 – Medição não correspondente. Com 90% CI (cont.)**

$$c_{1,2} = \bar{x} \mp t_{1-\alpha/2;n_{df}} s_x$$

$$t_{1-\alpha/2;n_{df}} = t_{0.95;10} = 1.813$$

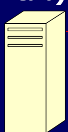
$$c_{1,2} = 158 \mp 1.813(23.24)$$

$$c_{1,2} = [116, 200]$$

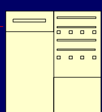
Inferência

Minitab

- **Exemplo – Medição não correspondentes (Minitab)**



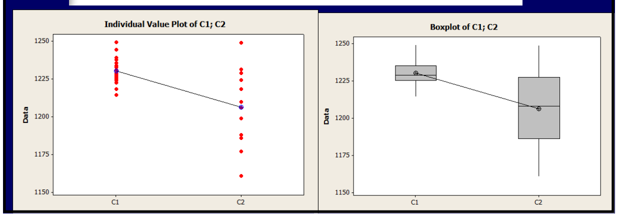
↓	C1	C2
1	1249,10	1231,14
2	1238,77	1228,64
3	1225,74	1187,84
4	1227,48	1206,00
5	1244,37	1160,85
6	1230,46	1218,09
7	1222,46	1209,79
8	1235,58	1198,74
9	1233,71	1176,97
10	1230,99	1248,89
11	1232,76	1185,71
12	1228,93	1224,04
13	1225,04	
14	1227,46	
15	1223,95	
16	1237,54	
17	1214,34	
18	1226,72	
19	1218,14	
20	1228,41	



Inferência

- **Exemplo – Medição não correspondentes (Minitab)**

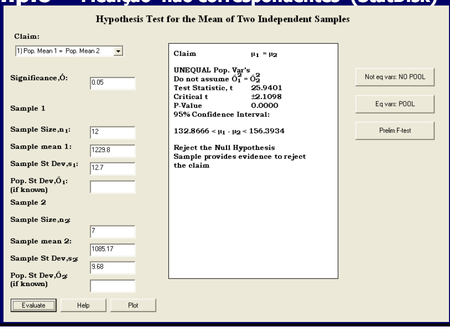
```
Difference = mu (C1) - mu (C2)
Estimate for difference:  23,71
95% CI for difference:  (7,18; 40,24)
T-Test of difference = 0 (vs not =): T-Value = 3,12  P-Value = 0,009  DF = 12
```



Inferência

StatDisk
TwoIndMeasDiffVar

•Exemplo – Medição não correspondentes (StatDisk)



Inferência

•Caso Especial

- Se n_1 <≈ 30 or n_2 <≈ 30 e
  - erros são normalmente distribuídos,
  - e $s_1 = s_2$ (Os desvios padrão são iguais)

Ou

- Se $n_1 = n_2$ e
  - erros são normalmente distribuídos,
  - e mesmo que s_1 não seja igual a s_2
- Neste situação, tem-se:

Inferência

•Caso Especial

$$(c_1, c_2) = \bar{x} \mp t_{1-\alpha/2;n_{df}}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$n_{df} = n_1 + n_2 - 2$$

$$s_p = \sqrt{\frac{s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)}{n_1 + n_2 - 2}}$$

- Normalmente produz intervalos mais estreitos.
- Algumas vezes é também útil quando se realiza medições adicionais.

Inferência

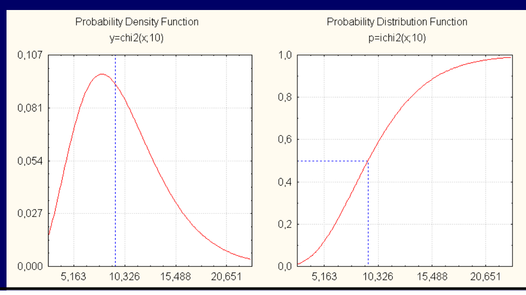
- Distribuição χ^2
  - Seja uma população normalmente distribuída com variância conhecida σ^2. Selecionamos aleatoriamente amostras independentes de tamanho n e calculamos a variância amostral s^2. A estatística $X^2 = [(n-1)\, s^2]/\, \sigma^2$ é denominada distribuição qui-quadrado.
    - n = tamanho da amostra,
    - s^2 = variância da amostra e
    - σ^2 = variância populacional
    - Média da distribuição χ^2 é n-1
    - Variância da distribuição χ^2 é 2(n-1)

Inferência

- Distribuição χ^2
  - Não é simétrica. Torna-se mais simétrica a medida que o número de graus de liberdade aumenta (gl=n-1),
  - Os valores de X^2 podem ser 0 ou positivos (nunca negativos),
  - A distribuição χ^2 é diferente para cada grau de liberdade (gl=n-1).
  - A medida que o número de graus de liberdade aumenta a distribuição χ^2 se aproxima da Normal.

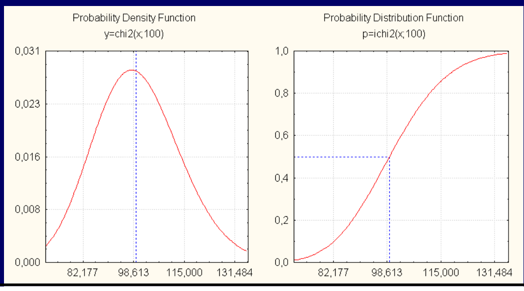
Inferência

- Distribuição χ^2 (x=0,5;gl=10)



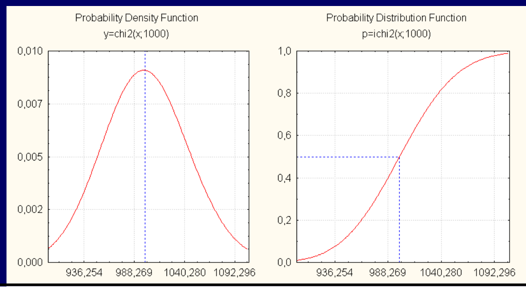
Inferência

- Distribuição χ^2 (x=0,5;gl=100)



Inferência

- Distribuição χ^2(x=0,5;gl=1000)



Inferência

- Distribuição χ^2(gl=1000)

Sabemos que $\mu = n - 1$ e $\sigma^2 = 2(n-1)$, portanto para n=1001,

$\mu = 1000$ e $\sigma = 100$.

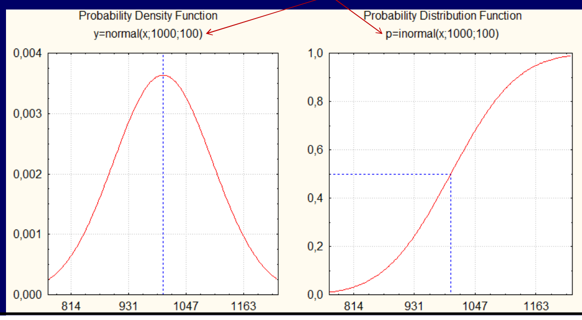
Como sabemos que a distribuição χ^2 se aproxima de uma distribuição normal para n grandes, temos que N(1000,100) deve ser similar a $\chi^2(df = 1000)$.

Desta forma, esperamos que

$P_{N(1000,100)}(X \leq 1000) \cong P_{\chi^2\ (df=1000)}$ a (X≤ 1000).

Inferência

- Distribuição χ^2(gl=1000) e N(1000,100)



Inferência

- Intervalo de confiança (IC) para σ^2

P {$\chi^2_{\alpha/2,n-1} \leq X^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$} = 1 - α

Após alguns passos, tem-se:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a} \right)$$

a = $\chi^2(\alpha, n-1)$

b = $\chi^2(1-\alpha, n-1)$

Inferência

- Intervalo de confiança (IC) para σ^2

1. Verifique se a amostra é uma AAS,
2. Verifique se os dados sugerem uma distribuição Normal,
3. Usando n-1 graus de liberdade e o nível de confiança desejado (1- α), encontre *b* e *a*.
4. Calcule os limites inferior e superior do intervalo

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a} \right)$$

- Se se deseja estimar o intervalo de confiança de σ, tome a raiz quadrada de σ^2.

Inferência

Excel Minitab

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: suponha que um conjunto de atividades, denominado aqui por A1, executadas por um departamento de uma organização seja normalmente distribuído com desvio padrão desconhecido. Uma amostra aleatória simples, com 1000 medidas, relativa a mensuração do tempo associado a este conjunto de tarefas foi obtido. Estime o a variância e o desvio padrão associado ao deste conjunto de atividade com um nível de confiança de 95%.

Inferência

- Intervalo de confiança (IC) para σ^2
- Exemplo: suponha que o tempo de execução da tarefa T1 foi medido 106 vezes (n), atendendo os requisitos de uma AAS. Os dados parecem provir de uma população normalmente distribuída e o valor médio do tempo da amostra é 98,2 s. O desvio padrão amostral s = 0,62 s. Não foram observados *outliers*. Calcule o intervalo de confiança para σ considerando o nível de confiança de 95% (1- α).
- Se α = 5% e dividindo igualmente entre as duas caudas da distribuição χ^2 , devemos procurar por valores de χ^2 correspondentes as $a=\chi^2(105, (\alpha)/2)$ e

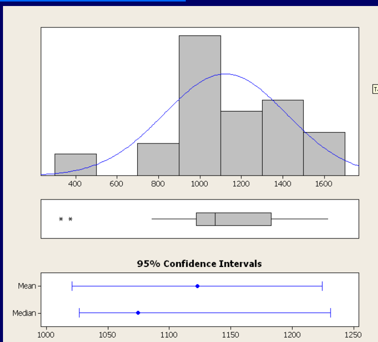
  $b=\chi^2[105, (1-\alpha)/2]$

Portanto: $0{,}546 \text{ s} < \sigma < 0{,}717 \text{ s}$

Statdisk

Minitab (OilUse) Opção:Basic Stat, Graphical Sumary

Inferência



Anderson-Darling Normality Test	
A-Squared	0,68
P-Value	0,069
Mean	1122,7
StDev	295,7
Variance	87452,2
Skewness	-0,57620
Kurtosis	1,18691
N	35
Minimum	330,0
1st Quartile	983,5
Median	1074,9
3rd Quartile	1343,3
Maximum	1617,7
95% Confidence Interval for Mean	
1021,2	1224,3
95% Confidence Interval for Median	
1026,8	1231,3
95% Confidence Interval for StDev	
239,2	387,5

Inferência

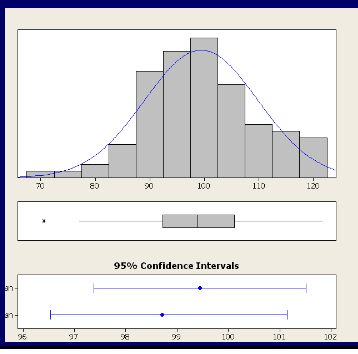
Statdisk NromalPopSample

Minitab NromalPopSample

C:\Paulo\Tools\Statdisk104

- Intervalo de Confiança
  - Exemplo: desejamos estimar a variância do tempo de serviço (normalmente distribuído) associado a uma determinada atividade de um departamento de prestação de serviço com um nível de confiança de 95%, considerando que o padrão amostral é s=10 de uma amostra aleatória simples, de tamanho igual a 100, foi adequadamente coletada.
  - Forneça o intervalo de confiança para a variância.

Inferência



Anderson-Darling Normality Test	
A-Squared	0,38
P-Value	0,403
Mean	99,453
StDev	10,405
Variance	108,267
Skewness	0,0917511
Kurtosis	-0,0554630
N	100
Minimum	70,580
1st Quartile	92,378
Median	98,710
3rd Quartile	105,495
Maximum	121,610
95% Confidence Interval for Mean	
97,388	101,517
95% Confidence Interval for Median	
96,543	101,148
95% Confidence Interval for StDev	
9,136	12,087

Inferência

- Discreta
  - Bernoulli
    - Considere um experimento aleatório com dois resultados possíveis (X=0,X=1).
    - pmf(*probability mass function*) de X é dada por: P(X=0) = 1-p e P(X=1) = p, $0 \le p \le 1$

Inferência

- Discreta
  - Bernoulli
    - Parâmetro: p;
    - Valor Esperado = p,
    - Variância= p(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/p

Inferência

Discreta

- Binomial
  - Considere um experimento aleatório independentes com dois resultados possíveis (0 e 1 por exemplo) realizados n vezes. A variável aleatória é o número de vezes que se tem resultado 1.
    - pmf de X é dada por: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ k=0,1,...,n.

Inferência

Binomial

- Discreta
  - Binomial
    - Parâmetros: n,p;
    - Valor Esperado= np,
    - Variância= np(1-p),
    - Coeficiente de variação= (1-p)/np

Inferência

Binomial

- A Normal como Aproximação da Binomial

  Demonstração Intuitiva:

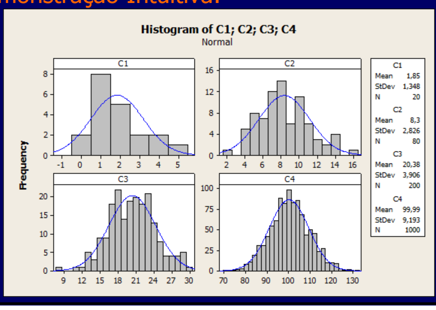
- *Vamos gerar números aleatórios segundo a distribuição Binomial de seguintes parâmetros:*

Binomial com n = 20 e p = 0,1
Binomial com n = 80 e p = 0,1
Binomial com n = 200 e p = 0,1
Binomial com n = 1000 e p = 0,1

Variáveis Aleatórias Resumo

- A Normal como Aproximação da Binomial

  Demonstração Intuitiva:



Inferência

Binomial

- A Normal como Aproximação da Binomial

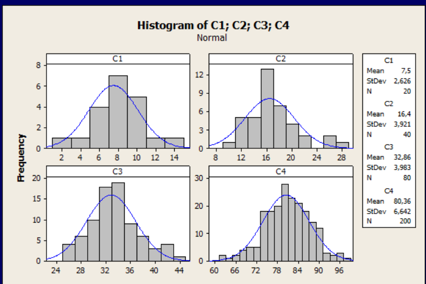
  Demonstração Intuitiva:
  - *Se aumentarmos a probabilidade a distribuição se aproxima de uma Normal mesmo com tamanhos de amostras menores.*
- *Vamos gerar números aleatórios segundo a distribuição Binomial de seguintes parâmetros:*

Binomial com n = 20 e p = 0,4
Binomial com n = 40 e p = 0,4
Binomial com n = 80 e p = 0,4
Binomial com n = 200 e p = 0,4

Variáveis Aleatórias Resumo

- A Normal como Aproximação da Binomial

  Demonstração Intuitiva:



Variáveis Aleatórias Resumo

- A Normal como Aproximação da Binomial

Condições Necessárias da distribuição de probabilidade Binomial:

1. o procedimento deve ter um número fixo de repetições,
2. as repetições devem ser independentes,
3. cada repetição deve ter todos os resultados classificados em duas categorias,
4. as probabilidades devem permanecer constantes para cada repetição.

Variáveis Aleatórias Resumo

- A Normal como Aproximação da Binomial
  - Condições Necessárias para Normal aproximar a Binomial:
  - $np \geq 5$ ou $nq \geq 5$, onde $(p=1-q)$:

1. $\mu = np$
2. $\sigma = \sqrt{npq}$

✓ A demonstração formal é conhecida como aproximação DeMoivre-Laplace

Inferência

- Intervalo de Confiança para Proporção Populacional (p):

1. Verifique se a amostra é AAS,
2. Verifique as condições necessárias para Distribuição Binomial,
3. Verifique se a Normal pode aproximar a Binomial,
4. Encontre o valor crítico Z^* $(Z_{\alpha/2})$,
5. Calcule a margem de erro $E= Z^* \sqrt{(p'q')/n}$ (p' proporção amostral)
6. Encontre $p'-E< p < p'+E$ ou $p'\pm E$ ou $(p'-E,p'+E)$

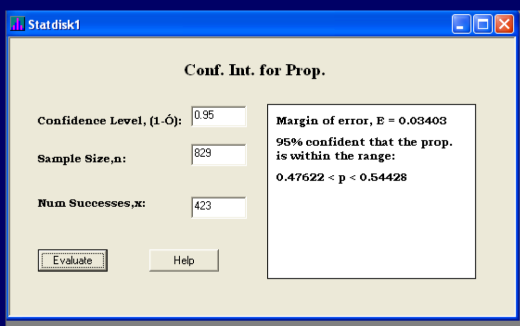
Inferência

MiniTab

- Intervalo de Confiança para Proporção Populacional (p):

- Exemplo: suponha que tenhamos uma amostra n=829, com 423 sucessos, Z*=1,96 (95/% de confiança). Calcule o intervalo de confiança para a proporção.

Inferência



Inferência

Session

Results for: PROPORINTCONF.MTW

Test and CI for One Proportion: C1

```
Event = 1

Variable    X    N  Sample p          95% CI
C1        426  829  0,513872  (0,479248; 0,548397)
```

Inferência

Considere uma situação em que precisamos estimar o tempo de execução que um processador passa executando uma determinada função A de uma aplicação computacional. No entanto os mecanismos de medição disponíveis não possuem resolução suficiente para mensurar diretamente a referida função (o tempo de execução da função é muito pequeno).

Dispomos de mecanismos que nos possibilitam verificar se o processador está executando a função ou não (observando o mapa de memória da aplicação e o valor do apontador de programa).

Utilizaremos um mecanismo de amostragem para periodicamente verificar se o processador está executando a função ou não. O tempo entre amostras é de 100ms.

Coletamos 1000 amostras. Portanto o tempo total de observação (TTO) foi de

$1000 \times 100 \times 10^{-3} = 100s.$

Inferência

Indiret Measurement

A amostra coletada está na tabela. 0 significa que o processador não estava executando a função A e 1 significa que o processador estava executando a função A.

p' – proporção amostral

$q' = 1 - p'$

$E = \sqrt[2]{\frac{p' \times q'}{n}},\quad n$ é o tamanho da amostra.

$p' \pm E \Leftrightarrow p' - E \leq p \leq p' + E$

Inferência

Indiret Measurement

$TTO(p' - E;\ p' + E) = 100(0{,}026183;\ 0{,}050641) =$

$(2{,}6183;\ 5{,}0641)s$ com 95% de confiança.

Se aumentarmos o número de amostras o intervalo diminui.

Observe a magnitude dos valores do intervalo e o TTO!

Se se sabe que o código foi executado 10 vezes, portanto o tempo médio de execução da função A está entre (0,26183; 0,50641)s com 95% de confiança.

Inferência

Indiret Measurement

Desta forma agora considere, que as amotras foram coletadas a cada 100ms (mesma frequência de amostragem) e 0 significa não estar executando a função A e 1 significa estar executando a função.

No entanto, o número de amostras foi 10000. Portanto o Tempo Total de Observação (TTO) foi de 1000s.

Desta forma

TTO x (0,045714; 0,054351) = 1000 (0,045714; 0,054351) = (45,714; 54,351)s com 95 % de confiança.

Se se sabe que o código foi executado 100 vezes, portanto o tempo médio

de execução da função A está entre (0,45714; 0,543511)s com 95% de confiança.

Inferência

- Determinação do tamanho da amostra para estimar a Proporção Populacional (p):
  - n = [(Z*)² p'q']/E² - quando se conhece a estimativa p'.
  - n = [(Z*)² 0,25]/E² - quando não se conhece a estimativa p'. (assume-se p'=0,5 e q'=0,5)

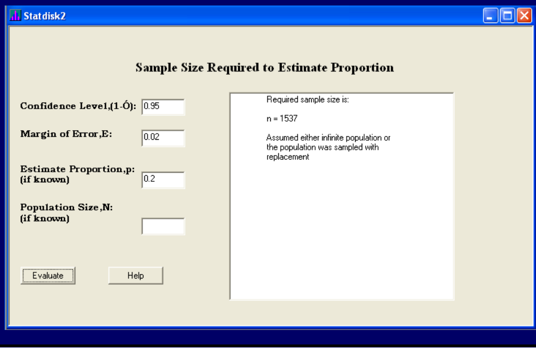
Inferência

- Determinação do tamanho da amostra para estimar a Proporção Populacional (p):
  - Exemplo: p'=0,2; E=0,04 e α=5%, portanto o tamanho da amostra deve ser:

  $n = [(1,96)^2 \times 0,2 \times 0,8]/0,04 = 385$

Statdisk

Inferência



Inferência

- *Bootstrap* (Re-amostragem)
  - É um procedimento utilizado para obtermos aproximações de distribuições amostrais quando a teoria não pode dizer-nos qual a sua forma da distribuição da população. Aplicada principalmente quando o tamanho da amostra é pequeno (dificuldade ou alto custo para obtenção de amostras maiores).

Inferência

Statdisk | Gerado pelo Statdisk (Excel) | Excel_1

- *Bootstrap* (Re-amostragem)

1. Selecione uma amostra aleatória de tamanho n.
2. Selecione uma amostra da amostra (re-amostra) de tamanho n com reposição.
3. Calcule a estatística (a média, por exemplo) desta amostra.
4. Repita os passos de 1 a 3 m vezes. (m é grande)
5. Classifique as m estatísticas (médias, por exemplo) em ordem ascendente.
6. Em função do nível de confiança desejado ($1-\alpha$), determine os valores que estejam a ($\alpha/2*100\%$) acima do menor valor e ($\alpha/2*100\%$) abaixo do maior valor.

Testes de Aderência

- Procedimento para determinar se dados têm distribuição Normal
  1. Faça alguns gráficos e observe sua aparência.
     - Para pequenos conjuntos de dados:
       - Construa um diagrama de ramo-e-folha e um *box-plot*.
     - Para conjuntos de dados grandes:
       - Construa a distribuição de freqüência e o histograma.
  2. Calcule medidas descritivas resumidas e compare as características dos dados com as propriedades da distribuição normal.
     - Obtenha a média aritmética, mediana, moda, média do intervalo, média das juntas e observe as semelhanças e diferenças entre estes valores.
     - Obtenha o intervalo interquartil e o desvio-padrão e observe quanto o intervalo interquartil pode aproximar-se de 1,33 vezes do desvio-padrão.
     - Obtenha o intervalo e observe quanto se aproxima de 6 vezes o desvio-padrão.

Testes de Aderência

- Procedimento para determinar se dados têm distribuição Normal

3. Obtenha o gráfico dos quantis (ou o gráfico de probabilidade Normal)
   1. Organize os dados ordenando os valores do menor para o maior.
   2. Com uma amostra de tamanho n, cada valor representa uma proporção de de 1/n da amostra. Usando o tamanho da amostra conhecido (n), identifique as áreas de 1/2n, 3/2n, 5/2n, 7/2n e assim por diante.
   3. Use a distribuição normal padrão para achar os valores z correspondentes às áreas acumuladas obtidas no passo 2.
   4. Combine os dados originais ordenados com os valores z correspondentes encontrados no passo 3 e desenhe os pontos (x,y) – x valor amostral original e y é o valor de z correspondente.
   5. Se o padrão dos pontos situa-se razoavelmente próximo a uma reta, então os dados parecem vir de uma população normal.

Testes de Aderência

- Procedimento para determinar se dados têm distribuição Normal
  - Exemplo: considere cinco tempos de execução coletados associados a uma determinada tarefa (em minutos) e determine se esta amostra parece vir de uma população normal.

1. Dados ordenados: 46,57,62,64,68 (n=5)
2. Encontre as áreas 1/2n=1/10, 3/2n=3/10, 5/2n=5/10, 7/2n=7/10, 9/2n=9/10: (0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9). Encontre os valores de z associados a estas áreas: (-1,28; -0,52; 0; 0,52; 1,28)
3. Obtenha os pares dos tempos (valores originais) e os valores de z obtidos: (46; -1,28), (57, -0,52), (62, 0), (64, 0,52), (68, 1,28) e apresente-os em um gráfico bi-dimensional.

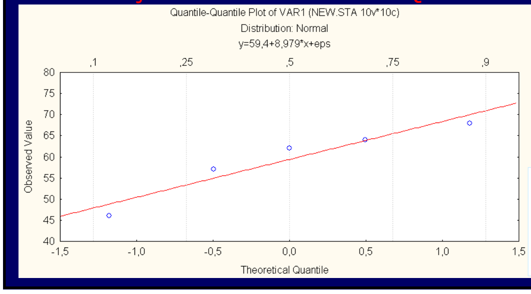
Testes de Aderência

GraProNormal Statdisk

Minitab

GraProNormal Statistica

- Procedimento para determinar se dados têm distribuição Normal – Gráfico dos Quantis -



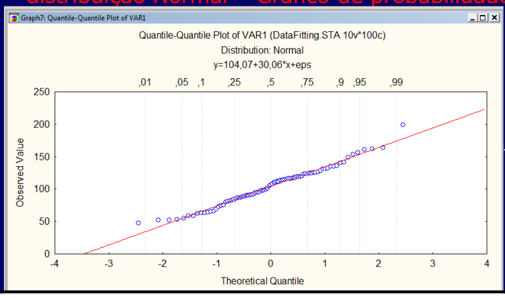
Obs.: o Statistica inverte os eixos.

Testes de Aderência

GraProNormal Statdisk

GraProNormal Statistica

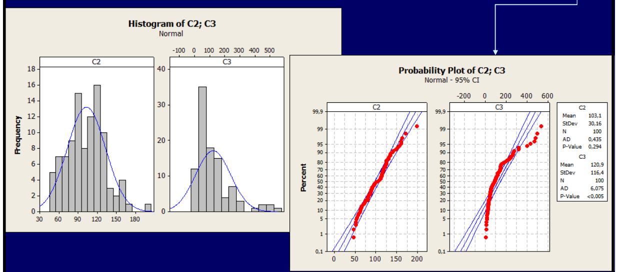
- Procedimento para determinar se dados têm distribuição Normal – Gráfico de probabilidades



Testes de Aderência

Minitab

- Procedimento para determinar se dados têm distribuição Normal – Gráfico de probabilidades



Testes de Aderência

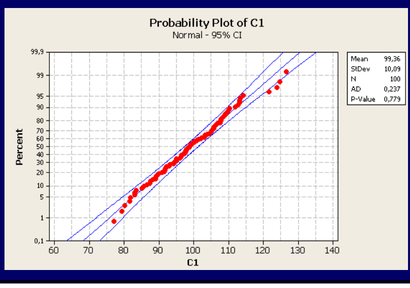
GraProNormal Statdisk

GraProNormal Statistica

Minitab

- Procedimento para determinar se dados têm distribuição Normal – Gráfico de probabilidades

Outro exemplo:



Testes de Aderência

- Teste χ^2
  - Dados organizados em categorias (dados contínuos podem ser organizados desta forma através do histograma).
  - Dependente da largura da categoria (classe).
  - Adequado para amostras grandes.
- Teste Kolmogorov-Smirnov (KS)
  - Não estão associados a uma distribuição particular.
  - Aplica-se para distribuições contínuas.
  - Para distribuições discretas, os resultados são muito conservadores.
  - Mais robusto que o Teste χ^2

Testes de Aderência

- Teste de Anderson-Darling
  - O teste de Anderson-Darling é uma modificação do teste KS.
  - O teste KS (original) usa valores críticos não particulares a nenhuma distribuição.
  - O teste de Anderson-Darling utiliza tabelas específicas (associadas a distribuições particulares) relativas à distribuição em testada, portanto o teste é mais sensível. Por outro lado, o valor crítico tem que ser obtido para cada distribuição.

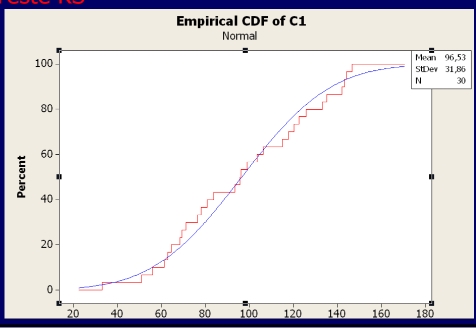
Testes de Aderência

Minitab

- Teste KS
  - Estabelecer duas hipóteses:
    - H0: As distribuições das amostras se aproximam
    - Ha: As distribuições das amostras não se aproximam
  - A partir de cada amostra $Y=(y_1, y_2,..., y_n)$, calcula-se a função de distribuição acumulada empírica (ecdf).

Testes de Aderência

- Teste KS

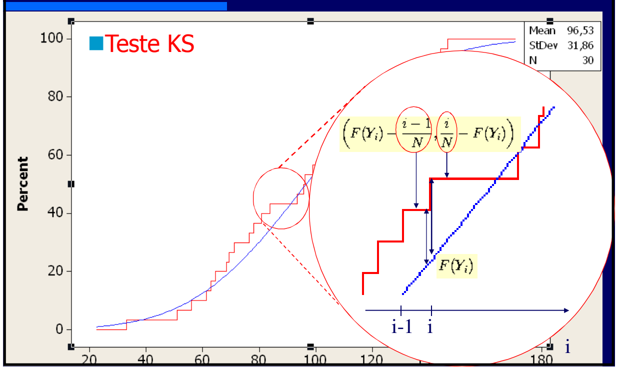


Testes de Aderência

- Teste KS
  - Estabelecer duas hipóteses:
    - H0: As distribuições das amostras se aproximam
    - Ha: As distribuições das amostras não se aproximam
  - A partir de cada amostra $Y=(y_1, y_2,..., y_n)$, calcula-se a função de distribuição acumulada empírica (ecdf).
  - Calcula-se: $D = \max_{1 \le i \le N} \left(F(Y_i) - \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} - F(Y_i) \right)$
  - Compara-se $D_{observado}$ com o um $D_{critico}$
    - Caso $D_{observado}$ observado seja menor que o $D_{critico}$ a hipótese nula será aceita

Testes de Aderência

- Teste KS



Testes de Aderência

- Teste KS

$$D = \max_{1 \le i \le N} \left(F(Y_i) - \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} - F(Y_i) \right)$$

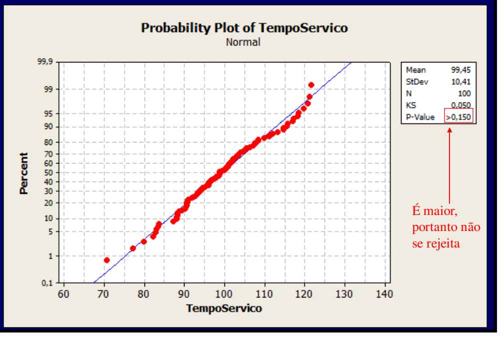
  - Compara-se $D_{observado}$ com o um $D_{critico}$
    - Caso $D_{observado}$ observado seja menor que o $D_{critico}$ a hipótese nula será aceita

Testes de Aderência

GraProNormal
Minitab

- Teste KS

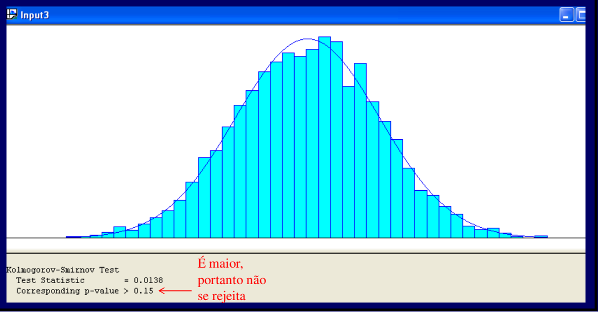
No Minitab, se o valor de p for menor que o nível de significância (α), a hipótese nula pode ser rejeitada (os dados não seguem a distribuição testada).



Testes de Aderência

Arena
Input5

- Teste KS



Testes de Aderência

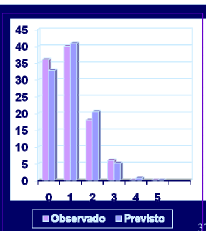
Arena
Erlang

- Teste KS

Testes de Aderência

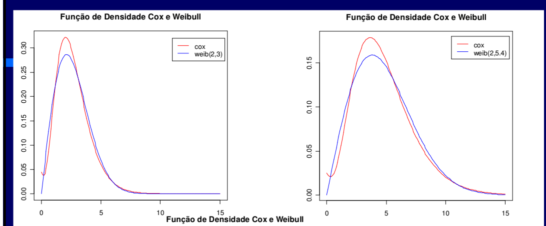
- *Estatística Chi-quadrada*
- Compare o valor calculado com o valor da tabela, considerando o nível de confiança e m-1 graus de liberdade.
- O valor crítico (na tabela) é a probabilidade que o valor calculado deve ter (pelo menos).

$$\chi^2_{m-1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(O_i - P_i)^2}{P_i}$$

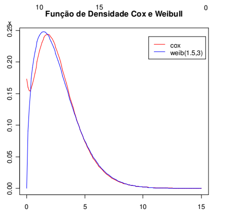


370

Amostra Weibull

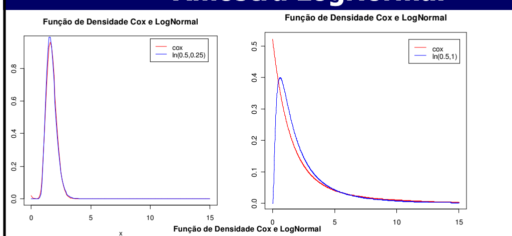


alfa	Dcrítico
10%	0.054
5%	0.060
1%	0.072

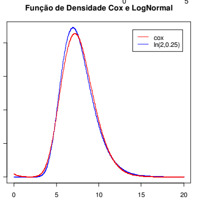


Testes	alfa	Resultado
Weib(2,3) Dobs=0.04581	10%	Aproximou!
	5%	Aproximou!
	1%	Aproximou!
Weib(2.5,4) Dobs=0.04498	10%	Aproximou!
	5%	Aproximou!
	1%	Aproximou!
Weib(1.5,3) Dobs=0.03869	10%	Aproximou!
	5%	Aproximou!
	1%	Aproximou!

Amostra LogNormal

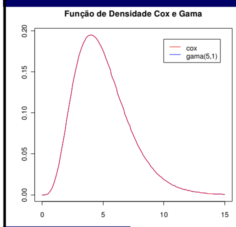


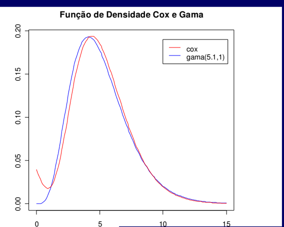
alfa	Dcrítico
10%	0.054
5%	0.060
1%	0.072



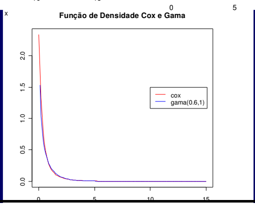
Testes	alfa	Resultado
Ln(0.5,0.25) Dobs=0.03939	10%	Aproximou!
	5%	Aproximou!
	1%	Aproximou!
Ln(0.5,1) Dobs=0.11401	10%	Não Aproximou!
	5%	Não Aproximou!
	1%	Não Aproximou!
Ln(2,0.25) Dobs=0.04278	10%	Aproximou!
	5%	Aproximou!
	1%	Aproximou!

Amostra Gama





alfa	Dcrítico
10%	0.054
5%	0.060
1%	0.072



Testes	alfa	Resultado
Gama(5,1) Dobs=0.03757	10%	Aproximou!
	5%	Aproximou!
	1%	Aproximou!
Gama(5.1,1) Dobs=0.03811	10%	Aproximou!
	5%	Aproximou!
	1%	Aproximou!
Gama(0.6,1) Dobs=0.08519	10%	Não Aproximou!
	5%	Não Aproximou!
	1%	Não Aproximou!

Inferência

- Teste de Hipótese não-paramétrico
  - (Não se assume que a amostra provém de uma população distribuída nomalmente.)
  - Adequado para distribuições simétricas.
  - Teste de Postos com Sinais de Wilcoxon
    - O teste é usado para testar a hipóteses sobre a mediana (ũ) de uma distribuição.
    - Em distribuições simétricas e sem *outliers* a mediana é próxima da média (ũ≈μ).

Inferência

- Teste de Postos com Sinais de Wilcoxon

1. Deseja-se testa a hipótese H_0: ũ= $ũ_0$ contra alternativas (H_1: ũ≠ $ũ_0$)
2. Suponha que $X_1, X_2,...,X_n$ seja uma amostra aleatória com média (mediana) igual a ũ.
3. Calcule as diferenças X_i – ũ, i=1,2,...,n.
4. Ordene os valores absolutos da diferença,
5. | X_i – ũ|, i=1,2,...,n, em ordem crescente.
6. Faça R^+ a soma dos postos positivos e R^- a soma dos postos negativos.
7. R=mín(R^+, R^-).
8. Considerando-se, o tamanho da amostra (n) e o nível de significância (α), encontra-se o valor crítico de R^*_α.
9. Se $R>R^*_\alpha$ não se pode rejeitar a hipótese nula (ũ= $ũ_0$).

Inferência

Sinais com Postos de Wilcoxon

- Teste de Postos com Sinais de Wilcoxon

Obs.	Xi	Xi-m
1	2158,70	158,70
2	1678,15	-321,85
3	2316,00	316,00
4	2061,30	61,30
5	2207,50	207,50
6	1708,30	-291,70
7	1784,70	-215,30
8	2575,00	575,00
9	2357,90	357,90
10	2256,70	256,70
11	2165,20	165,20
12	2399,55	399,55
13	1779,80	-220,20
14	2336,75	336,75
15	1765,30	-234,70
16	2053,50	53,50
17	2414,40	414,40
18	2200,50	200,50
19	2654,20	654,20
20	1753,70	-246,30

Testar a hipótese:

H0: ũ= 2000

H1: ũ≠ 2000

Com 95% de confiança

Inferência

Sinais com Postos de Wilcoxon

- Teste de Postos com Sinais de Wilcoxon

Obs	Xi-m (Classificada)	Posto com Sinal
16	53,50	1
4	61,30	2
1	158,70	3
11	165,20	4
18	200,50	5
5	207,50	6
7	-215,30	-7
13	-220,20	-8
15	-234,70	-9
20	-246,30	-10
10	256,70	11
6	-291,70	-12
3	316,00	13
2	-321,85	-14
14	336,75	15
9	357,90	16
12	399,55	17
17	414,40	18
8	575,00	19
19	654,20	20

150	-60
R+	R-
R	150
R*	52

Resultado
H0 não pode ser rejeitada